

Esercizio 691

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studio della funzione:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x \quad (1)$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x = 0 \quad (2)$$

Per risolvere tale equazione poniamo:

$$t = \ln x \quad (3)$$

Quindi:

$$\frac{t^2}{2} - t = 0 \iff t \left(\frac{t}{2} - 1 \right) = 0 \iff t = 0, t = 2 \quad (4)$$

Ripristinando la variabile x :

$$\begin{aligned} t = 0 &\implies \ln x = 0 \implies x = 1 \\ t = 2 &\implies \ln x = 2 \implies x = e^2 \end{aligned}$$

Perciò:

$$A(1, 0), B(e^2, 0) \in \gamma \cap x \quad (5)$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x > 0 \quad (6)$$

Eseguendo nuovamente il cambio (3):

$$\frac{t^2}{2} - t > 0 \iff t < 0, t > 2$$

che corrispondono a

$$\begin{aligned}\ln x < 0 &\iff x \in (0, 1) \\ \ln x > 2 &\iff x \in (2, +\infty),\end{aligned}\tag{7}$$

ciò implica:

$$f(x) > 0 \iff x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (1, 2)$.

Comportamento agli estremi

Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln^2 x}{2} - \ln x \right) = \infty - \infty\tag{8}$$

Poniamo: $t = \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{t^2}{2} - t \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} \right) = +\infty,$$

quindi l'asse y è asintoto verticale.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^2}{2} - t \right) = +\infty,$$

Esaminiamo la presenza di eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned}m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{2x} - \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x},\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

perciò:

$$m = 0 \implies \nexists \text{ asintoti obliqui}$$

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\ln x - 1}{x} \\ f''(x) &= \frac{2 - \ln x}{x^2}\end{aligned}\tag{9}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Calcoliamo gli zeri di $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$$

pertanto $x = e$ è un punto estremo.

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{\ln x - 1}{x} > 0 \iff x \in (e, +\infty),$$

per cui la funzione è strettamente crescente in $(e, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0, e)$. Quindi $x = e$ è punto di minimo relativo per f . Ed è anche punto di minimo assoluto:

$$m\left(e, -\frac{1}{2}\right)$$

Studio della derivata seconda

Determiniamo gli zeri di $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \iff \ln x = 2 \iff x = e^2$$

Il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff \ln x < 2 \iff x \in (0, e^2),$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $(0, e^2)$ e concavo verso il basso in $(e^2, +\infty)$. Perciò $x = e^2$ è punto di flesso. Notiamo che tale punto è uno zero di $f(x)$, quindi il flesso è il punto B (eq. 5).

Il grafico completo è riportato in figura (1).

Esercizio 698

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln x - \arctan x \tag{10}$$

Soluzione

Insieme di definizione

Per la presenza del logaritmo la funzione è definita per $x > 0$, quindi $X = (0, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \ln x = \arctan x \tag{11}$$

La (11) va risolta per grafica o numerica, ottenendo la radice $\alpha \simeq 3.69$. Quindi $A(\alpha, 0) \in \gamma \cap x$, essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

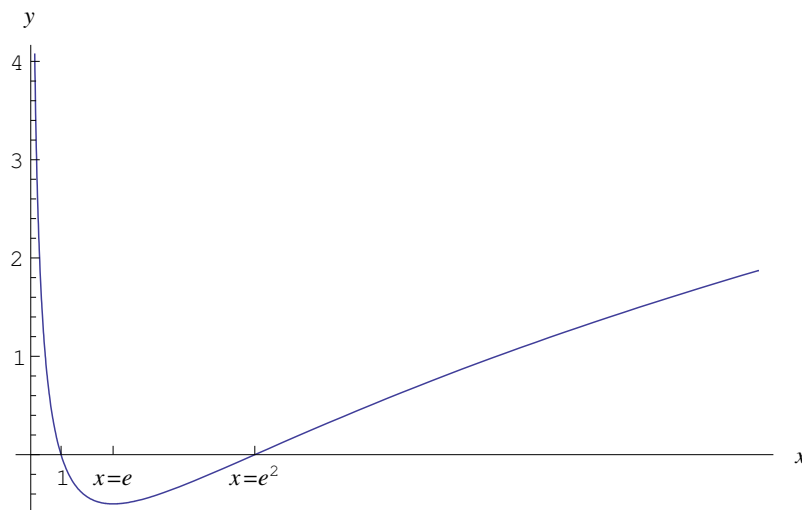


Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x$

$$f(x) > 0 \iff \ln x > \arctan x \iff x \in (\alpha, +\infty),$$

giacchè $\ln x$ e $\arctan x$ sono strettamente crescenti.

