1 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Siamo ora in grado di risolvere il problema della ricerca della primitiva di una funzione continua $f(x)$ in un intervallo X.

Assegnato un punto $x_0 \in X$, consideriamo:

$$\forall x \in X, \;\; F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

La funzione $F(x)$ dicesi **funzione integrale** della funzione $f(x)$ **di punto iniziale** x_0.

Theorem 1 *La funzione integrale (1) è derivabile in* X*, risultando:*

$$\forall x \in X, \quad F'(x) = f(x),$$

cioè $F(x)$ *è una primitiva di* $f(x)$*.*

Proof.

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \frac{\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(\xi)\, d\xi - \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} \\
&= \frac{\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(\xi)\, d\xi + \int_{x}^{x_0} f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} \\
&= \frac{\int_{x}^{x+\Delta x} f(\xi)\, d\xi}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Per il teorema della media:

$$\exists \theta \in [0,1] : f(x + \theta \Delta x) = \frac{\int_{x}^{x+\Delta x} f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

La continuità di $f(x)$ implica:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x),$$

donde l'asserto. $\blacksquare$

***

Come è noto, la famiglia delle primitive di una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo X, è:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + c, \qquad \text{con } c \in (-\infty, +\infty) \tag{2}$$

In particolare, nella (2) possiamo porre $c = G(x_0)$, onde:

$$G(x) = G(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi \tag{3}$$

La differenza tra la (2) e la (3) è evidente: mentre nella (2) la primitiva è indeterminata, in quanto definita a meno di una costante additiva, nella (3) essa è univocamente determinata. Inoltre, ponendo nella (3) $x_0 = a$, $x = b$, si ottiene:

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = G(b) - G(a) \tag{4}$$

La (3) è la **formula fondamentale del calcolo integrale**, poiché fornisce l'integrale definito della funzione $f(x)$ tra a e b, attraverso la differenza dei valori assunti in a e in b da una qualunque primitiva.

La (3) viene spesso scritta con una delle seguenti notazioni simboliche:

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = [G(x)]_a^b \tag{5}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = G(x)\big|_a^b$$