

Esercizio 707

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2^{1/x}} \quad (1)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x \quad (2)$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, f(x) < 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y < 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è infinitesima in $x = 0$. Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^- \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{0^-}{1} = 0^-$$

Le (3) implicano:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad (4)$$

per cui $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.

Studiamo ora il comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - 2^{1/x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - 2^{1/x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Da ciò segue che il grafico è privo di asintoti obliqui.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{x(1 - 2^{1/x}) - 2^{1/x} \ln 2}{x(1 - 2^{1/x})^2} \quad (6)$$

$$f''(x) = \frac{2^{1/x}(1 + 2^{1/x}) \ln^2 2}{x^3(1 - 2^{1/x})^3} \quad (7)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Lo studio del segno e la ricerca degli zeri della derivata prima è troppo complicato, per cui ci limitiamo a studiarne il comportamento in un intorno di $x = 0$. In ogni caso, ci aspettiamo una crescita in $(-\infty, 0)$ e una decrescenza in $(0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1 - 2^{1/x}) - 2^{1/x} \ln 2}{x(1 - 2^{1/x})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 - 2^{1/x}} - \ln 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{1/x}}{x(1 - 2^{1/x})^2} \\ &= 1 - \ln 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{1/x}}{x(1 - 2^{1/x})^2} \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{1/x}}{x(1 - 2^{1/x})^2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(1 - 2^{1/x})^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{1/x}}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(1 - 2^{1/x})^2} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{1/x}}{x} &= \lim_{t = \frac{1}{x} \quad t \rightarrow -\infty} \frac{t}{2^{-t}} = 0 \\ &\implies \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{1/x}}{x(1 - 2^{1/x})^2} = 0, \end{aligned}$$

perciò:

$$f'_-(0) = 1$$

La derivata sinistra:

$$\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - 2^{1/x}) - 2^{1/x} \ln 2}{x(1 - 2^{1/x})^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - 2^{1/x}} - \ln 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{1/x}}{x(1 - 2^{1/x})^2} \\
&= 0 - \ln 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{1/x}}{x(1 - 2^{1/x})^2}
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{1/x}}{x(1 - 2^{1/x})^2} = \frac{\infty}{0 \cdot \infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x2^{1/x}(2^{-1/x} - 1)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+,$$

poichè:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x2^{1/x} = \lim_{t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty} \frac{2^t}{t} = +\infty$$

Quindi:

$$f'_+(0) = 0$$

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$\exists x \in X \mid f''(x) = 0 \implies \nexists \text{ punti di flesso}$$

Segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff x(1 - 2^{1/x}) > 0 \text{ mai!}$$

per cui il grafico volge la concavità verso il basso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (1).

Esercizio 708

Studiare la funzione

$$f(x) = xe^x \tag{8}$$

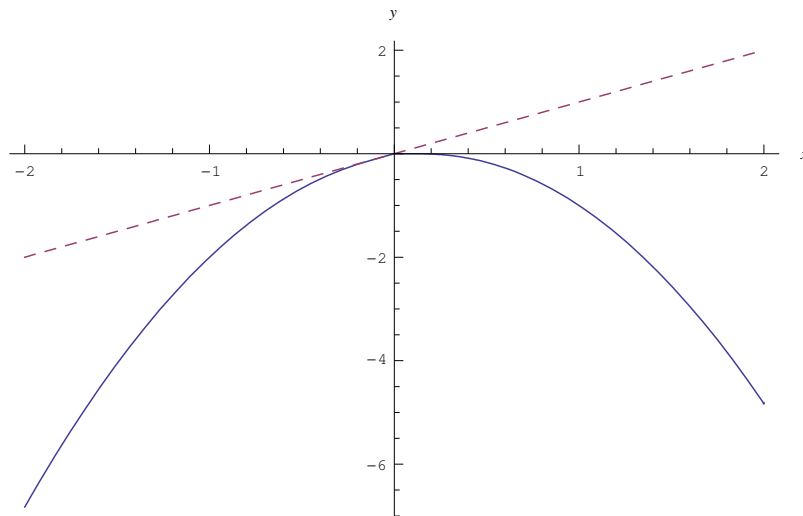


Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{1-2^{1/x}}$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff x = 0 \implies (0, 0) \in \gamma \quad (9)$$

essendo γ il grafico della funzione.

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff x > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y < 0$ per $x < 0$ e nel semipiano $y > 0$ per $x > 0$.

Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0^- \end{aligned} \quad (10)$$

Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.

Ovviamente non esistono asintoti obliqui a destra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = e^x(x+1) \quad (11)$$

$$f''(x) = e^x(x+2) \quad (12)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \iff x = -1$$

Quindi abbiamo il punto estremo $x = -1$.

Segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff x > -1,$$

donde la funzione è strettamente crescente in $(-1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$. Da ciò segue che $x = -1$ è punto minimo relativo. Ed è anche punto di minimo assoluto:

$$m\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$$

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x = -2$$

Segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff x > -2,$$

per cui il grafico volge la concavità verso il basso in $(-\infty, -2)$ per poi volgere la concavità verso l'alto in $(-2, +\infty)$. Segue che $x = -2$ è punto di flesso:

$$F\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (2).

Esercizio 709

$$f(x) = xe^{-x} \quad (13)$$

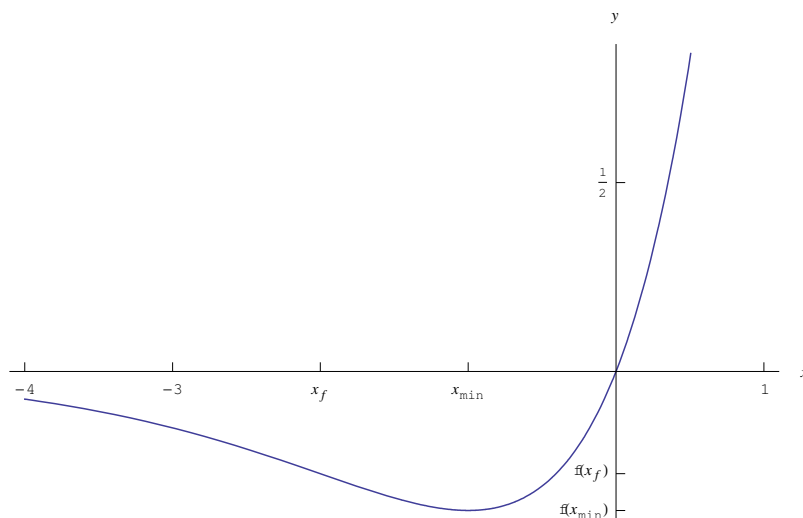


Figure 2: Grafico della funzione $f(x) = xe^x$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff x = 0 \implies (0, 0) \in \gamma \quad (14)$$

essendo γ il grafico della funzione.

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff x > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y < 0$ per $x < 0$ e nel semipiano $y > 0$ per $x > 0$.

Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty \end{aligned} \quad (15)$$

Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.

Ovviamente non esistono asintoti obliqui a destra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = -e^{-x}(x-1) \quad (16)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x-2) \quad (17)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

Quindi abbiamo il punto estremaie $x = 1$.

Segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff x < 1,$$

donde la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 1)$ ed è strettamente decrescente in $(1, +\infty)$. Da ciò segue che $x = 1$ è punto massimo relativo.

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x = 2$$

Segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff x > 2,$$

per cui il grafico volge la concavità verso il basso in $(-\infty, 2)$ per poi volgere la concavità verso l'alto in $(2, +\infty)$. Segue che $x = 2$ è punto di flesso:

$$F\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (3).

Esercizio 710

Studiare la funzione

$$f(x) = e^x \text{sign}(\ln|x|) \quad (18)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Ricordiamo che la funzione $\text{sign}(t)$ è così definita:

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ -1, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

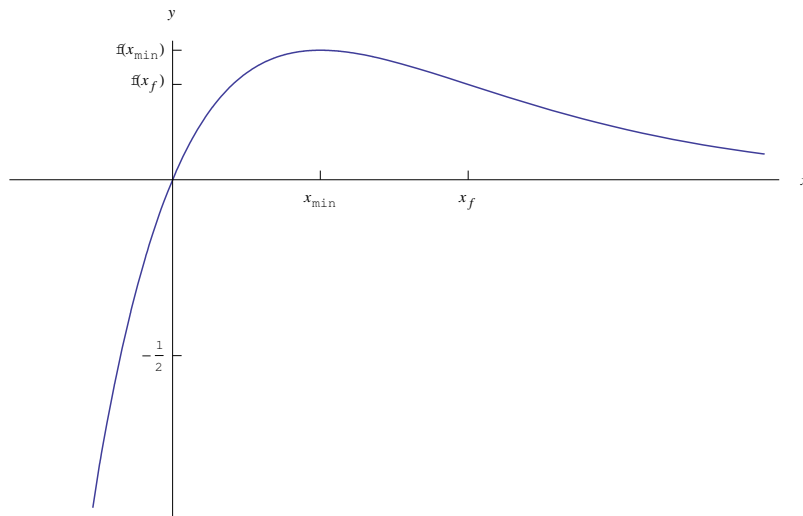


Figure 3: Grafico della funzione $f(x) = xe^{-x}$

Quindi:

$$\text{sign}(\ln |x|) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ln |x| > 0 \\ -1, & \text{se } \ln |x| < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \ln |x| > 0 &\iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \ln |x| < 0 &\iff x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \end{aligned}$$

Perciò:

$$\text{sign}(\ln |x|) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -1, & \text{se } x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \end{cases} \quad (19)$$

Ora siamo in grado di esplicitare l'espressione di $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -e^x, & \text{se } x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \end{cases} \quad (20)$$

Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= -\frac{1}{e},\end{aligned}\tag{21}$$

per cui $x_0 = -1$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto di discontinuità $s(-1) = -\frac{2}{e}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -e \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= e,\end{aligned}\tag{22}$$

per cui $x'_0 = 1$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto di discontinuità $s(1) = 2e$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+\tag{23}$$

Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty\tag{24}$$

Ovviamente non esistono asintoti obliqui a destra, in quanto abbiamo una divergenza esponenziale.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (??).

Esercizio 715

Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\tag{25}$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in X tale che:

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1 &\iff \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x \leq 1+x^2 \\ 2x \geq -1-x^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x^2-1)^2 \geq 0 \\ (x^2+1)^2 \geq 0 \end{cases} \iff x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

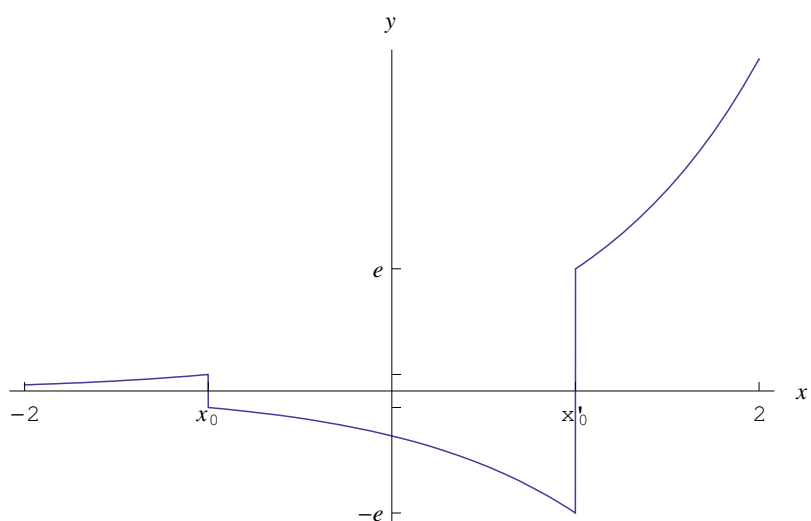


Figure 4: Grafico della funzione $f(x) = e^x \text{sign}(\ln|x|)$

Quindi $X = (-\infty, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \frac{2x}{1+x^2} = 1 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1 \implies (1, 0) \in \gamma \cap x \quad (26)$$

essendo γ il grafico della funzione.

$$f(0) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \implies B\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) > 0$$

Ricordiamo che la funzione \arccos è sempre positiva in figura (5).