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (\alpha, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, \alpha)$.

Comportamento agli estremi

La funzione diverge negativamente per $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (-\infty) + 0 = -\infty,$$

quindi l'asse y è asintoto verticale.

La funzione diverge positivamente per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty) - \frac{\pi}{2} = +\infty$$

Calcoliamo:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\arctan x}{x} \right) = 0,$$

quindi il grafico è privo di asintoti obliqui.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 - x + 1}{x(1 + x^2)} \\ f''(x) &= -\frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)^2} \end{aligned} \tag{12}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$\forall x \in X, f'(x) > 0$$

Per cui la funzione è strettamente crescente in X .

Concavità e punti di flesso.

Risulta:

$$\forall x \in X, f''(x) < 0$$

Quindi il grafico è concavo verso il basso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (2).

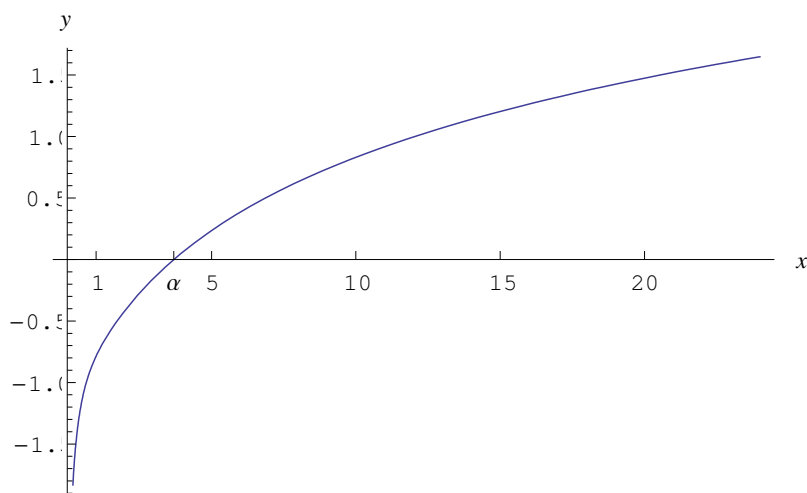


Figure 2: Grafico della funzione $f(x) = \ln x - \arctan x$

Esercizio 699

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan(\ln x) \quad (13)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Per la presenza del logaritmo la funzione è definita per $x > 0$, quindi $X = (0, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1 \implies A(1, 0) \in \gamma \cap x \quad (14)$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \ln x > 0 \iff x \in (1, +\infty),$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (1, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, 1)$.

Comportamento agli estremi

La funzione converge per $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2},$$

cosicché $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\ln x), & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Pertanto $B(-\frac{\pi}{2}, 0) \in \gamma \cap y$.

La funzione converge per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2},$$

quindi la retta $2y = \pi$ è asintoto orizzontale.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \\ f''(x) &= -\frac{(1 + \ln x)^2}{x^2((1 + \ln^2 x))^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$\forall x \in X, f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X .

Esaminiamo il comportamento di $f'(x)$ nel punto $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{1 + \ln^2 x} \\ &= \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \end{aligned}$$

cioè il grafico “parte” dal punto $B(0, -\frac{\pi}{2})$ con tangente verticale.

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) < 0 \iff x \in X - \left\{ \frac{1}{e} \right\}$$

Resta l'ambiguità sul punto $x = \frac{1}{e}$, poiché non si tratta di un punto di flesso. Determinando con un qualunque programma di calcolo le derivate fino al quarto ordine, vediamo che:

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = f''\left(\frac{1}{e}\right) = f'''\left(\frac{1}{e}\right) = 0, \quad f^{IV}\left(\frac{1}{e}\right) < 0$$

Da ciò segue che nel punto $x = \frac{1}{e}$ il grafico è concavo verso il basso. Allo stesso risultato si giunge intuitivamente, poiché la funzione è ivi strettamente crescente e il grafico deve necessariamente essere concavo verso il basso, poiché è tale in ogni intorno di $x = \frac{1}{e}$.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (3).

