Sistemi di ordine massimo

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Teorema 1. Sia $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ un sistema di vettori di E. Sia A l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori di Σ:

$$A \overset{def}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i \mid \lambda_i \in K, \, \mathbf{v}_i \in \Sigma, \quad (i = 1, 2, ...r) \right\} \subseteq E \tag{1}$$

L'insieme (1) è un sottospazio vettoriale di E.

Proof. Presi ad arbitrio due elementi di A:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i, \ \ \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \mathbf{v}_i,$$

risulta:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i + \mu_i) \mathbf{v}_i \Longrightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in A$$

$$\forall \lambda \in K, \, \lambda \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\lambda}_i \mathbf{v}_i \Longrightarrow (\lambda \mathbf{v}) \in A, \quad \text{essendo } \tilde{\lambda}_i \overset{def}{=} \lambda \lambda_i$$

donde l'asserto. □

Definizione. L'insieme (1) si chiama ***sottospazio generato da*** Σ e si indica con $A[\Sigma]$.