Quindi il grafico giace nel semipiano $y \geq 0$.

Comportamento agli estremi

Osserviamo che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0^+$$

Quindi

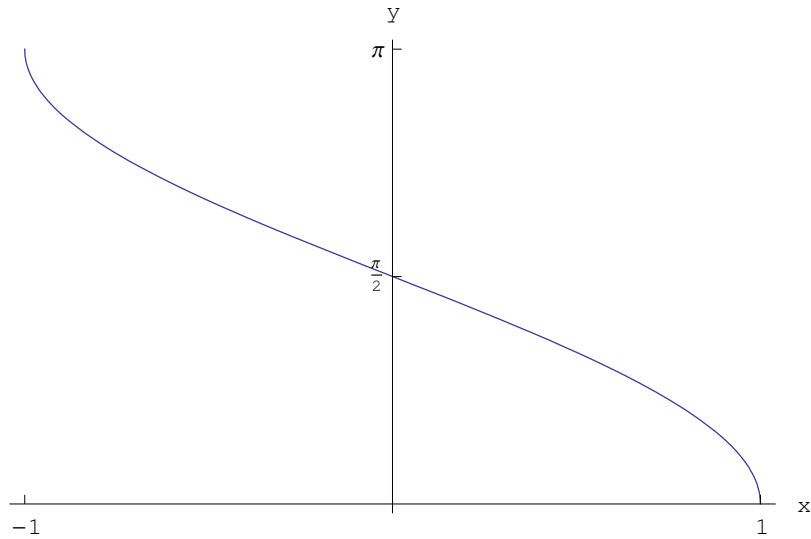


Figure 5: Grafico della funzione $\arccos x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arccos(0^+) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \arccos(0^-) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$$

Da ciò segue che la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Calcolo delle derivate

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|} \frac{2}{x^2 + 1} \quad (28)$$

$$f''(x) = -\frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1} \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \quad (29)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Esplicitando la prima delle (28):

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2 + 1}, & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -\frac{2}{x^2 + 1}, & \text{se } x \in (-1, 1) \end{cases} \quad (30)$$

Da ciò segue che f è strettamente crescente in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-1, 1)$. Si osservi che $x = -1$ e $x = +1$ sono punti di estremo relativo (massimo e minimo rispettivamente), e al tempo stesso sono punti angolosi, giacchè:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 1$$

Concavità e punti di flesso.

Esplicitando la seconda delle (28):

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(x^2+1)^2}, & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \frac{4x}{(x^2+1)^2}, & \text{se } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x = 0$$

Segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1),$$

per cui il grafico volge la concavità verso l'alto in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ per poi volgere la concavità verso il basso in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Segue che $x = 0$ è punto di flesso:

$$F\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Si osservi che i punti $x = \pm 1$ pur essendo dei punti di cambio di concavità, non sono punti di flesso, poiché la derivata seconda ha ivi una discontinuità di prima specie.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (6).

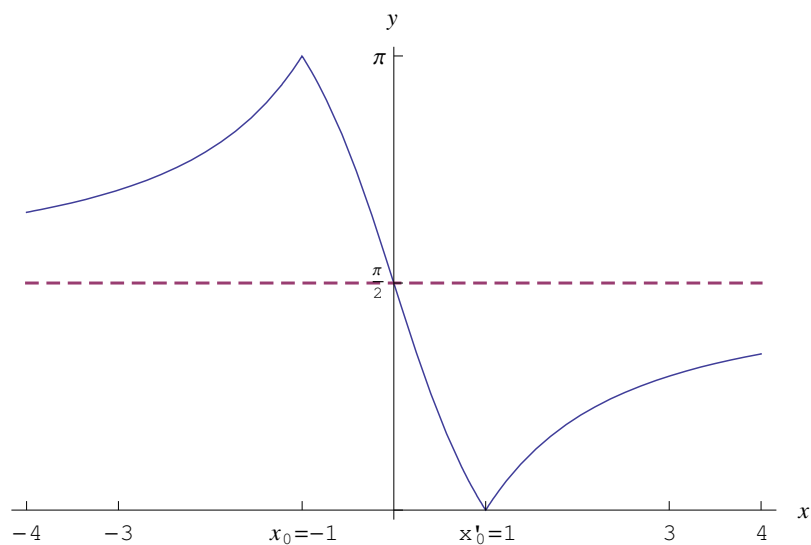


Figure 6: Grafico della funzione $f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

Esercizio 716

Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin \ln(x^2 + 1) \quad (31)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in X tale che:

$$\begin{cases} \ln(x^2 + 1) \leq 1 \\ \ln(x^2 + 1) \geq -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 - (e - 1) \leq 0 \\ x^2 + \frac{e-1}{e} \geq 0 \end{cases}$$

La prima è verificata in $X_1 = [-\sqrt{e-1}, \sqrt{e+1}]$, la seconda in $X_2 = (-\infty, +\infty)$, quindi $X = X_1 \cap X_2 = X_1$

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) = f(x), \forall x$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff x^2 + 1 = 1 \iff x = 0 \implies (0, 0) \in \gamma \quad (32)$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff x^2 + 1 = 1 > 0, \forall x \neq 0$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y \geq 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è continua, quindi:

$$f(\pm\sqrt{e-1}) = \frac{\pi}{2}$$

Calcolo delle derivate

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-\ln(x^2+1)}} \quad (33)$$

Omettiamo il calcolo della derivata seconda in quanto troppo complicato.

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

e

$$f'(x) > 0 \iff x \neq 0$$

Quindi f è strettamente crescente in $(0, \sqrt{e-1})$ ed è strettamente decrescente in $(-\sqrt{e-1}, 0)$. Il punto $x = 0$ è di minimo relativo. Siccome f è continua in un compatto, segue per il teorema di Weierstrass che f è ivi dotata di minimo e massimo assoluti. Il minimo assoluto è $(0, 0)$, mentre il massimo assoluto uno dei punti $(\pm\sqrt{e-1}, \frac{\pi}{2})$.

La derivata prima è discontinua agli estremi:

$$\lim_{x \rightarrow -(\sqrt{e-1})^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\sqrt{e-1})^-} f'(x) = +\infty$$

Concavità e punti di flesso.

È evidente che il grafico è concavo verso l'alto.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (7).

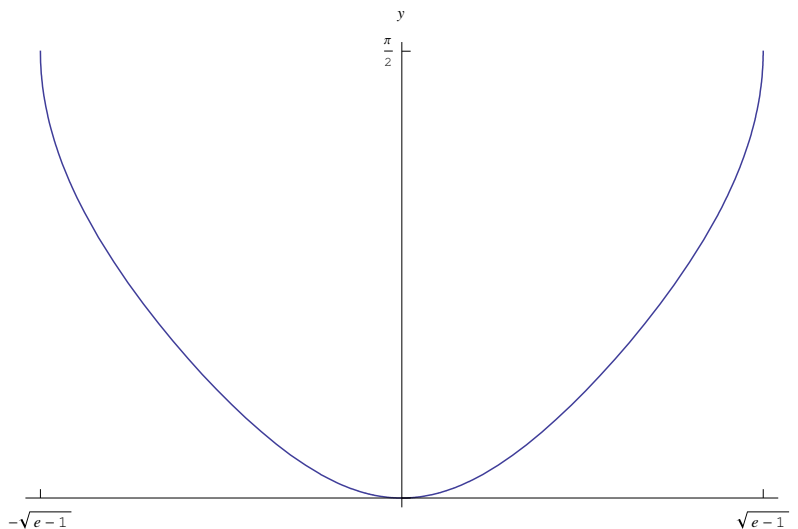


Figure 7: Grafico della funzione $\arcsin \ln(x^2 + 1)$

Esercizio 717

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \sinh x \tag{34}$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in X tale che:

$$\sinh x > 0 \iff x > \alpha \stackrel{def}{=} \operatorname{arcsinh} 1 \simeq 0.88$$

Quindi $X = [\alpha, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \sinh x = 1 \iff x = \alpha \implies (\alpha, 0) \in \gamma \cap x \quad (35)$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \sinh x > 2 \iff x \in (\alpha, +\infty)$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (\alpha, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, \alpha)$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln 0^+ = -\infty$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale.

La funzione diverge positivamente all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \coth x = 1 \\ n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \infty - \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln \sinh x - \ln e^x) \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh x}{e^x} \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{2} \\ &= \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \end{aligned}$$

Quindi la retta $y = x - \ln 2$ è asintoto obliquo.

Calcolo delle derivate

$$\begin{aligned} f'(x) &= \coth x \\ f''(x) &= -\frac{1}{\sinh^2 x} \end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$f'(x) > 0 \iff x > 0$$

Quindi f è strettamente crescente in X

Concavità e punti di flesso.

Risulta:

$$f''(x) < 0, \forall x \in X,$$

per cui γ è concavo.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (8).

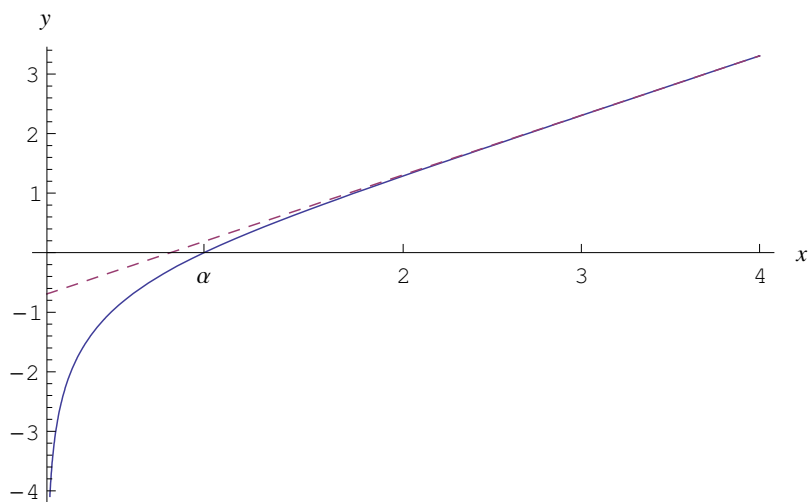


Figure 8: Grafico della funzione $f(x) = \ln \sinh x$

Esercizio 718

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{|e^{2x} - 1|} \tag{36}$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in X tale che:

$$e^{2x} \neq 1 \iff x \neq 0$$

Quindi

$$X = \mathbb{R} - \{0\}$$

L'espressione analitica della funzione può essere riscritta osservando che:

$$e^{2x} - 1 = e^x (e^x - e^{-x}) = 2e^x \sinh x$$

Perciò:

$$f(x) = \frac{1}{2|\sinh x|} = \begin{cases} \frac{1}{2\sinh x}, & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ -\frac{1}{2\sinh x}, & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$, per cui il grafico γ è simmetrico rispetto all'asse y .

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x \tag{37}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, f(x) > 0$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -\frac{1}{0^-} = -(-\infty) = +\infty, \end{aligned}$$

cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale.

La funzione è infinitesima all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+ \implies \lim_{\substack{f \text{ è pari} \\ x \rightarrow +\infty}} f(x) = 0^-$$

Da ciò segue che l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Calcolo delle derivate

Calcoliamo solo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\cosh x}{2 \sinh^2 x}, & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ \frac{\cosh x}{2 \sinh^2 x}, & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$f'(x) > 0 \iff x < 0$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ ed è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$.

Concavità e punti di flesso.