Esercizio 700

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln(\arctan x) \tag{16}$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita su tutto \mathbb{R} , quindi $X = (-\infty, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

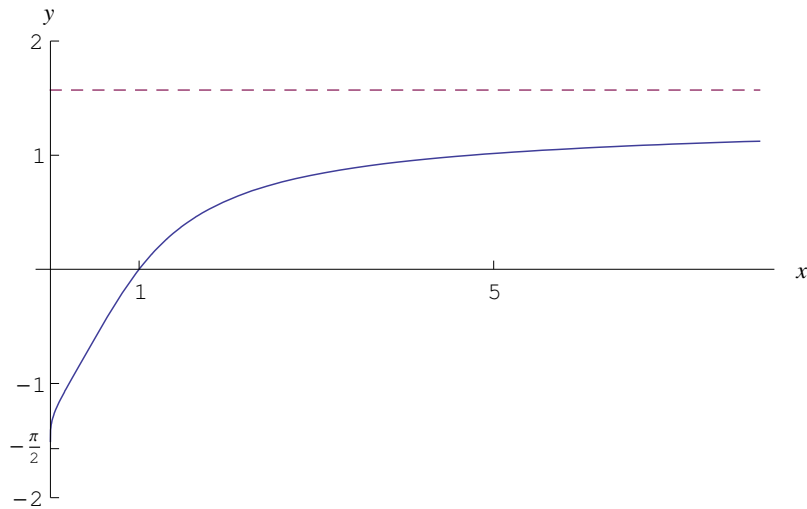


Figure 3: Grafico della funzione $f(x) = \arctan(\ln x)$

$$f(x) = 0 \iff \arctan x = 1 \iff x = \alpha \simeq 1.56 \implies A(\alpha, 0) \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \arctan x > 1 \iff x \in (\alpha, +\infty),$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (\alpha, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, \alpha)$.

Comportamento agli estremi

La funzione diverge negativamente per $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

cosicché l'asse y è asintoto verticale.

Pertanto $B(-\frac{\pi}{2}, 0) \in \gamma \cap y$.

La funzione converge per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln \frac{\pi}{2},$$

quindi la retta $y = \ln \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} \\ f''(x) &= -\frac{1+2x\arctan x}{(1+x^2)^2(\arctan x)^2} \end{aligned} \tag{17}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$\forall x \in X, f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X .

Concavità e punti di flesso.

Osserviamo che $x \arctan x > 0, \forall x \in X$. Pertanto la derivata seconda non si annulla mai in X . Più precisamente è sempre < 0 , quindi γ è concavo verso il basso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (4).

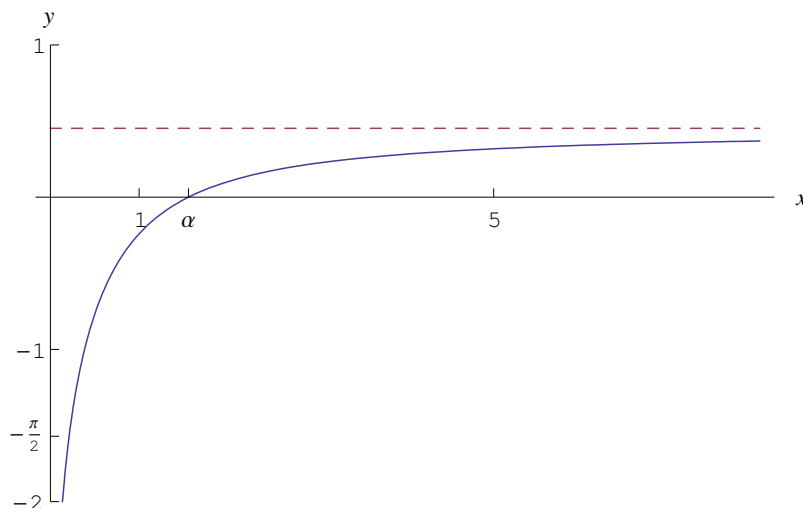


Figure 4: Grafico della funzione $f(x) = \ln(\arctan x)$

Esercizio 701

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\arctan x} \quad (18)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita su tutto \mathbb{R} , quindi $X = (-\infty, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \iff \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$f(0) = 1 \implies (0, 1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$

Comportamento agli estremi

La funzione converge per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{\pi/2},$$

quindi la retta $y = e^{\pi/2}$ è asintoto orizzontale a destra.

