

Sistemi di ordine massimo

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Teorema 1. Sia $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ un sistema di vettori di E . Sia A l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori di Σ :

$$A \stackrel{def}{=} \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i \mid \lambda_i \in K, \mathbf{v}_i \in \Sigma, (i = 1, 2, \dots, r) \right\} \subseteq E \quad (1)$$

L'insieme (1) è un sottospazio vettoriale di E .

Proof. Presi ad arbitrio due elementi di A :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{v}_i,$$

risulta:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \mu_i) \mathbf{v}_i \implies (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in A$$

$$\forall \lambda \in K, \lambda \mathbf{v} = \sum_{i=1}^r \tilde{\lambda}_i \mathbf{v}_i \implies (\lambda \mathbf{v}) \in A, \quad \text{essendo } \tilde{\lambda}_i \stackrel{def}{=} \lambda \lambda_i$$

donde l'asserto. □

Definizione. L'insieme (1) si chiama *sottospazio generato da* Σ e si indica con $A[\Sigma]$.