È facile dedurre che γ volge la concavità verso l'alto.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (9).

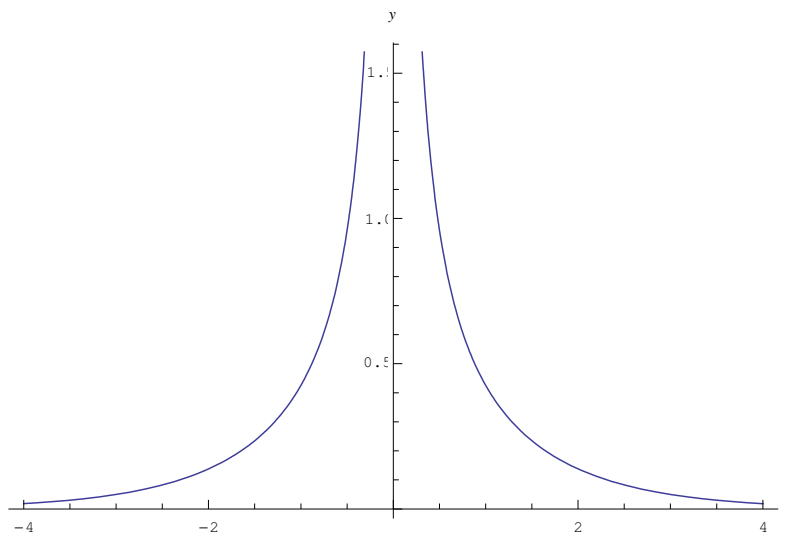


Figure 9: Grafico della funzione $f(x) = \frac{e^x}{|e^{2x}-1|}$

Esercizio 719

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\sin x} \tag{38}$$

Soluzione**Insieme di definizione**

La funzione è definita in $X = \mathbb{R}$. Inoltre, è periodica di periodo $T = 2\pi$, per cui studiamola solo in $[0, 2\pi]$.

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x \quad (39)$$

Inoltre:

$$f(0) = 1 \implies A(0, 1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, f(x) > 0$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è continua; inoltre, essendo periodica è non regolare all'infinito.

Calcolo delle derivate

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin x} \cos x \\ f''(x) &= e^{\sin x} (-\sin^2 x - \sin x + 1) \end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ ed è strettamente decrescente in $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$.

$$\begin{aligned} x = \frac{\pi}{2} &\text{ è punto di massimo relativo, con } f\left(\frac{\pi}{2}, e\right) \\ x = \frac{3\pi}{2} &\text{ è punto di minimo relativo, con } f\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

Concavità e punti di flesso.

Poniamo $\sin x = t$, quindi:

$$f''(x) = 0 \iff t^2 + t - 1 = 0 \iff t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Cioè:

$$\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (\text{l'altra soluzione non è accettabile in quanto } < -1)$$

Da cui:

$$x = \alpha, x = \pi - \alpha,$$

essendo $\alpha < \frac{\pi}{4}$, più precisamente $\alpha \simeq 0.67$. Inoltre:

$$f''(x) > 0 \iff t^2 + t - 1 < 0 \iff x \in [0, \alpha) \cup (\pi - \alpha, 2\pi]$$

Cioè γ è concavo verso l'alto in $[0, \alpha) \cup (\pi - \alpha, 2\pi]$ ed è concavo verso il basso $(\alpha, \pi - \alpha)$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (10).

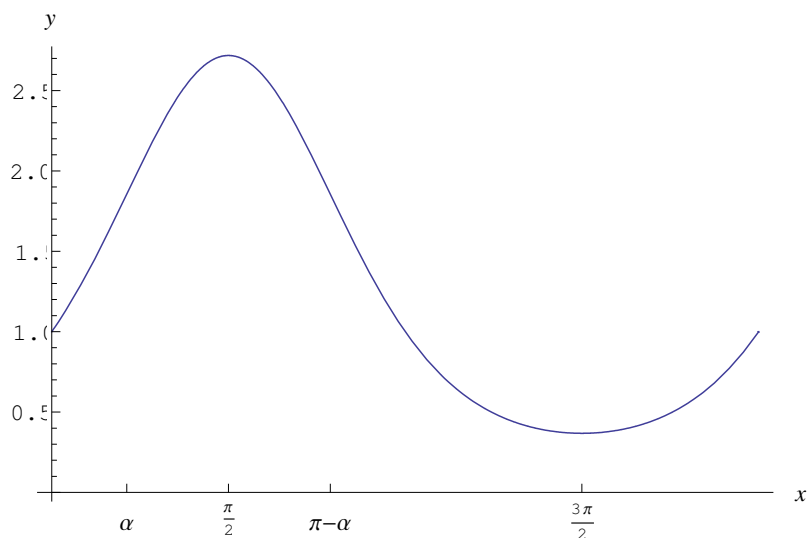


Figure 10: Grafico della funzione $f(x) = e^{\sin x}$

Esercizio 725

Studiare la funzione

$$f(x) = \cos x - \cos^2 x \tag{40}$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. Trattandosi di una funzione periodica, determiniamo il periodo fondamentale:

$$\begin{aligned}\cos x & \text{ ha periodo } T_1 = 2\pi \\ \cos^2 x & \text{ ha periodo } T_2 = \pi\end{aligned}$$

Quindi il periodo fondamentale della funzione è $T = 2\pi$. Studiamo perciò la funzione in $[0, 2\pi]$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \cos x (1 - \cos x) = 0 \iff \cos x = 0, \cos x = 1 \quad (41)$$

$$\iff x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi, x = 0, x = 2\pi \quad (42)$$

Quindi:

$$(0, 0) \in \gamma, A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), B\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right), C(2\pi, 0) \in \gamma \cap x$$

Studio del segno

$$\begin{aligned}f(x) > 0 & \iff \cos x (1 - \cos x) > 0 \iff \cos x > 0 \\ & \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]\end{aligned}$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$.

Calcolo delle derivate

$$\begin{aligned}f'(x) & = \sin x (2 \cos x - 1) \\ f''(x) & = 2 \cos 2x - \cos x = 4 \cos^2 x - \cos x - 2\end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della f' :

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 & \iff \sin x = 0, \cos x = \frac{1}{2} \\ & \iff x = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) > 0 & \iff \sin x (2 \cos x - 1) > 0 \\ & \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{5}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

Quindi f è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{3}) \cup (\pi, \frac{5}{3}\pi)$

$x = \frac{\pi}{3}$ è punto di massimo relativo

$x = \pi$ è punto di minimo relativo

$x = \frac{5\pi}{3}$ è punto di massimo relativo

Le coordinate sono:

$$M_1 \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4} \right), M_2 \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{1}{4} \right), m(\pi, -2)$$

Concavità e punti di flesso.

Zeri della f''

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff 4 \cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \\ &\iff \cos x = \frac{1 - \sqrt{33}}{8}, \cos x = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \\ &\iff x = \alpha, 2\pi - \alpha, \beta, 2\pi - \beta, \end{aligned}$$

essendo:

$$\alpha = \arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8}, \beta = \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$$

Segno della f'' :

$$f''(x) > 0 \iff \cos x < \frac{1 - \sqrt{33}}{8}, \cos x > \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$$

Le soluzioni di $\cos x < \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$ si deducono dal grafico di fig. (11).

Le soluzioni di $\cos x > \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$ si deducono dal grafico di fig. (12).

Quindi γ è concavo in $[0, \beta) \cup (\alpha, 2\pi - \alpha) \cup (2\pi - \beta, 2\pi]$. I seguenti punti sono flessi:

$$\begin{aligned} F_1 \left(\beta, \frac{3\sqrt{33} - 13}{32} \right), F_2 \left(\alpha, -\frac{3\sqrt{33} + 13}{32} \right) \\ F_3 \left(2\pi - \alpha, -\frac{3\sqrt{33} + 13}{32} \right), F_4 \left(2\pi - \beta, \frac{3\sqrt{33} - 13}{32} \right) \end{aligned}$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (13).

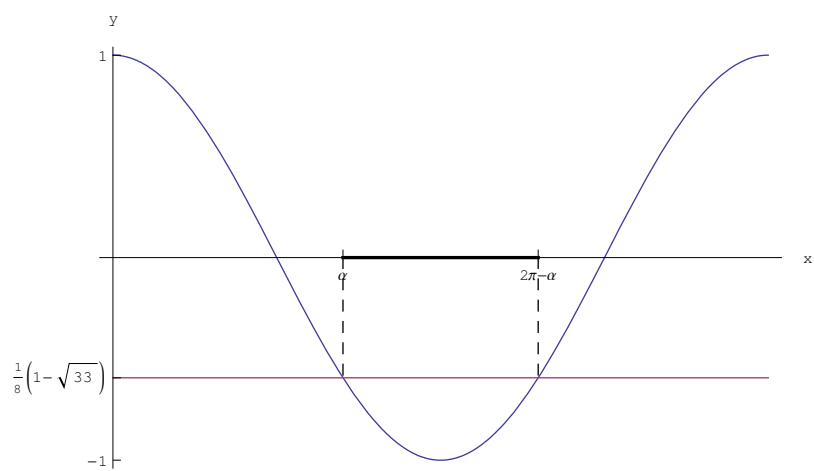


Figure 11: Ricerca delle soluzioni di $\cos x < \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$

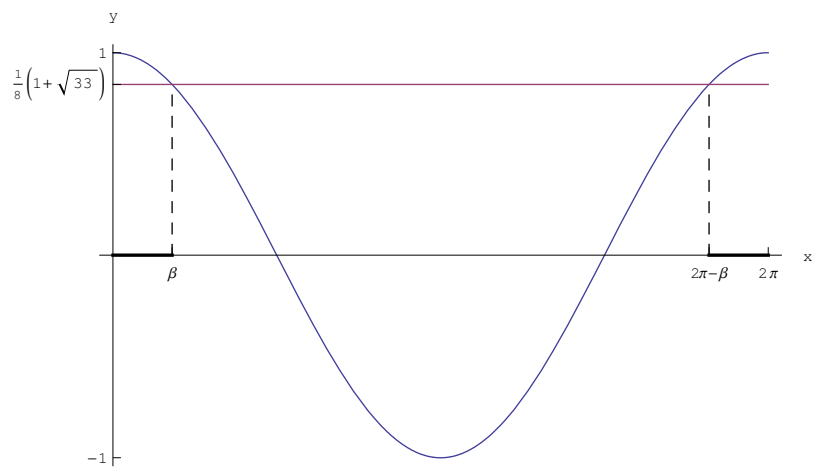


Figure 12: Ricerca delle soluzioni di $\cos x > \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$

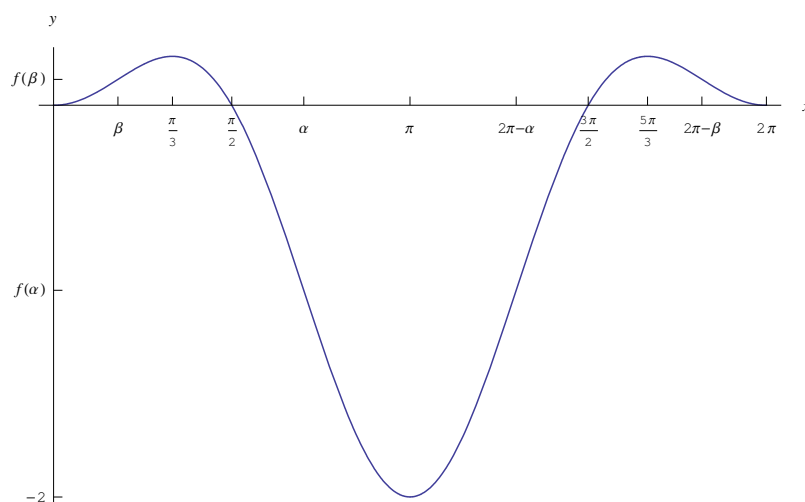


Figure 13: Grafico della funzione $f(x) = \cos x - \cos^2 x$

Esercizio 726

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\arcsin \sqrt{x}} \quad (43)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = [0, 1]$.