La funzione converge per $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{-\pi/2},$$

quindi la retta $y = e^{-\pi/2}$ è asintoto orizzontale a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \\ f''(x) &= \frac{(1-2x)e^{\arctan x}}{(1+x^2)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Studio del segno:

$$\forall x \in X, f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X .

Concavità e punti di flesso.

Zeri di $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

Segno di $f''(x)$:

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right),$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $(-\infty, \frac{1}{2})$ ed è concavo verso il basso in $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Ciò implica che $x = \frac{1}{2}$ è punto di flesso:

$$F\left(\frac{1}{2}, e^{\arctan(\frac{1}{2})}\right)$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (5).

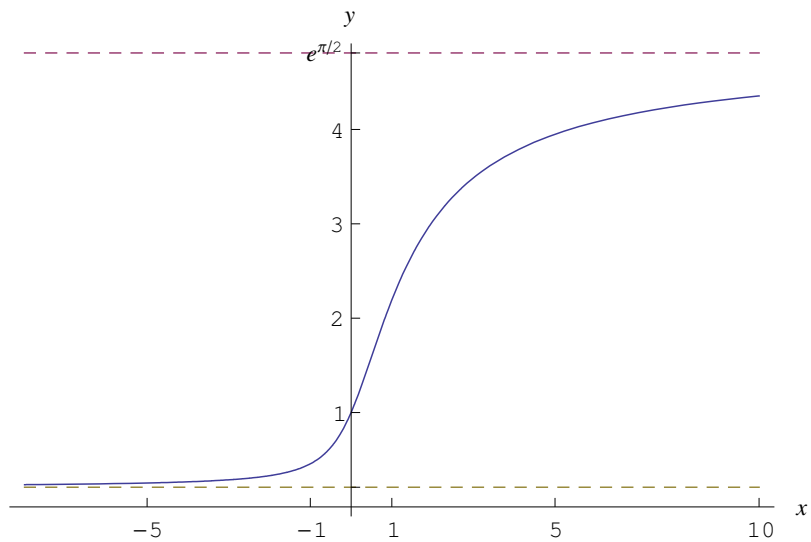


Figure 5: Grafico della funzione $f(x) = e^{\arctan x}$

Esercizio 702

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\arctan \frac{1}{x}} \tag{20}$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \iff \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\arctan \frac{1}{x}} = e^{\pi/2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\arctan \frac{1}{x}} = e^{-\pi/2}$$

Cioè $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è:

$$s = e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}$$

Si noti che la discontinuità non è simmetrica.

La funzione converge per $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\arctan \frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\arctan \frac{1}{x}} = 1$$

quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a destra e a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{e^{\arctan \frac{1}{x}}}{1+x^2} \\ f''(x) &= \frac{(1+2x)e^{\arctan \frac{1}{x}}}{(1+x^2)^2} \end{aligned} \tag{21}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Studio del segno:

$$\forall x \in X, f'(x) < 0$$

per cui la funzione è strettamente decrescente in X .

Determiniamo la derivata sinistra e destra in $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -e^{-\pi/2} \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -e^{\pi/2} \end{aligned}$$

Possiamo ora scrivere le equazioni delle semirette tangenti a sinistra e a destra nel punto di discontinuità $x = 0$.

$$\tau_-) y = e^{-\pi/2} (1 - x)$$

$$\tau_+) y = e^{\pi/2} (1 - x)$$

Concavità e punti di flesso.

Zeri di $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$$

Segno di $f''(x)$:

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right),$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ ed è concavo verso il basso in $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Ciò implica che $x = -\frac{1}{2}$ è punto di flesso:

$$F\left(-\frac{1}{2}, e^{\arctan 2}\right)$$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (6).

Esercizio 703

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan(e^{1/x}) \tag{22}$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff e^{1/x} = 0 \text{ mai!} \implies \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$

