

**Teorema della media**  
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

**Teorema della media.**

$$f(x) \text{ è continua in } [a, b] \implies \exists \xi \in [a, b] \mid f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \quad (1)$$

*Proof.* Poniamo:

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

Eseguiamo quindi una partizione  $D(x_0, x_1, \dots, x_n)$  di  $[a, b]$  con ampiezza  $\delta$ . Presi ad arbitrio i punti  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ , costruiamo la somma  $\sigma_D$ :

$$\sigma_D = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (x_{k+1} - x_k) \quad (2)$$

La (2) verifica la doppia disuguaglianza:

$$m(b-a) \leq \sigma_D \leq M(b-a), \quad (3)$$

essendo  $m = \min_{[a,b]} f(x)$ ,  $M = \max_{[a,b]} f(x)$ . Eseguendo nella (3) l'operazione di passaggio al limite per  $\delta \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) &\iff m \leq \mu \leq M && \implies \\ & && f(x) \text{ è continua} \\ & && \text{in } [a, b] \\ & && \implies \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \mu, \end{aligned}$$

da cui l'asserto. □

**Definizione.** Il numero reale  $\mu$  si chiama *media integrale*.

**Interpretazione geometrica.**

Eseguiamo una **equipartizione** di  $[a, b]$ , cioè una partizione  $D_n$  attraverso  $n$  punti equidistanti. Ad esempio:

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k \in \mathcal{N} = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Abbiamo:

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \implies \delta_n = \max_{k \in \mathcal{N}} (x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n}$$

Determiniamo una somma  $\sigma_{D_n}$  assumendo  $\xi_k = x_{k+1}$ :

$$\sigma_{D_n} = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) (x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Passiamo dalle somme all'integrale:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sigma_{D_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{D_n} \\ &= (b-a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(x_k)}{n} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(x_k)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

$[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]/n$  è la media aritmetica dei valori assunti da  $f(x)$  in  $n$  punti equidistanti di  $[a, b]$ , e  $\mu$  si presenta come il limite di tale media per  $n \rightarrow +\infty$ . Da qui la denominazione di media integrale.