# Spazi vettoriali

**(File scaricato da http://www.extrabyte.info)**

## 1 Definizione assiomatica

Sia $E$ un insieme non vuoto e $K$ un campo (ad esempio, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). L'insieme $E$ è uno **spazio vettoriale** (e i suoi elementi si dicono **vettori**) su $K$ se sono definite una legge di composizione interna $\chi$ e una legge di composizione esterna $\eta$:

$$\begin{aligned} \chi &: E \times E \longmapsto E \\ \eta &: K \times E \longmapsto E \end{aligned} \tag{1}$$

La prima delle (1) si chiama **addizione di vettori** e si indica con $+$. Quindi:

$$+ : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E \times E \longmapsto (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in E \tag{2}$$

L'operazione (2) verifica le seguenti proprietà:

1. **Proprietà commutativa.**
   $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \;\; \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. **Proprietà associativa.**
   $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E, \;\; \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
3. **Esistenza dell'elemento neutro.**
   $\exists \mathbf{0} \in E \mid \forall \mathbf{u} \in E, \;\; \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4. **Esistenza dell'opposto**
   $\forall \mathbf{u} \in E, \exists \, (-\mathbf{u}) \in E \mid -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

La seconda delle (1) si chiama **moltiplicazione di uno scalare per un vettore**:

$$\eta : (\lambda, \mathbf{v}) \in K \times E \longmapsto (\lambda \mathbf{v}) \in E \tag{3}$$

L'operazione (3) verifica le seguenti proprietà:

**I Proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale.**
$\forall \lambda \in K, \, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \, \lambda \, (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$

**II Proprietà distributiva rispetto alla somma in $K$**
$\forall \lambda, \mu \in K, \, \forall \mathbf{v} \in E, \, (\lambda + \mu) \, \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}$

**III Proprietà associativa**

$\forall\lambda,\mu\in K,\ \forall\mathbf{v}\in E,\ \lambda(\mu\mathbf{v})=(\lambda\mu)\mathbf{v}$

**IV Esistenza dell'elemento neutro**

$\exists 1\in K:\forall\mathbf{v}\in E,\ 1\mathbf{v}=\mathbf{v}$

Per quanto detto, se le operazioni (1) verificano le proprietà 1, 2, 3, 4 e I, II, III, IV, l'insieme $E$ assume la struttura di spazio vettoriale su $K$. Gli elementi di $K$ si dicono **scalari.**

**Esempio 1.** Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times...\times\mathbb{R}}_{n}$ delle n-ple ordinate di numeri reali:

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,...,x_n):x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,...,n\}$$

Definiamo l'operazione di addizione:

$$+:(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longmapsto(\mathbf{x}+\mathbf{y})\in\mathbb{R}^n$$

essendo:

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,...x_n)\,,\ \mathbf{y}=(y_1,y_2,...y_n)$$

Per definizione:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$$

Abbiamo

1. $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,\ x_i+y_i=y_i+x_i\ (i=1,2,...,n)\Longrightarrow\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$
2. $\forall\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n,\ x_i+(y_i+z_i)=(x_i+y_i)+z_i,\ (i=1,2,...,n)\Longrightarrow\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$
3. $\exists\mathbf{0}=(0,0,...,0)\in\mathbb{R}^n\mid\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$
4. $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ \exists-\mathbf{x}=(-x_1,-x_2,...,-x_n)\in\mathbb{R}^n\mid-\mathbf{x}+\mathbf{x}=\mathbf{0}$

   L'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore è così definita:

$$a\mathbf{x}=(ax_1,ax_2,...,ax_n)\,,\quad a\in\mathbb{R}$$

   e verifica le proprietà:

I $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,\ a(\mathbf{x}+\mathbf{y})=a\mathbf{x}+a\mathbf{y}$

II $\forall a,b\in\mathbb{R},\ \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ (a+b)\mathbf{x}=a\mathbf{x}+b\mathbf{x}$

III $\forall a,b\in\mathbb{R},\ \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ a(b\mathbf{x})=(ab)\mathbf{x}$

IV $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Da ciò segue che con le operazioni sopra definite, l'insieme $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale sul campo reale $\mathbb{R}$.