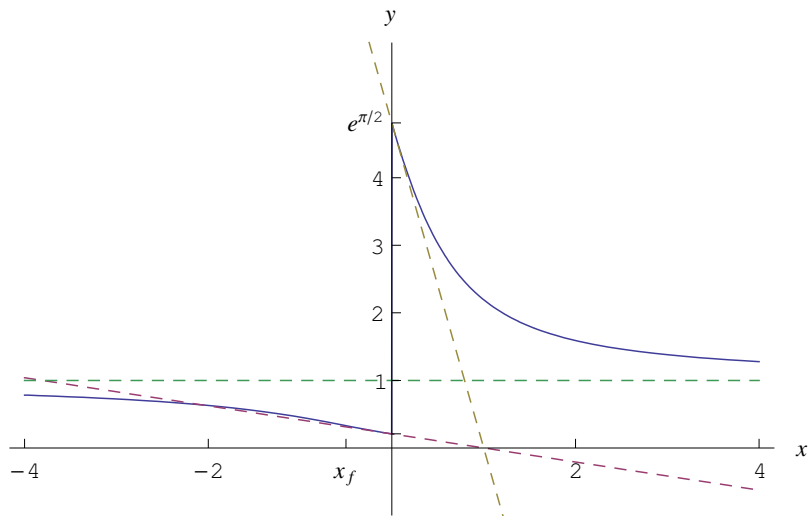


Figure 6: Grafico della funzione $f(x) = e^{\arctan \frac{1}{x}}$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(e^{1/x}) = \frac{\pi^-}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan(e^{1/x}) = 0^+$$

Cioè $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è:

$$s = \frac{\pi}{2}$$

Si noti che la discontinuità non è simmetrica.

La funzione converge per $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(e^{1/x}) = \frac{\pi^+}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(e^{1/x}) = \frac{\pi^+}{4}$$

quindi la retta $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale a destra e a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{e^{1/x}}{x^2(1+e^{2/x})} \\ f''(x) &= \frac{e^{1/x}[1+2x+e^{2/x}(2x-1)]}{(1+e^{2/x})^2 x^4} \end{aligned} \tag{23}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Studio del segno:

$$\forall x \in X, f'(x) < 0$$

per cui la funzione è strettamente decrescente in X .

Determiniamo la derivata sinistra e destra in $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$$

Quindi γ “arriva” in $x = 0^-$ con tangente orizzontale, e “parte” da $x = 0^+$ con tangente orizzontale

Concavità e punti di flesso.

Zeri di $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \iff 1 + 2x + e^{2/x}(2x - 1) = 0$$

Risolviendo numericamente, troviamo le radici:

$$\alpha \simeq -0.48, \beta = -\alpha$$

Segno di $f''(x)$:

$$f''(x) > 0 \iff \begin{cases} 1 + 2x + e^{2/x}(2x - 1) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \implies x \in (\alpha, 0) \cup (\beta, +\infty),$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $(\alpha, 0) \cup (\beta, +\infty)$ ed è concavo verso il basso in $(-\infty, \alpha) \cup (0, \beta)$. Ciò implica che $x = \alpha$ e $x = \beta$ sono punti di flesso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (7).

Esercizio 704

Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{\ln(\arctan x + 1)} \tag{24}$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in X tale che:

$$\begin{cases} \arctan x + 1 > 0 \\ \arctan x + 1 \neq 1 \end{cases} \implies X = (-\tan 1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

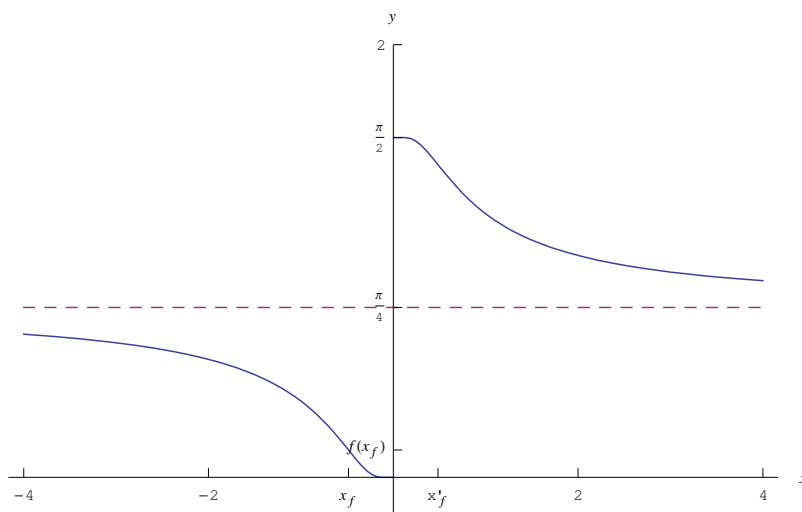


Figure 7: Grafico della funzione $f(x) = \arctan(e^{1/x})$

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \arctan x + 1 > 1 \iff x \in (0, +\infty)$$

Il grafico giace nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, +\infty)$, e nel semipiano $y > 0$ per $x \in (-\tan 1, 0)$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow (-\tan 1)^+} f(x) = -\frac{1}{\ln 0^+} = -\frac{1}{-\infty} = 0^+,$$

cosicchè $x = -\tan 1$ è una discontinuità eliminabile.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty,$$

per cui l'asse y è asintoto verticale.

