

Spazi vettoriali (parte 1)

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

1 Definizione assiomatica

Sia E un insieme non vuoto e K un campo (ad esempio, \mathbb{R} o \mathbb{C}). L'insieme E è uno **spazio vettoriale** (e i suoi elementi si dicono **vettori**) se sono definite una legge di composizione interna χ e una legge di composizione esterna η :

$$\begin{aligned}\chi : E \times E &\longmapsto E \\ \eta : K \times E &\longmapsto E\end{aligned}\tag{1}$$

La prima delle (1) si chiama **addizione di vettori** e si indica con $+$. Quindi:

$$+ : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E \times E \longmapsto \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in E\tag{2}$$

L'operazione (2) verifica le seguenti proprietà:

1. Proprietà commutativa.

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

2. Proprietà associativa.

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E, \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

3. Esistenza dell'elemento neutro.

$$\exists \mathbf{0} \in E : \forall \mathbf{u} \in E, \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

4. Esistenza dell'opposto

$$\forall \mathbf{u} \in E, \exists (-\mathbf{u}) \in E \mid -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

La seconda delle (1) si chiama **moltiplicazione di uno scalare per un vettore**:

$$\eta : (\lambda, \mathbf{v}) \in K \times E \longmapsto (\lambda \mathbf{v}) \in E\tag{3}$$

L'operazione (3) verifica le seguenti proprietà:

I Proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale.

$$\forall \lambda \in K, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$$

II Proprietà distributiva rispetto alla somma in K

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall \mathbf{v} \in E, (\lambda + \mu) \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}$$

III Proprietà associativa

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall \mathbf{v} \in E, \lambda(\mu \mathbf{v}) = (\lambda\mu) \mathbf{v}$$

IV Esistenza dell'elemento neutro

$$\exists 1 \in K : \forall \mathbf{v} \in E, 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

Per quanto detto, se le operazioni (1) verificano le proprietà 1, 2, 3, 4 e I, II, III, IV, l'insieme E assume la struttura di spazio vettoriale su K . Gli elementi di K si dicono **scalari**.

Esempio 1. Consideriamo l'insieme \mathbb{R}^n delle n-ple ordinate di numeri reali:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Definiamo l'operazione di addizione:

$$+ : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

essendo:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Per definizione:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Abbiamo

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, x_i + y_i = y_i + x_i (i = 1, 2, \dots, n) \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, x_i + (y_i + z_i) = (x_i + y_i) + z_i, (i = 1, 2, \dots, n) \implies \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
3. $\exists \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
4. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \exists (-\mathbf{x}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n : -\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$

L'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore è così definita:

$$a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n), \quad a \in \mathbb{R}$$

e verifica le proprietà:

$$\text{I } \forall a \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$$

$$\text{II } \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, (a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$$

$$\text{III } \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$$

IV $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Da ciò segue che con le operazioni sopra definite, l'insieme \mathbb{R}^n è uno spazio vettoriale sul campo reale \mathbb{R} .

Esempio 2. Consideriamo l'insieme \mathbb{C}^n delle n-ple ordinate di numeri complessi:

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Definiamo l'operazione di addizione:

$$+ : (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$$

essendo:

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n), \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

Per definizione:

$$\mathbf{z} + \mathbf{w} = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n)$$

È evidente che:

1. $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{z} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$
1. $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{z} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{z} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}$
2. $\exists \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n : \mathbf{z} + \mathbf{0} = \mathbf{z}$
3. $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n, \exists -\mathbf{z} = (-z_1, -z_2, \dots, -z_n) \in \mathbb{C}^n : -\mathbf{z} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$

L'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore è così definita:

$$a\mathbf{z} = (az_1, az_2, \dots, az_n), \quad a \in \mathbb{C}$$

e verifica le proprietà:

- I $\forall a \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n, a(\mathbf{z} + \mathbf{w}) = a\mathbf{z} + a\mathbf{w}$
- II $\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n, (a + b)\mathbf{z} = a\mathbf{z} + b\mathbf{z}$
- III $\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n, a(b\mathbf{z}) = (ab)\mathbf{z}$
- IV $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n, 1\mathbf{z} = \mathbf{z}$

Da ciò segue che con le operazioni sopra definite, l'insieme \mathbb{C}^n è uno spazio vettoriale sul campo complesso \mathbb{C} .

Esempio 3. Sia $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ l'insieme delle matrici $m \times n$ su \mathbb{R} . Introduciamo in $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ l'operazione di addizione:

$$+ : (A, B) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \longmapsto (A + B) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$$

Più precisamente:

$$(A = (a_{ij}), B = (b_{ij})) \implies A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

L'operazione di addizione verifica gli assiomi:

1. $\forall A, B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), A + B = B + A$
2. $\forall A, B, C \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists 0 = (a_{ij} = 0) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \mid \forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), A + 0 = 0 + A = A$
4. $\forall A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), \exists -A = (-a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \mid -A + A = 0$

Definiamo l'operazione moltiplicazione di uno scalare per una matrice:

$$\eta : (\lambda, A) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \longmapsto (\lambda A) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$$

Più precisamente:

$$\lambda \in \mathbb{R}, A = (a_{ij}) \implies \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Tale operazione verifica gli assiomi:

- I $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- II $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- III $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- IV $\forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), 1A = A$

Si conclude che $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ con le operazioni sopra introdotte assume la struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} .