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid e^{\arcsin \sqrt{x}} = 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione.

Inoltre:

$$f(0) = 1 \implies A(0, 1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, f(x) > 0$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è continua agli estremi dell'intervallo X , risultando $f(1) = e^{\pi/2}$.

Calcolo delle derivate

$$f'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x(1-x)}}$$
$$f''(x) = f(x) \frac{\sqrt{x-x^2} + 2x - 1}{4\sqrt{x^3(1-x)^3}}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$\forall x \in (0, 1), f'(x) > 0,$$

quindi la funzione è strettamente crescente in X . La derivata non è continua agli estremi di X :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = +\infty$$

per cui il grafico “parte” da $A(0, 1)$ con tangente verticale e “arriva” a $B(1, e^{\pi/2})$ con tangente verticale.

Concavità e punti di flesso.

Zeri della f''

$$f''(x) = 0 \iff \begin{cases} \sqrt{x-x^2} = 1-2x \\ x \neq 0, x \neq 1 \end{cases}$$

Abbiamo:

$$\sqrt{x-x^2} = 1-2x \iff x = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Segno della f'' :

$$f''(x) > 0 \iff \begin{cases} \sqrt{x-x^2} > 1-2x \\ x \neq 0, x \neq 1 \end{cases}$$

Risolviamo la disequazione irrazionale:

$$\sqrt{x-x^2} > 1-2x \tag{44}$$

Se $1-2x \geq 0$:

$$\begin{cases} x-x^2 > (1-2x)^2 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 5x^2 - 5x + 1 < 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\iff x \in S_1 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}, \frac{1}{2} \right]$$

Se $1 - 2x < 0$:

$$\begin{cases} 5x - x^2 \geq 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \iff x \in S_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

Quindi le soluzioni della (44) sono:

$$x \in S = S_1 \cup S_2 = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}, 1\right]$$

Perciò:

$$f''(x) > 0 \iff x \in S - \{1\} = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}, 1\right)$$

Il grafico è concavo verso l'alto in $\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}, 1\right)$, concavo verso il basso in $\left(0, \frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right)$. Il punto $x_f = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$ è punto di flesso a tangente obliqua.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (14).

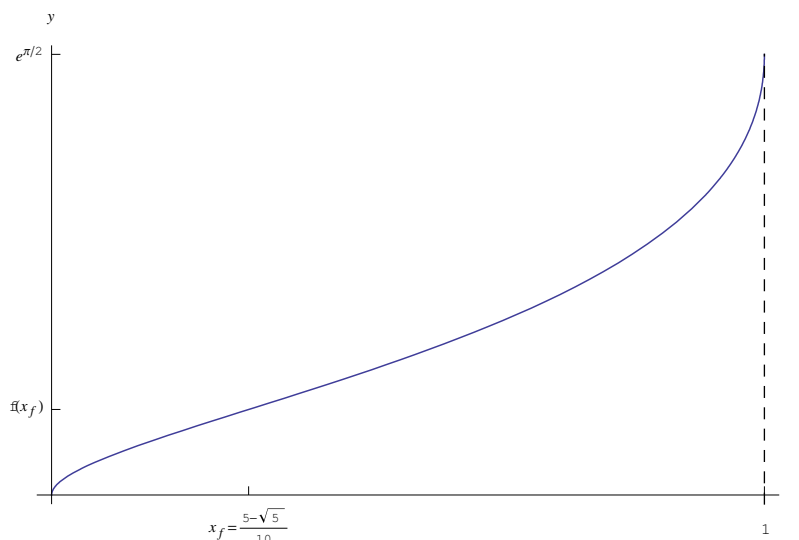


Figure 14: Grafico della funzione $f(x) = e^{\arcsin \sqrt{x}}$

Esercizio 727

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\arctan|x|} \quad (45)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = (-\infty, \infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\arctan x}, & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-\arctan x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (46)$$

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) = f(x)$, $\forall x$. Quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y .

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid e^{\arctan|x|} = 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione.

Inoltre:

$$f(0) = 1 \implies A(0, 1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, f(x) > 0$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione converge per $|x| \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{\pi/2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{\pi/2}$$

Quindi la retta $2y = \pi$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra.

Calcolo delle derivate

Calcoliamo solo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}, & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{e^{-\arctan x}}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$\forall x \in (0, +\infty), f'(x) > 0,$$

quindi la funzione è strettamente crescente in $(0, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Il punto $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Si osservi che la funzione non è derivabile in tale punto, ma lo è a sinistra e a destra:

$$f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) = 1$$

Quindi $x = 0$ è un punto angoloso. Le equazioni delle tangenti a destra e a sinistra sono:

$$y = x + 1$$

$$y = -x + 1$$

Concavità e punti di flesso.

Il grafico è concavo verso il basso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (15).

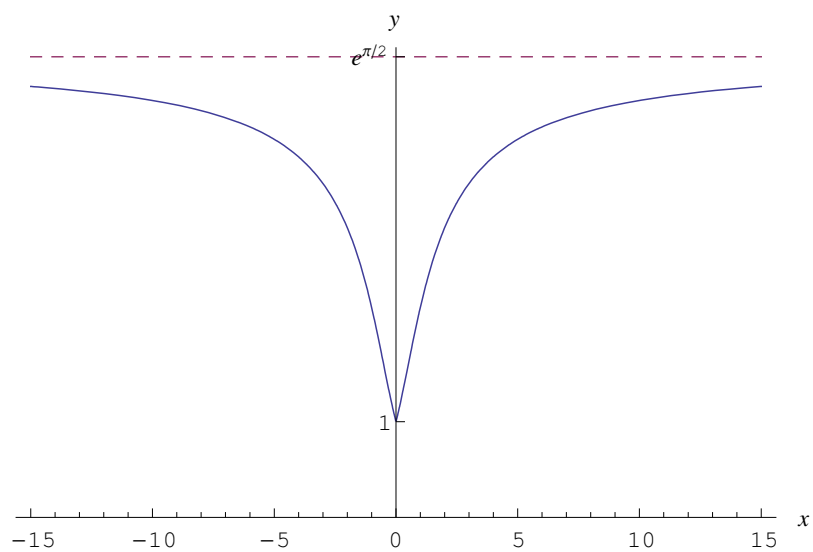


Figure 15: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 728

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right) + \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 1) + \frac{\pi}{2} \quad (47)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in X tale che:

$$\begin{cases} \ln^2 x + 1 > 0 \\ \ln x + 1 \neq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \end{cases}, \quad (48)$$

quindi:

$$X = \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \quad (49)$$

Intersezioni con gli assi

Per determinare le ascisse degli eventuali punti di intersezione con l'asse x andrebbe risolta l'equazione:

$$\arctan\left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right) + \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 1) + \frac{\pi}{2} = 0,$$

non risolvibile analiticamente, per cui tralasciamo l'intersezione con l'asse x . Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.

Studio del segno

Ci si ritrova nelle stesse condizioni per la determinazione dei punti di intersezione con l'asse x , per cui tralasciamo lo studio del segno.

Comportamento agli estremi

La funzione diverge positivamente in $x = 0$. Per dimostrare ciò, calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \arctan\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right) + (+\infty) + \frac{\pi}{2} \quad (50)$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x \left(1 + \frac{1}{\ln x}\right)} = 1$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Perciò l'asse y è asintoto verticale.

Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^-} f(x) = \arctan\left(\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^-} \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right) + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{2} \quad (51)$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^-} \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} = -\frac{2}{0^-} = +\infty$$

da cui:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^-} f(x) = \pi + \ln \sqrt{2} \quad (52)$$

Calcoliamo il limite destro:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} f(x) = \arctan \left(\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \right) + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{2}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} = -\frac{2}{0^+} = -\infty$$

da cui:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} f(x) = \ln \sqrt{2} \quad (53)$$

Dalle (52)-(53) segue che $x = e^{-1}$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto:

$$s \left(\frac{1}{e} \right) = -\pi \quad (54)$$

Studiamo il comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \ln(+\infty) = +\infty, \quad (55)$$

cioè la funzione diverge positivamente. Vediamo se il grafico è dotato di asintoto obliquo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= 0 + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln^2 x + 1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0, \end{aligned}$$

cioè γ è privo di asintoto obliquo.

Calcolo delle derivate

Poniamo:

$$f_1(x) = \arctan \left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \right), \quad f_2(x) = \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 1)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 f_1'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{(\ln x - 1)^2}{(\ln x + 1)^2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}(\ln x + 1) - \frac{1}{x}(\ln x - 1)}{(\ln x + 1)^2} \\
 &= \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)} \\
 f_2'(x) &= \frac{1 + \ln x}{x(\ln^2 x + 1)}
 \end{aligned}$$

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{\ln x + 1}{x(\ln^2 x + 1)}$$

La derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{\ln x (\ln^2 x + 2 \ln x + 3)}{x^2 (\ln^2 x + 1)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri di f' :

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e},$$

ma tale punto non appartiene a X .

Segno di f' :

$$f'(x) > 0 \iff \frac{\ln x + 1}{x} > 0 \iff x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right),$$

cosicché la funzione è strettamente crescente in $(\frac{1}{e}, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(0, \frac{1}{e})$. Il punto $x = \frac{1}{e}$ non è di estremo relativo poiché tale punto non appartiene a X .

Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^-} f'(x) = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} f'(x) = 0^+ \implies \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) = 0$$

Da ciò segue che γ arriva in $(\frac{1}{e}, \pi + \ln \sqrt{2})$ e parte da $(\frac{1}{e}, \ln \sqrt{2})$ con tangente orizzontale.

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \iff \frac{\ln x}{x^2} < 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right)$$

Quindi γ volge la concavità verso l'alto in $(0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, 1)$, mentre volge la concavità verso il basso in $(1, +\infty)$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (16).

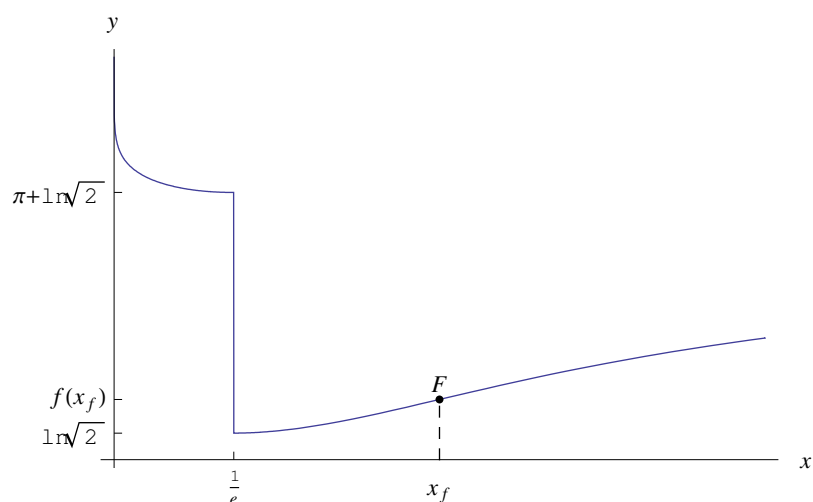


Figure 16: Grafico della funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right) + \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 1) + \frac{\pi}{2}$

Esercizio 729

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\arctan \frac{1+x}{1-|x|} - \frac{1}{2} \ln(1+|x|-x+x^2)} \quad (56)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in X tale che:

$$\begin{cases} 1 + |x| - x + x^2 > 0 \\ 1 - |x| \neq 0 \end{cases}, \quad (57)$$

Risolviamo la prima delle (57):

$$x \geq 0 \implies x^2 + 1 > 0, \quad \forall x$$

$$x < 0 \implies x^2 - 2x + 1 > 0 \iff (x - 1)^2 > 0 \implies x \neq 1$$

Cioè

$$1 + |x| - x + x^2 > 0 \iff x \in (-\infty, +\infty)$$

La seconda:

$$1 - |x| \neq 0 \iff x \neq \pm 1$$

quindi:

$$X = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) \quad (58)$$

Intersezioni con gli assi

$$\begin{aligned} \forall x \in X, f(x) &> 0 \\ f(0) &= e^{\pi/4} \end{aligned}$$

Studio del segno

Il grafico γ giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

Conviene distinguere i casi $x \geq 0$ e $x < 0$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\arctan \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}, & \text{se } x \in [0, 1) \cup (1, +\infty) \\ -\frac{e^{\pi/4}}{x-1}, & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \end{cases}$$

Per $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= e^{\arctan(+\infty) - \frac{1}{2} \ln 2} = \frac{e^{\pi/2}}{\sqrt{2}} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= e^{\arctan(-\infty) - \frac{1}{2} \ln 2} = \frac{e^{-\pi/2}}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

cioè $x = 1$ è un punto di discontinuità di prima specie con salto:

$$s(1) = -\frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-\pi/4} \cdot e^{-\infty} = 0^+,$$

Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a destra.