La funzione converge per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{2+\pi}\right)}$$

quindi la retta $y = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{2+\pi}\right)}$ è asintoto orizzontale a destra.

Calcolo delle derivate

Calcoliamo solo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+\arctan x)[\ln(\arctan x + 1)]^2} \quad (25)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Studio del segno:

$$\forall x \in X, f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X .

Determiniamo la derivata destra in $x = -\tan 1$:

$$\begin{aligned} f'_+(-\tan 1) &= \lim_{x \rightarrow (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+x^2)(1+\arctan x)[\ln(\arctan x + 1)]^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \lim_{x \rightarrow (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)[\ln(\arctan x + 1)]^2} \end{aligned}$$

Il primo limite non produce indeterminazione, quindi calcoliamo il secondo ponendo $t = 1 + \arctan x$, e ciò implica $t \rightarrow 0^+$ se $x \rightarrow (-\tan 1)^+$

$$\lim_{x \rightarrow (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)[\ln(\arctan x + 1)]^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t \ln^2 t}$$

Siccome $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln^2 t = 0^+$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)[\ln(\arctan x + 1)]^2} = +\infty,$$

donde:

$$f'_+(-\tan 1) = +\infty$$

Quindi γ “parte” da $x = -\tan 1$ con tangente verticale orientata verso l’alto.

Concavità e punti di flesso.

Non abbiamo determinato la derivata seconda, per cui deduciamo i punti di flesso dal comportamento di $f(x)$. Siccome γ “parte” da $x = -\tan 1$ con tangente verticale orientata verso l’alto, segue che esiste un flesso in $x_f \in (-\tan 1, 0)$, risultando γ concavo verso il basso in $(-\tan 1, x_f)$ e concava verso l’alto in $(x_f, 0)$. In $(0, +\infty)$ γ volge nuovamente la concavità verso il basso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (8).

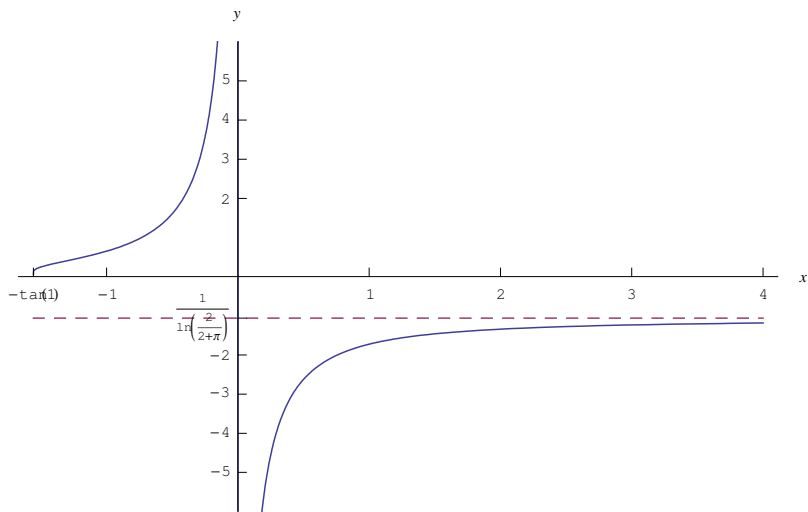


Figure 8: Grafico della funzione $f(x) = -\frac{1}{\ln(\arctan x+1)}$

Esercizio 705

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(e^{1/x^2}\right) \quad (26)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

cosicché $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.

La funzione converge per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arctan(e^{0^+}) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^+,$$

e in forza della parità:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \arctan(e^{0^+}) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^+$$

quindi la retta $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3(1+e^{2/x^2})} \quad (27)$$

$$f''(x) = \frac{2e^{1/x^2} [2 + 3x^2 + e^{2/x^2} (3x^2 - 2)]}{x^6 (1 + e^{2/x^2})^2} \quad (28)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Studio del segno:

$$f'(x) > 0 \iff x < 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ ed è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$.

Determiniamo le derivate destra e sinistra in $x = 0$:

$$f'_+(0) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{1/x^2}}{x^3(1+e^{2/x^2})} = 0$$
$$f'_-(0) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2e^{1/x^2}}{x^3(1+e^{2/x^2})} = 0$$

(per il calcolo si suggerisce il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$).