**Esempio 2.** Consideriamo l'insieme $\mathbb{C}^n$ delle n-ple ordinate di numeri complessi:

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, ..., z_n) : z_i \in \mathbb{C}, \ i = 1, 2, ..., n\}$$

Definiamo l'operazione di addizione:

$$+ : (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}^n$$

essendo:

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, ...z_n) \, , \ \mathbf{w} = (w_1, w_2, ...w_n)$$

Per definizione:

$$\mathbf{z} + \mathbf{w} = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, ..., z_n + w_n)$$

È evidente che:

1. $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$
1. $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{z} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}$
2. $\exists \mathbf{0} = (0, 0, ...0) \in \mathbb{C}^n : \mathbf{z} + \mathbf{0} = \mathbf{z}$
3. $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $\exists - \mathbf{z} = (-z_1, -z_2, ..., -z_n) \in \mathbb{C}^n : -\mathbf{z} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$

L'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore è così definita:

$$a\mathbf{z} = (az_1, az_2, ..., az_n) \, , \quad a \in \mathbb{C}$$

e verifica le proprietà:

I $\forall a \in \mathbb{C}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $a(\mathbf{z} + \mathbf{w}) = a\mathbf{z} + a\mathbf{w}$

II $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $(a + b)\,\mathbf{z} = a\mathbf{z} + b\mathbf{z}$

III $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $a(b\mathbf{z}) = (ab)\,\mathbf{z}$

IV $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $1\mathbf{z} = \mathbf{z}$

Da ciò segue che con le operazioni sopra definite, l'insieme $\mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale sul campo complesso $\mathbb{C}$.

**Esempio 3.** Sia $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ l'insieme delle matrici $m \times n$ su $\mathbb{R}$. Introduciamo in $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ l'operazione di addizione:

$$+ : (A, B) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \longmapsto (A + B) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$$

Più precisamente:

$$(A = (a_{ij}), \ \ B = (b_{ij})) \Longrightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

L'operazione di addizione verifica le seguenti proprietà:

1. $\forall A, B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$, $A + B = B + A$
2. $\forall A, B, C \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$, $\ A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\exists \mathbf{0} = (a_{ij} = 0) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) : \forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$, $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$
4. $\forall A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$, $\exists - A = (-a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) : -A + A = \mathbf{0}$

Definiamo l'operazione moltiplicazione di uno scalare per una matrice:

$$\eta : (\lambda, A) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n) \longmapsto (\lambda A) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$$

Più precisamente:

$$(\lambda \in \mathbb{R}, \ A = (a_{ij})) \Longrightarrow \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Tale operazione verifica le seguenti proprietà:

I $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

II $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), (\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

III $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), \lambda(\mu A) = (\lambda \mu) A$

IV $\forall A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n), \ \ 1A = A$

Si conclude che $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times n)$ con le operazioni sopra introdotte assume la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

**Esempio 4.** Sia $\mathcal{P}_n[x]$ l'insieme dei polinomi su $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale di $n \in \mathbb{N}$. Prendiamo ad arbitrio due elementi di tale insieme:

$$p_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$$
$$q_r(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_r x^r,$$

essendo $m, r \leq n$. Definiamo l'addizione tra polinomi:

$$+ : (p_m(x), q_r(x)) \in \mathcal{P}_n[x] \times \mathcal{P}_n[x] \longmapsto (p_m(x) + q_r(x)) \in \mathcal{P}_n[x]$$

Senza ledere la generalità, supponiamo che $m < r$:

$p_m(x) + q_r(x)$
$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_m + b_m)x^m + b_{m+1}x^{m+1} + ... + b_r x^r$

L'operazione di addizione verifica le seguenti proprietà:

1. $\forall p_m(x), q_r(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $p_m(x) + q_r(x) = q_r(x) + p_m(x)$
2. $\forall p_m(x), q_r(x), l_k(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $p_m(x) + (q_r(x) + l_k(x)) = (p_m(x) + q_r(x)) + l_k(x)$
3. $\exists \mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^h$ $(\forall h \leq n)$: $\forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $p_m(x) + \mathbf{0} = p_m(x)$
4. $\forall p_m(x) = \left(\sum_{j=1}^m a_j x^j\right) \in \mathcal{P}_n[x]$, $\exists -p_m(x) = \left(\sum_{j=1}^m (-a_j)x^j\right) \in \mathcal{P}_n[x] \mid -p_m(x) + p_m(x) = \mathbf{0}$

Definiamo l'operazione moltiplicazione di uno scalare per una polinomio

$$\eta : (\lambda, p_m(x)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}_n[x] \longmapsto (\lambda p_m(x)) \in \mathcal{P}_n[x]$$

Più specificatamente:

$$p_m(x) = \sum_{j=1}^m a_j x^j \Longrightarrow \lambda p_m(x) = \sum_{j=1}^m (\lambda a_j)x^j$$

**Esempio 5.** Tale operazione verifica le seguenti proprietà:

I $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p_m(x), q_r(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $\lambda(p_m(x) + q_r(x)) = \lambda p_m(x) + \lambda q_r(x)$

II $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $(\lambda + \mu)p_m(x) = \lambda p_m(x) + \mu p_m(x)$

III $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $\lambda(\mu p_m(x)) = (\lambda\mu)p_m(x)$

IV $\forall p_m(x) \in \mathcal{P}_n[x]$, $1p_m(x) = p_m(x)$
Da ciò segue che l'insieme $\mathcal{P}_n[x]$ con l'operazioni sopra introdotte assume la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

**Esempio 6.** Sia $\mathcal{F}(a,b)$ l'insieme delle funzioni reali di variabile reale definite in $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$:

$$f \in \mathcal{F}(a,b) \Longrightarrow f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$$

Definiamo l'addizione:

$$+ : (f,g) \in \mathcal{F}(a,b) \times \mathcal{F}(a,b) \longmapsto (f+g) \in \mathcal{F}(a,b) \tag{4}$$

Più specificatamente:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

La (4) verifica le seguenti proprietà:

1. $\forall f, g \in \mathcal{F}(a,b), f+g = g+f$
2. $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(a,b), f+(g+h) = (f+g)+h$
3. $\exists \mathbf{0} \equiv 0$ (funzione identicamente nulla): $\forall f \in \mathcal{F}(a,b), f+\mathbf{0} = f$
4. $\forall f \in \mathcal{F}(a,b), \exists -f : -f+f = \mathbf{0}$

Definiamo l'operazione moltiplicazione di uno scalare per un elemento di $\mathcal{F}(a,b)$:

$$\eta : (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(a,b) \longmapsto (\lambda f) \in \mathcal{F}(a,b)$$

Precisamente:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

e verifica le seguenti proprietà:

I $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{F}(a,b), \lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

II $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}(a,b), (\lambda+\mu) f(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$

III $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}(a,b), \lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f(x)$

IV $\forall f \in \mathcal{F}(a,b),\ \ 1f = f$

Con le operazioni sopra introdotte, $\mathcal{F}(a,b)$ assume la struttura di spazio vettoriale.

***

Sia $E$ uno spazio vettoriale su $K$.

**Proposizione.** $\forall \lambda \in K, \quad \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$

*Proof.* $\lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0}+\lambda\mathbf{0} \Longrightarrow \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ □

**Proposizione.** $\forall \mathbf{v} \in E, \quad 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

*Proof.* $0\mathbf{v} = (0+0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} \Longrightarrow 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ □

## 2 Dipendenza ed indipendenza lineare di vettori

Sia $E$ uno spazio vettoriale su $K$. Consideriamo il **sistema di vettori**:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}, \text{ con } r \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Presi ad arbitrio $r$ scalari $\lambda_i \in K$ $(i = 1, 2, ..., r)$, il vettore:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r,$$

si chiama **combinazione lineare** dei vettori di $\Sigma$. Equivalentemente si dice che $\mathbf{v}$ dipende linearmente dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ (o dal sistema $\Sigma$).
Ciò premesso, abbiamo la seguente:

**Definizione.** $\Sigma$ è ***linearmente indipendente*** se:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = 0 \tag{5}$$

Nel caso contrario diremo che $\Sigma$ è ***linearmente dipendente.*** Cioè:

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \neq (0, 0, ..., 0) \mid \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{6}$$

**Esempio 7.** Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ (cfr esempio 1 per $n = 3$), mostrare che il sistema di vettori $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ con

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, 2), \ \mathbf{v}_2 = \left(7, -\frac{3}{2}, 3\right), \ \mathbf{v}_3 = (-3, 1, -1) \ , \tag{7}$$

è linearmente dipendente.