Per $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{e^{\pi/4}}{2},$$

cioè $x = -1$ è un punto di discontinuità eliminabile.

Comportamento per $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+,$$

Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.

Derivate

Per $x \geq 0$ poniamo:

$$f_1(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad f_2(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2),$$

donde:

$$f'(x) = f(x) [f_1'(x) - f_2'(x)]$$

Calcoliamo

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f_2'(x) = -\frac{x}{1+x^2}$$

La derivata prima è:

$$f'(x) = f(x) \frac{1-x}{1+x^2}$$

La derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(x) \frac{1-x}{1+x^2} + f(x) \frac{d}{dx} \frac{1-x}{1+x^2} \\ &= 2f(x) \frac{x(x-2)}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Per $x < 0$:

$$f'(x) = \frac{e^{\pi/4}}{(x-1)^2}$$

Non calcoliamo la derivata seconda nel caso $x < 0$, perché si vede immediatamente che γ volge la concavità verso l'alto per $x < 0$.

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Per $x \geq 0$ gli zeri di f' :

$$f'(x) = 0 \iff x = 1,$$

ma tale punto non appartiene a X .

Segno di f' :

$$f'(x) > 0 \iff x < 1,$$

cosicché la funzione è strettamente crescente in $(0, 1)$, ed è strettamente decrescente in $(1, +\infty)$. Il punto $x = 1$ non è di estremo relativo poiché tale punto non appartiene a X .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0$$

Da ciò segue che γ arriva in $\left(1, \frac{e^{\pi/2}}{\sqrt{2}}\right)$ e parte da $\left(1, \frac{e^{-\pi/2}}{\sqrt{2}}\right)$ con tangente orizzontale.

Concavità e punti di flesso.

Per $x \geq 0$ gli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x = 2$$

Segno:

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 2x > 0 \underset{x \geq 0}{\iff} x \in (2, +\infty)$$

Quindi per $x > 0$ γ volge la concavità verso l'alto in $(2, +\infty)$. Il punto $x = 2$ è un punto di flesso:

$$F \left(2, \frac{e^{\arctan 3}}{\sqrt{5}} \right)$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (17).

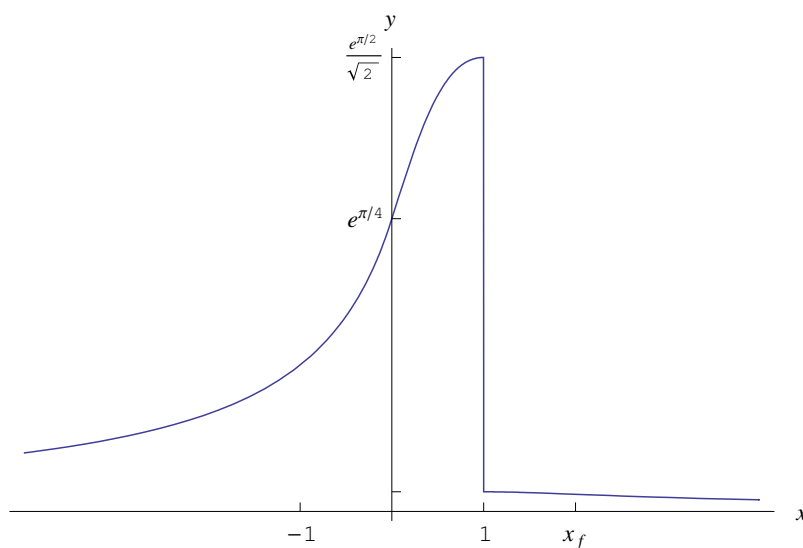


Figure 17: Grafico della funzione $f(x) = e^{\arctan \frac{1+x}{1-|x|} - \frac{1}{2} \ln(1+|x|-x+x^2)}$

Esercizio 730

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x} \quad (59)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Osserviamo che la funzione è manifestamente periodica di periodo 2π , quindi limitiamo all'intervallo $[0, 2\pi]$.

Deve essere: $\sin x \neq -\cos x$, cioè $x \neq \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$, quindi:

$$X = \left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right]$$

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$f(0) = 1 \implies A(0, 1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \sin x > -\cos x \quad (60)$$

La (60) può essere risolta per via grafica, come riportato in figura (18).

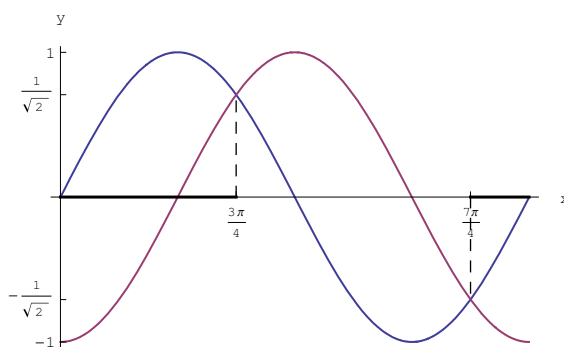


Figure 18: Ricerca delle soluzioni della disequazione $\sin x > -\cos x$

Quindi:

$$f(x) > 0 \iff x \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right] \quad (61)$$

Il grafico γ giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in [0, \frac{3}{4}\pi) \cup (\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$.

Derivate

Risulta

$$f'(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} \quad (62)$$

$$f''(x) = \frac{3 - \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^3}$$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{4}\pi)^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{4}\pi)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{7}{4}\pi)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{7}{4}\pi)^+} f(x) = +\infty$$

Quindi le rette $y = \frac{3}{4}\pi$ e $y = \frac{7}{4}\pi$ sono asintoti verticali.

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri di f' :

$$f'(x) = 0 \iff \sin x = \cos x \iff x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi,$$

Segno di f' :

$$f'(x) > 0 \iff \sin x > \cos x,$$

che può essere risolta per via grafica, come riportato in figura (19).

Quindi:

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right)$$

La funzione è strettamente crescente in $(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi)$. I punti $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5}{4}\pi$ sono rispettivamente di minimo e massimo relativi:

$$m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), M\left(\frac{5}{4}\pi, -\frac{1}{2}\right)$$

Concavità e punti di flesso.

Non occorre studiare la derivata seconda, poichè dalla monotonia e dagli asintoti vediamo che γ volge la concavità verso l'alto in $[0, \frac{3}{4}\pi) \cup (\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$, mentre volge la concavità verso il basso in $(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (20).

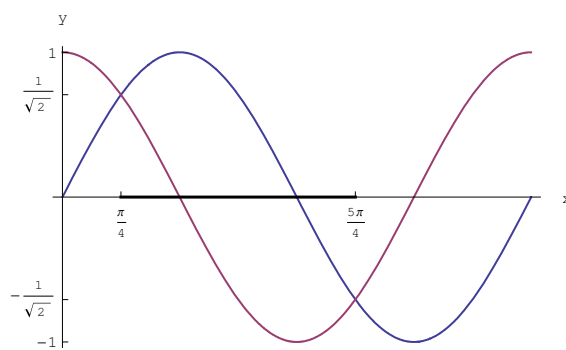


Figure 19: Ricerca delle soluzioni della disequazione $\sin x > \cos x$

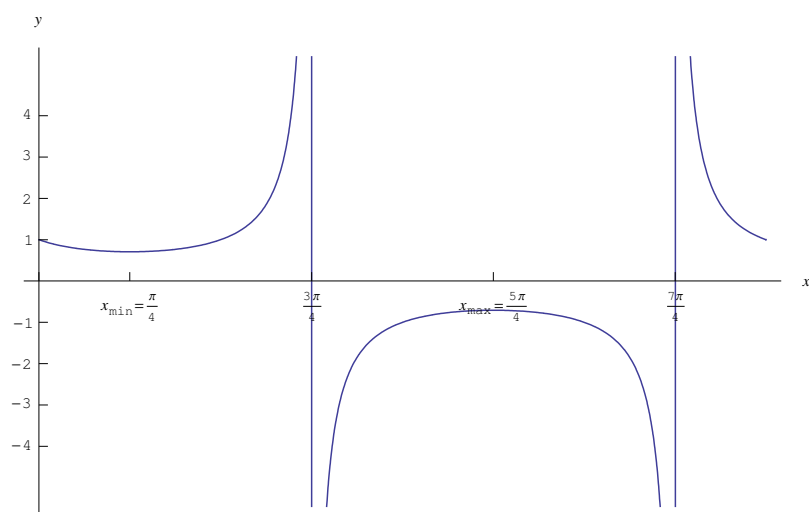


Figure 20: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$

Esercizio 731

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}} \quad (63)$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita per ogni $x \neq -1$, quindi $X = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$f(0) = \frac{1}{e} \implies A\left(0, \frac{1}{e}\right) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, f(x) > 0 \quad (64)$$

Quindi il grafico γ giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0^+$$

Quindi la retta $x = -1$ è asintoto verticale a sinistra.

Derivate

Risulta

$$f'(x) = \frac{2f(x)}{(x+1)^2} \quad (65)$$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \frac{f'(x)(x+1) - 2f(x)(x+1)}{(x+1)^3} \\ &= 2 \frac{\frac{2f(x)}{(x+1)^2}(x+1) - 2f(x)}{(x+1)^2} \\ &= -4 \frac{xf(x)}{(x+1)^4} \end{aligned} \quad (66)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$\forall x \in X, f'(x) > 0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in X . Determiniamo il comportamento della derivata in un intorno destro della singolarità $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^{\frac{x-1}{x+1}}}{(x+1)^2} = 0$$

Concavità e punti di flesso.

Zeri della f'' :

$$f''(x) = 0 \iff x = 0$$

Studio del segno di f'' :

$$f''(x) > 0 \iff x < 0$$

Da ciò segue che γ volge la concavità verso l'alto in $(-\infty, 0)$, e volge la concavità verso il basso in $(0, +\infty)$. Il punto $x = 0$ è un punto di flesso:

$$F\left(0, \frac{1}{e}\right)$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (21).