Quindi γ “arriva” e “parte” da $x = 0$ con tangente orizzontale.

Concavità e punti di flesso.

Lo studio della derivata seconda è complicato, per cui deduciamo i punti di flesso dal comportamento di $f(x)$. Siccome γ “arriva” e “parte” da $x = 0$ con tangente orizzontale, segue che esistono due flessi simmetrici rispetto all’asse y , con $|x| \sim 2/3$.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (9).

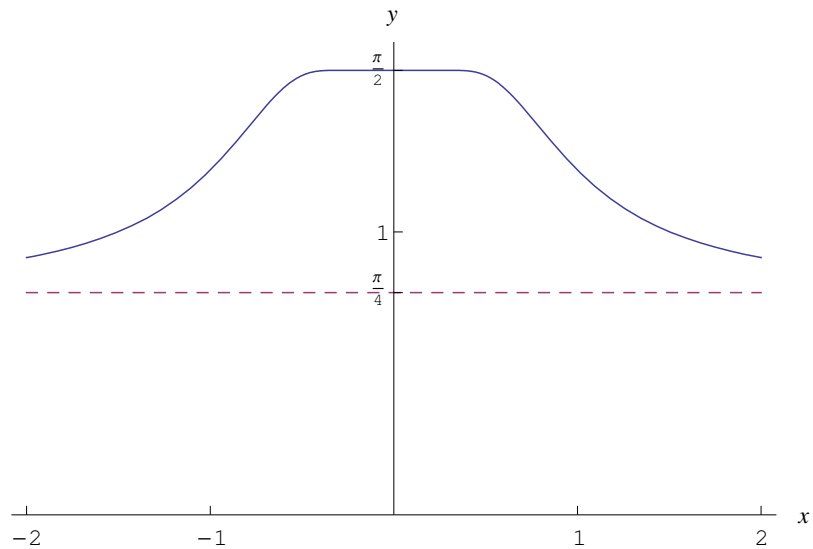


Figure 9: Grafico della funzione $f(x) = \arctan\left(e^{1/x^2}\right)$

Esercizio 706

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin e^x \quad (29)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è infinitesima per $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \arcsin 0^+ = 0^+,$$

quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \quad (30)$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{\sqrt{(1 - e^x)^3}} \quad (31)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Studio del segno:

$$\forall x \in X, f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X .

Determiniamo la derivata sinistra in $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = +\infty$$

Quindi γ "arriva" a $x = 0$ con tangente verticale orientata verso l'alto.

Concavità e punti di flesso.

Segno della derivata seconda:

$$\forall x \in X, f''(x) > 0,$$

per cui il grafico volge la concavità verso l'alto.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (10).

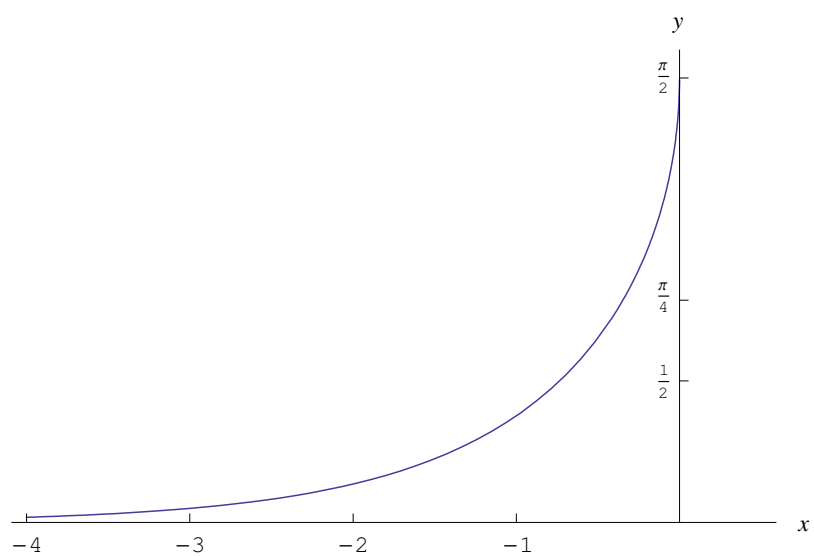


Figure 10: Grafico della funzione $f(x) = \arcsin e^x$