Esercizio 733

Studiare la funzione

$$f(x) = 6 \sin x - \ln \left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} \right) \quad (67)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Osserviamo che la funzione è periodica di periodo 2π . Infatti $6 \sin x$ ha periodo 2π , poi $\ln \left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} \right)$ è periodica di periodo 2π , in quanto è data dalla somma di $\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}$ che ha periodo π e di $\sin x$, per cui $\ln \left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} \right)$ ha periodo 2π . Quindi limitiamo lo studio della funzione all'intervallo $[0, 2\pi]$. Deve essere:

$$\sin x + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} > 0 \iff \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} > -\sin x \quad (68)$$

Poniamo $t = \sin x$, donde la (68) equivale a:

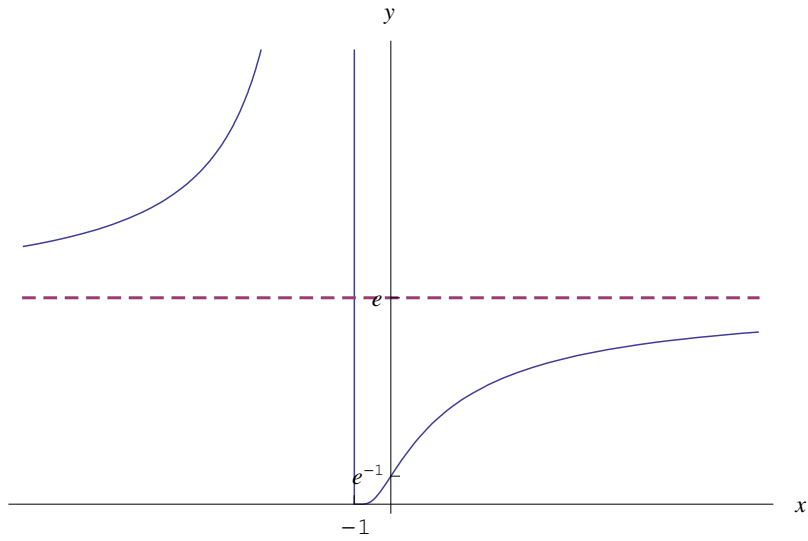


Figure 21: Grafico della funzione $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$

$$\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} > -t \quad (69)$$

Dobbiamo distinguere i due casi: 1) $-t \geq 0$, 2) $-t < 0$.

Nel caso 1 abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} t^2 - \frac{1}{4} > t^2 \\ t \leq 0 \end{cases} \quad (70)$$

Sia $S_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ verifica il sistema (70)}\}$. È evidente che $S_1 = \emptyset$, poichè la prima disequazione è equivalente alla disuguaglianza assurda $-\frac{1}{4} > 0$.

Nel caso 2 abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} t^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \quad (71)$$

Qui è $S_2 = [\frac{1}{2}, +\infty)$. Perciò detto $S = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ verifica la disequazione 69}\}$, risulta:

$$S = S_1 \cup S_2 = S_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Ripristinando la variabile x , otteniamo:

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \iff x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$$

Perciò l'insieme di definizione è:

$$X = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \right]$$

Intersezioni con gli assi

Tralasciamo l'intersezione con l'asse x .

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y,$$

essendo γ il grafico della funzione.

Risulta poi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 3 - \ln \frac{1}{2} = 3 + \ln 2 \\ f\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= 3 + \ln 2 \end{aligned}$$

Derivate

Derivata prima:

$$f'(x) = 6 \cos x - \frac{1}{\sin x + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}} \left(\cos x + \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}} \right),$$

cioè:

$$f'(x) = \frac{\cos x \left(6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - 1 \right)}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}} \quad (72)$$

Per semplificare il calcolo della derivata seconda, scriviamo:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}},$$

essendo:

$$g(x) \stackrel{def}{=} \cos x \left(6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - 1 \right) \quad (73)$$

per cui:

$$f''(x) = \frac{g'(x) \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - g(x) \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}}}{(\sin^2 x - \frac{1}{4})^2}$$

Calcoliamo $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\sin x \left(6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - 1 \right) + \cos x \frac{6 \sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}} \\
&= -6 \sin x \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} + \sin x + 6 \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}} \left[-6 \sin x \left(\sin^2 x - \frac{1}{4} \right) + \sin x \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} + 6 \sin x \cos^2 x \right] \\
&= \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}} \left(-6 \sin^2 x + \frac{3}{2} + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} + 6 \cos^2 x \right)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{\sin^2 x - \frac{1}{4}} \times \\
&\quad \left[\sin x \left(-6 \sin^2 x + \frac{3}{2} + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} + 6 \cos^2 x \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin x \cos^2 x \left(6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - 1 \right)}{\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3}} \times \left[\sin x \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} \right. \\
&\quad \times \left(-6 \sin^2 x + \frac{3}{2} + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} + 6 \cos^2 x \right) \\
&\quad \left. - \sin x \cos^2 x \left(6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3}} \times \left[-6 \sin^3 x \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \sin x \sqrt{\sin^3 x - \frac{1}{4}} + \sin x \left(\sin^2 x - \frac{1}{4} \right) + \sin x \cos^2 x \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3}} \left[2\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} (1 - 4 \sin^2 x) + 1 \right]
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$f''(x) = -\frac{3 \sin x}{4} \frac{8 \sqrt{(\sin^2 x - \frac{1}{4})^3 - 1}}{\sqrt{(\sin^2 x - \frac{1}{4})^3}} \quad (74)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della f' :

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} 6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \xrightarrow{x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]} \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{10}}{6} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Quindi i punti estremali:

$$x = \alpha, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi - \alpha,$$

essendo $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{10}}{6}$. Si noti che $\alpha \gtrsim \frac{\pi}{6}$.

Segno della derivata:

$$f'(x) > 0 \iff \begin{cases} \cos x \left(6\sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}} - 1 \right) > 0 \\ x \in X \end{cases} \implies \begin{cases} \sin x > \frac{\sqrt{10}}{6} \\ x \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases},$$

cioè:

$$x \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\pi - \alpha, \frac{5\pi}{6} \right)$$

Cioè la funzione è strettamente crescente in $(\alpha, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi - \alpha, \frac{5\pi}{6})$, ed è strettamente decrescente in $(\frac{\pi}{6}, \alpha) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi - \alpha)$. Quindi:

$$\begin{aligned} x = \alpha, \pi - \alpha \text{ sono punti di minimo} \\ x = \frac{\pi}{2} \text{ è punto di massimo} \end{aligned}$$

$$m_1 \left(\alpha, \sqrt{10} + \ln \frac{6}{1 + \sqrt{10}} \right), M \left(\frac{\pi}{2}, 6 + \ln \frac{2}{2 + \sqrt{3}} \right), m_2 \left(\pi - \alpha, \sqrt{10} + \ln \frac{6}{1 + \sqrt{10}} \right)$$

Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{6}^-} f'(x) = +\infty$$

Cioè il grafico parte da $A \left(\frac{\pi}{6}, f \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$ con tangente verticale verso il basso, e giunge in $B \left(\frac{5\pi}{6}, f \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right)$ con tangente verticale verso l'alto.

Concavità e punti di flesso.

Zeri della f'' :

$$f''(x) = 0 \iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ 8\sqrt{(\sin^2 x - \frac{1}{4})^3} = 1 \end{cases} \xrightarrow{\sin x > 0} 8\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4} \right)^3} = 1$$

Cioè:

$$\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \iff \sin^2 x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\sin x > 0} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi, gli zeri di f'' :

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

Studio del segno di f'' :

$$f''(x) > 0 \iff \sin x \left[8\sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^3} - 1 \right] < 0 \iff \sin x > \frac{1}{2}$$
$$\xrightarrow{x \in X} x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right)$$

Da ciò segue che γ volge la concavità verso l'alto in $(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$, e volge la concavità verso il basso in $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi)$. Esistono due punti di flesso:

$$F_1 \left(\frac{\pi}{4}, 3\sqrt{2} + \ln \frac{2}{1 + \sqrt{2}}\right), F_2 \left(\frac{3}{4}\pi, 3\sqrt{2} + \ln \frac{2}{1 + \sqrt{2}}\right)$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (22).

Esercizio 734

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{2} + \arctan x \tag{75}$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$

Intersezioni con gli assi

Tralasciamo l'intersezione con l'asse x .

Inoltre:

$$f(0) = 0 \implies (0, 0) \in \gamma,$$

essendo γ il grafico della funzione.

Comportamento agli estremi

La funzione diverge all'infinito:

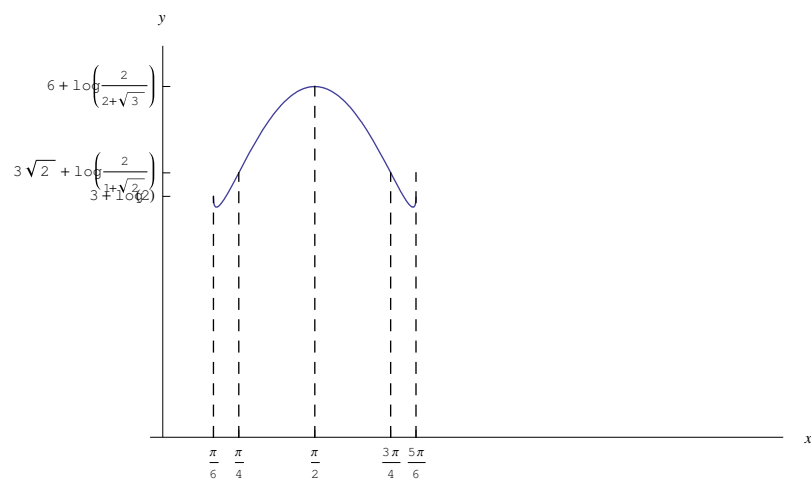


Figure 22: Grafico della funzione $f(x) = 6 \sin x - \ln\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{4}}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Eventuali asintoti obliqui:

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\arctan x}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

quindi la retta

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$$

è asintoto obliquo a destra.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - m_2 x] = -\frac{\pi}{2},$$

quindi la retta

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$$

è asintoto obliquo a sinistra. Osserviamo che i due asintoti sono rette parallele.

Derivate

$$f'(x) = \frac{x^2 + 3}{2(x^2 + 1)} \tag{76}$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$\forall x \in X, f'(x) > 0,$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X .

Concavità e punti di flesso.

Zeri della f'' :

$$f''(x) = 0 \iff x = 0$$

Studio del segno di f'' :

$$f''(x) > 0 \iff x < 0$$

Da ciò segue che γ volge la concavità verso l'alto in $(-\infty, 0)$, e volge la concavità verso il basso in $(0, +\infty)$. Abbiamo il punto di flesso $F(0, 0)$.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (23).

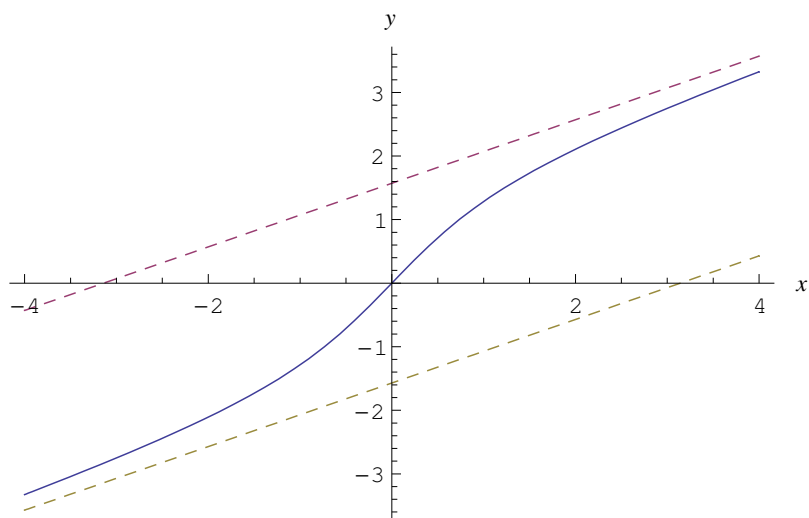


Figure 23: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{2} + \arctan x$

Esercizio 735

Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin \frac{e^x}{3 - e^x} + \ln \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) + \frac{3}{5}x \tag{77}$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in X tale che;

$$\begin{cases} \left| \frac{e^x}{3 - e^x} \right| \leq 1 \\ \frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} > 0 \end{cases} \tag{78}$$

Iniziamo a risolvere la prima delle (78), che è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \frac{e^x}{3-e^x} \leq 1 \\ \frac{e^x}{3-e^x} \geq -1 \end{cases} \quad (79)$$

La prima delle (79):

$$\frac{2e^x - 3}{3 - e^x} \leq 0 \iff x \in \left(-\infty, \ln \frac{3}{2}\right] \cup (\ln 3, +\infty)$$

La seconda delle (79):

$$\frac{3}{3 - e^x} \geq 0 \iff e^x - 3 < 0 \iff x \in (-\infty, \ln 3)$$

Quindi la prima delle (78) è verificata per:

$$x \in X_1 = x \in (-\infty, \ln 3) \cup (\ln 3, +\infty) \quad (80)$$

Passiamo alla seconda delle (78):

$$\frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} > 0$$

Il segno del numeratore:

$$\begin{aligned} 3 + \sqrt{9 - 6e^x} > 0 &\iff \sqrt{9 - 6e^x} > -3 \iff 9 - 6e^x \geq 0 \\ &\iff x \in \left(-\infty, \ln \frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

Il segno denominatore

$$\begin{aligned} 3 - \sqrt{9 - 6e^x} > 0 &\iff \sqrt{9 - 6e^x} < 3 \\ &\iff \begin{cases} 9 - 6e^x \geq 0 \\ e^x > 0 \end{cases} \iff 9 - 6e^x \geq 0 \\ &\iff x \in \left(-\infty, \ln \frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} > 0 \iff x \in X_2 = \left(-\infty, \ln \frac{3}{2}\right]$$

Questo risultato era prevedibile poichè per $x \leq \ln \frac{3}{2}$ è garantita la realtà di $\sqrt{9 - 6e^x}$ ed essendo non negativa, implica che $3 + \sqrt{9 - 6e^x}$. Inoltre per $x \leq \ln \frac{3}{2}$ è $\sqrt{9 - 6e^x} < 3$, per cui il denominatore è sempre maggiore di zero.

L'insieme di definizione è:

$$X = X_1 \cap X_2 = \left(-\infty, \ln \frac{3}{2}\right]$$

Intersezioni con gli assi

Tralasciamo l'intersezione con l'asse x .

Inoltre:

$$f(0) = \frac{\pi}{6} + \ln \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \right) \implies A \left(0, \frac{\pi}{6} + \ln \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \right) \right) \in \gamma \cap y,$$

essendo γ il grafico della funzione.

Comportamento agli estremi

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{3 - e^x} = 0 &\implies \lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin \frac{e^x}{3 - e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) &= +\infty, \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty - \infty$$

Per rimuovere la forma indeterminata scriviamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) + \frac{3}{5}x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) + \ln e^{\frac{3}{5}x} \right] \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{3}{5}x} \cdot \frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{3}{5}x} \cdot \frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \cdot \frac{3 - \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^{\frac{3}{5}x} \cdot \frac{(3 + \sqrt{9 - 6e^x})^2}{6e^x} \right] \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{6} e^{-\frac{2}{5}x} \cdot (3 + \sqrt{9 - 6e^x})^2 \right] \\ &= \ln \left[\frac{1}{6} \cdot (+\infty) \cdot (3 + 0)^2 \right] = +\infty, \end{aligned}$$

per cui la funzione diverge negativamente per $x \rightarrow -\infty$.

Eventuali asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$$

perciò calcoliamo la derivata prima.

Derivate

Poniamo:

$$f_1(x) = \arcsin \frac{e^x}{3 - e^x}, \quad f_2(x) = \ln \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) + \frac{3}{5}x \quad (81)$$

cosicchè:

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) \quad (82)$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{e^{2x}}{(3-e^x)^2}}} \cdot \frac{e^x(3-e^x) + e^{2x}}{(3-e^x)^2} \\ &= \frac{3e^x}{(3-e^x)\sqrt{9-6e^x}} \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{3}{5} + \\ &+ \frac{3 - \sqrt{9 - 6e^x}}{3 + \sqrt{9 - 6e^x}} \cdot \frac{\frac{-3e^x}{\sqrt{9-6e^x}} \cdot (3 - \sqrt{9 - 6e^x}) - \frac{3e^x}{\sqrt{9-6e^x}} \cdot (3 + \sqrt{9 - 6e^x})}{(3 - \sqrt{9 - 6e^x})^2} \\ &= \frac{3}{5} + \frac{\frac{-3e^x}{\sqrt{9-6e^x}} (3 - \sqrt{9 - 6e^x} + 3\sqrt{9 - 6e^x})}{6e^x} \\ &= \frac{3}{5} - \frac{3}{\sqrt{9 - 6e^x}} \end{aligned} \quad (84)$$

Finalmente:

$$f'(x) = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{9 - 6e^x}}{3 - e^x} \quad (85)$$

Passiamo alla derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{9 - 6e^x}}{3 - e^x} \\ &= -\frac{-e^x(9 - 3e^x) + e^x(9 - 6e^x)}{(3 - e^x)^2 \sqrt{9 - 6e^x}} \end{aligned}$$

Semplificando:

$$f''(x) = \frac{3e^{2x}}{(3 - e^x)\sqrt{9 - 6e^x}} \quad (86)$$

Asintoti obliqui:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{9-0}}{3-0} = -\frac{2}{5} \\
n &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) + x \right] = \infty - \infty \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) + \ln e^x \right] \\
&= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) \\
&= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{3 + \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \cdot \frac{3 - \sqrt{9 - 6e^x}}{3 - \sqrt{9 - 6e^x}} \right) \\
&= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^x \cdot \frac{(3 + \sqrt{9 - 6e^x})^2}{6e^x} \right] \\
&= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3 + \sqrt{9 - 6e^x})^2}{6} = \ln \frac{(3 + 3)^2}{6} = \ln 6
\end{aligned}$$

Quindi il grafico è dotato di asintoto obliquo che è la retta di equazione:

$$y = -\frac{2}{5}x + \ln 6$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri di f'

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff \frac{\sqrt{9 - 6e^x}}{3 - e^x} = \frac{3}{5} \\
&\iff 9e^{2x} + 96e^x - 144 = 0 \\
&\iff e^x = \frac{4}{3} \quad (\text{l'altra soluzione non accettabile, in quanto } < 0) \\
&\iff x = \ln \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Segno:

$$\begin{aligned} \forall f'(x) > 0 &\iff \sqrt{9 - 6e^x} < \frac{3}{5}(3 - e^x) \\ &\iff \begin{cases} 3 - e^x > 0 \\ 9 - 6e^x \geq 0 \\ 9 - 6e^x < \frac{9}{25}(3 - e^x)^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x < \ln 3 \\ x \in X \\ 9e^{2x} + 96e^x - 144 > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x < \ln 3 \\ x \in X \\ x > \ln \frac{4}{3} \end{cases} \iff x \in \left(\ln \frac{4}{3}, \ln \frac{3}{2} \right), \end{aligned}$$

per cui la funzione è strettamente crescente in $(\ln \frac{4}{3}, \ln \frac{3}{2})$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, \ln \frac{4}{3})$. Il punto $x = \ln \frac{4}{3}$ è di minimo relativo, anzi assoluto:

$$m \left(\ln \frac{4}{3}, \arcsin \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \ln \frac{4}{3} + \ln 2 \right)$$

Concavità e punti di flesso.

Studio del segno di f'' :

$$f''(x) > 0, \forall x \in X$$

Da ciò segue che γ volge sempre la concavità verso l'alto.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (24).

Esercizio 737

Studiare la funzione

$$f(x) = x + \ln \cosh x - 2 \tanh x + 1 \tag{87}$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$ poichè l'argomento del logaritmo è sempre maggiore di zero.

Intersezioni con gli assi

Tralasciamo l'intersezione con l'asse x , perchè c'è un'equazione che va risolta numericamente o per via grafica.

Intersezione con l'asse y

$$f(0) = \ln \cosh 0 + 1 = 1$$

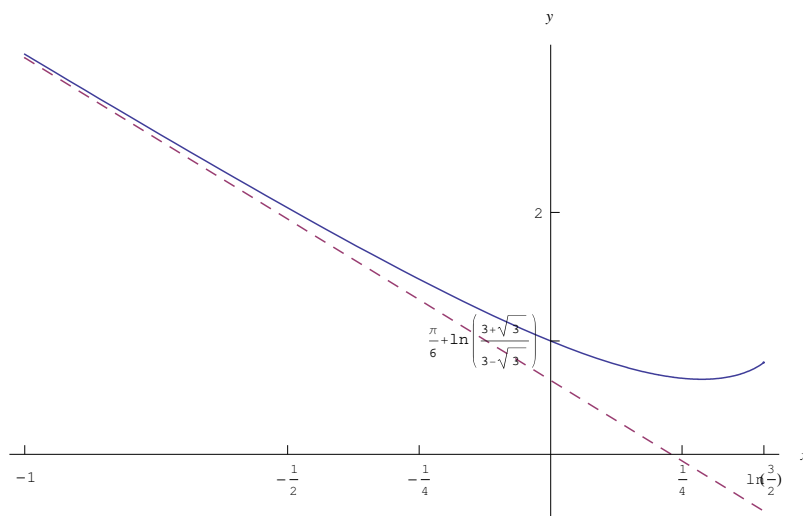


Figure 24: Grafico della funzione $f(x) = \arcsin \frac{e^x}{3-e^x} + \ln \left(\frac{3+\sqrt{9-6e^x}}{3-\sqrt{9-6e^x}} \right) + \frac{3}{5}x$

Quindi:

$$A(0, 1) \in \gamma \cap y$$

essendo γ il grafico della funzione.

Comportamento agli estremi

Ricordiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cosh x = +\infty$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) + (+\infty) - 2 + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty) + (+\infty) + 2^- + 1 = \infty - \infty$$

Per rimuovere tale forma indeterminata, procediamo in questo modo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3^- + l,$$

essendo:

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln \cosh x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln e^x + \ln \cosh x) \\
 &= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cosh x \\
 &= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 &= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + 1}{2} = \ln \left(\frac{1}{2} \right)^+ = (-\ln 2)^+ = -(\ln 2)^-
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3^- - (\ln 2)^- = (3 - \ln 2)^-,$$

perciò la retta $y = 3 - \ln 2$ è asintoto orizzontale a sinistra. Per verificare l'esistenza di un asintoto obliquo a destra, calcoliamo:

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln \cosh x}{x} - 2 \frac{\tanh x}{x} + \frac{1}{x} \right) \\
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \cosh x}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tanh x}{x}
 \end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \cosh x}{x} &= \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1 \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tanh x}{x} &= \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\cosh^2 x} = 0,
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$m = 2 \tag{88}$$

L'ordinata all'origine:

$$\begin{aligned}
 n &= n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \ln \cosh x - 2 \tanh x + 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^{-x} + \ln \cosh x) - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\cosh x}{e^x} \right) - 1
 \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\cosh x}{e^x} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (1 + e^{2x})}{2e^x} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

Finalmente:

$$n = -(1 + \ln 2)$$

Perciò la retta di equazione:

$$y = 2x - (1 + \ln 2), \quad (89)$$

è asintoto obliquo a destra.

Derivate

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \tanh^2 x + \tanh x - 1 \\ f''(x) &= (1 - \tanh^2 x)(4 \tanh x + 1) \end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri di f'

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \tanh^2 x + \tanh x - 1 = 0 \\ &\iff \begin{cases} \tanh x = -1 \\ \tanh x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$\tanh x = -1$ è inaccettabile poichè $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$, e $\forall x, \tanh x > -1$, quindi:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \\ e^{2x} = 3 &\implies x = \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

Segno:

$$f'(x) > 0 \iff \tanh x > \frac{1}{2} \iff x > \frac{1}{2} \ln 3$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $(\frac{1}{2} \ln 3, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(-\infty, \frac{1}{2} \ln 3)$. Il punto $x = \frac{1}{2} \ln 3$ è pertanto di minimo relativo.

Concavità e punti di flesso.

Zeri di f'' :

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff \tanh x = -\frac{1}{4} \\ &\iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -\frac{1}{4} \iff x = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Studio del segno di f'' :

$$f''(x) > 0 \iff \tanh x > -\frac{1}{4} \iff x > \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$$

Da ciò segue che γ volge la concavità verso l'alto in $(\frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}, +\infty)$. Il punto $x_f = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}$ è di flesso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato nelle figure (25)-(26).

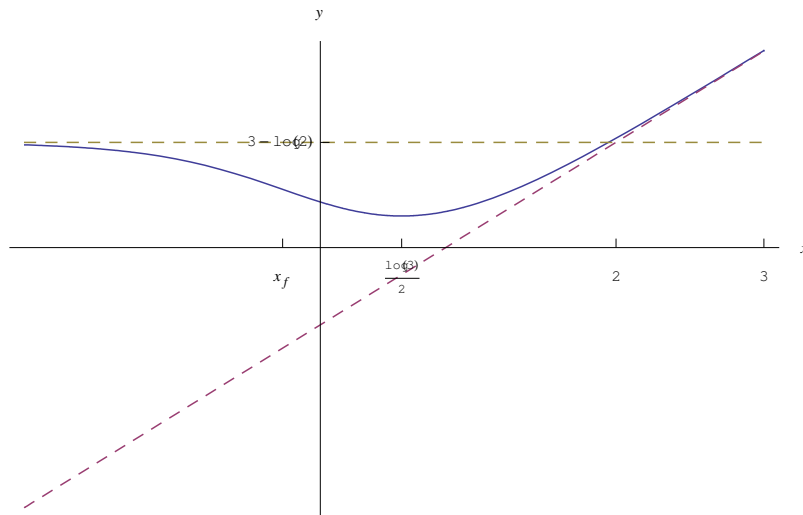


Figure 25: Grafico della funzione $f(x) = x + \ln \cosh x - 2 \tanh x + 1$

Esercizio 738

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (90)$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in X tale che:

$$\begin{cases} |x| \leq 1 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \iff x \in (-1, 1),$$

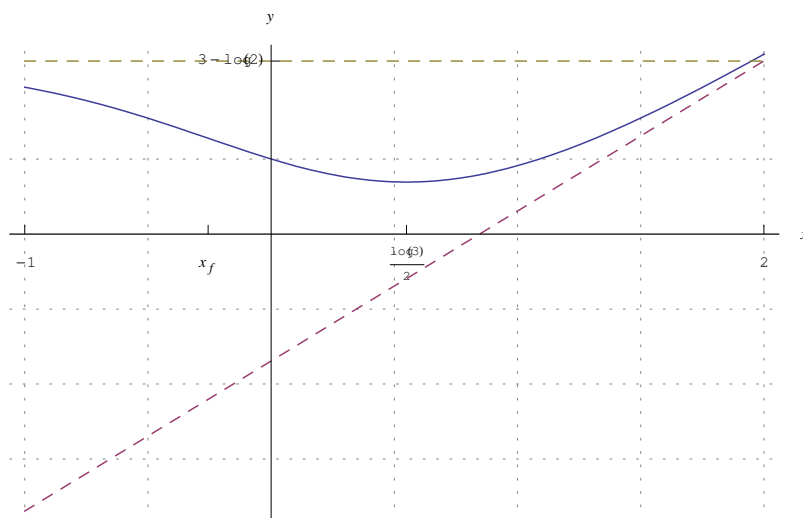


Figure 26: Grafico particolareggiato della funzione $f(x) = x + \ln \cosh x - 2 \tanh x + 1$

per cui $X = (-1, 1)$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \arcsin x = 0 \iff x = 0 \implies (0, 0) \in \gamma$$

Segno

$$f(x) > 0 \iff x \in (0, 1)$$

Quindi il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (0, 1)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (-1, 0)$.

Comportamento agli estremi

Ricordiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2} = +\infty$$

cosicchè le rette $y = \pm 1$ sono asintoti verticali.

Derivate

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{3x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + 2x^2 \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Osserviamo che $\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x > 0, \forall x \in X$, e analogo comportamento per il denominatore $(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$, quindi è $f'(x) > 0$ per ogni x . Segue che la funzione è strettamente crescente.

Segno:

$$f'(x) > 0 \iff \tanh x > \frac{1}{2} \iff x > \frac{1}{2} \ln 3$$

Concavità e punti di flesso.

Tralasciamo lo studio della derivata seconda, poichè si intuisce che γ volge la concavità verso l'alto in $(0, 1)$. Il punto $x = 0$ è punto di flesso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (27).

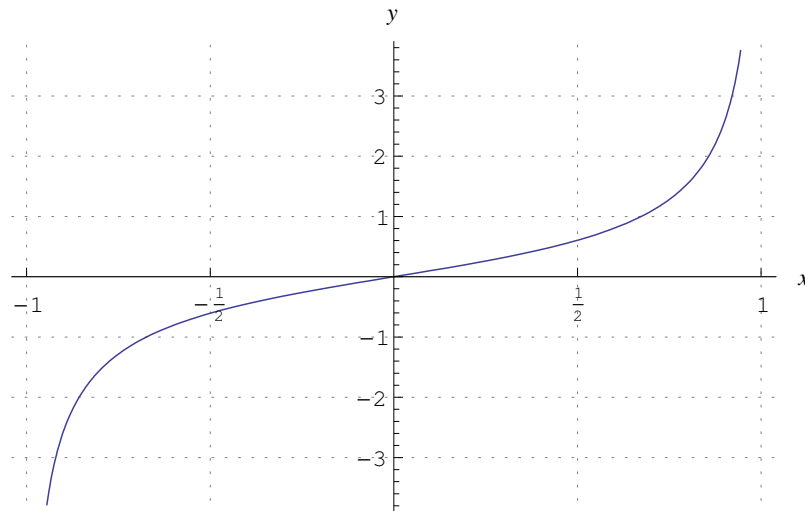


Figure 27: Grafico della funzione $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Esercizio 740

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\cosh x} e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}} \quad (91)$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita per ogni $x \neq 0$, quindi $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X, f(x) > 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x,$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Segno

Per quanto visto la funzione è sempre positiva, per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 \cdot e^{\arctan(+\infty)} = e^{\pi/2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 1 \cdot e^{\arctan(-\infty)} = e^{-\pi/2}, \end{aligned}$$

cosicché $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto

$$s(0) = e^{\pi/2} - e^{-\pi/2} = 2 \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Comportamento all'infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{e^{\arctan 0^+}}{+\infty} = \frac{1^+}{+\infty} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \frac{e^{\arctan 0^-}}{-\infty} = \frac{1^-}{-\infty} = 0^+, \end{aligned}$$

per cui l'asse x è asintoto orizzontale. cosicché le rette $y = \pm 1$ sono asintoti verticali.

Derivate

Derivata prima:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}}}{\cosh x} \right) & (92) \\
&= \frac{e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}} \cdot \left[\frac{\sinh^2 x}{\sinh^2 x + 1} \cdot \left(-\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} \right) \right] \cosh x - \sinh x \cdot e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}}}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{-e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}} - \sinh x \cdot e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}}}{\cosh^2 x} \\
&= -f(x) \frac{1 + \sinh x}{\cosh x}
\end{aligned}$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = -f'(x) \frac{1 + \sinh x}{\cosh x} - f(x) \frac{d}{dx} \frac{1 + \sinh x}{\cosh x}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \frac{1 + \sinh x}{\cosh x} &= \frac{\cosh^2 x - \sinh x (1 + \sinh x)}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{1 - \sinh x}{\cosh^2 x},
\end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= f(x) \frac{(1 + \sinh x)}{\cosh^2 x} - f(x) \frac{1 - \sinh x}{\cosh^2 x} \\
&= f(x) \frac{3 + \sinh x}{\cosh^2 x} \sinh x
\end{aligned}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della f' :

$$f'(x) = 0 \iff \sinh x = -1 \iff e^x - e^{-x} = 2$$

Poniamo $e^x = t$:

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \iff t = -1 \pm \sqrt{2}$$

Scartando la soluzione < 0 :

$$t = \sqrt{2} - 1 \implies x = \ln(\sqrt{2} - 1)$$

Studio del segno:

$$f'(x) > 0 \iff \sinh x < -1 \iff x < \ln(\sqrt{2} - 1)$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, \ln(\sqrt{2}-1))$ ed è strettamente decrescente in $(\ln(\sqrt{2}-1), +\infty) - \{0\}$. Il punto $x = \ln(\sqrt{2}-1)$ è di massimo relativo:

$$M \left(\ln(\sqrt{2}-1), \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2} e^{-\pi/4} \right)$$

Concavità e punti di flesso.

Zeri di f' :

$$f'(x) = 0 \iff \sinh x (3 + \sinh x) = 0 \underset{x \neq 0}{\iff} \sinh x = -3 \iff e^x - e^{-x} = -6$$

Poniamo $t = e^x$:

$$t^2 + 6t - 1 = 0 \implies t = -3 \pm \sqrt{10}$$

Scartando la radice < 0 :

$$e^x = \sqrt{10} - 3 \implies x = \ln(\sqrt{10} - 3)$$

Segno della f'' :

$$f''(x) > 0 \iff \sinh x (3 + \sinh x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (\ln(\sqrt{10} - 3), +\infty)$$

Quindi γ è concavo in $(-\infty, 0) \cup (\ln(\sqrt{10} - 3), +\infty)$. Il punto $x_f = \ln(\sqrt{10} - 3)$ è di flesso.

$$F \left(\ln(\sqrt{10} - 3), \frac{(3 - \sqrt{10})}{3\sqrt{10} - 10} e^{\arctan \frac{1}{3}} \right)$$

Determiniamo infine il comportamento della derivata prima in un intorno di $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= - \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sinh x}{\cosh x} \right] = -e^{\pi/2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= - \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sinh x}{\cosh x} \right] = -e^{-\pi/2} \end{aligned}$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (28).

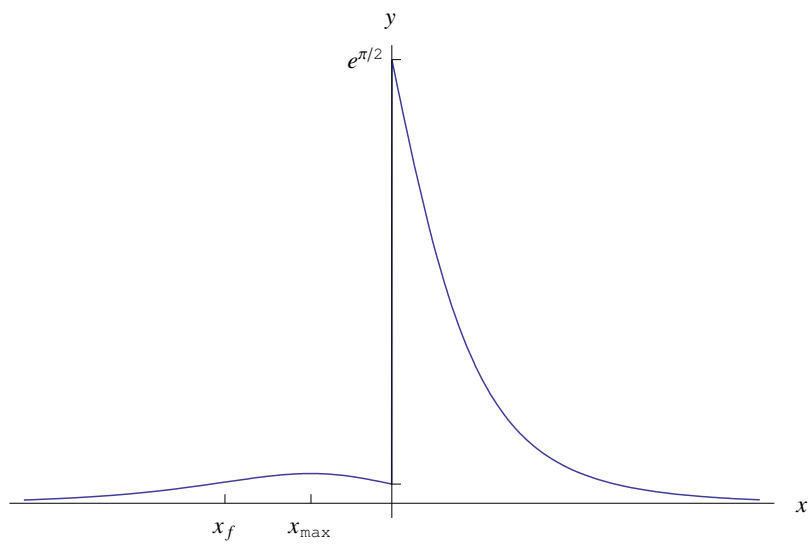


Figure 28: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\cosh x} e^{\arctan \frac{1}{\sinh x}}$