**Soluzione 8.** Consideriamo l'equazione vettoriale:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}, \tag{8}$$

equivalente a:

$$\lambda_1 (2, 1, 2) + \lambda_2 \left(7, -\frac{3}{2}, 3\right) + \lambda_3 (-3, 1, -1) = (0, 0, 0),$$

le cui componenti formano il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 7\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

La matrice dei coefficienti del sistema (9) è:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 7 & -3\\ 1 & -3/2 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

La caratteristica del sistema 9 è $p=r\left(A\right)=2$, per cui tale sistema ammette $\infty^{1}$ soluzioni proprie. In altri termini $\exists\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right)\neq(0,0,0):\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$, per cui $\Sigma=\{\mathbf{v}_i\}$ è linearmente dipendente.

**Esempio 9.** Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, mostrare che il sistema di vettori $\Sigma=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ con

$$\mathbf{v}_1=\left(2,1,2\right),\ \mathbf{v}_2=\left(7,-\frac{1}{2},3\right),\ \mathbf{v}_3=\left(-3,1,-1\right)\ , \tag{10}$$

è linearmente indipendente. Esprimere altresì il vettore $\mathbf{v}_4=(1,1,-1)$ come combinazione lineare di $\Sigma$.

**Soluzione 10.** Procedendo come nell'esercizio precedente, abbiamo il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned}2\lambda_1+7\lambda_2-3\lambda_3&=0\\ \lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_2+\lambda_3&=0\\ 2\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3&=0,\end{aligned} \tag{11}$$

la cui matrice dei coefficienti è:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 7 & -3\\ 1 & -1/2 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Qui è $\det A=4$, perciò $p=3=n$ (numero di incognite). Pertanto il sistema 11 ammette solo la soluzione impropria $\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right)=(0,0,0)$; da ciò segue che $\Sigma$ è linearmente indipendente. Per la seconda domanda, poniamo:

$$\mathbf{v}_4=\mu_1\mathbf{v}_1+\mu_2\mathbf{v}_2+\mu_3\mathbf{v}_3$$

Tale equazione vettoriale può essere scritta come:

$$\mu_1\left(2,1,2\right)+\mu_2\left(7,-\frac{1}{2},3\right)+\mu_3\left(7,-\frac{1}{2},3\right)=\left(1,1,-1\right),$$

le cui componenti formano il sistema lineare non omogeneo:

$$\begin{aligned}2\lambda_1+7\lambda_2-3\lambda_3&=1\\ \lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_2+\lambda_3&=1\\ 2\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_3&=-1,\end{aligned} \tag{12}$$

Il sistema 12 è manifestamente di Cramer, ammettendo l'unica soluzione:

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \left(-\frac{5}{2}, 3, 5\right),$$

donde:

$$\mathbf{v}_4 = -\frac{5}{2}\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3$$

**Proposizione.** $(\mathbf{0} \in \Sigma) \Longrightarrow (\Sigma$ è linearmente dipendente$)$

*Proof.* $\exists h \in \{1, 2, ..., r\} \mid \mathbf{v}_h = \mathbf{0}$. Quindi:

$$\forall \lambda_h \in K - \{0\}, \quad 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + ... + 0\mathbf{v}_{h-1} + \lambda_h \mathbf{0} + 0\mathbf{v}_{h+1} + ... + 0\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Abbiamo così trovato una *r-pla* di scalari $(0, 0, ...0, \lambda_h, 0, ..., 0)$ non tutti nulli tali che $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, donde l'asserto. □

**Proposizione.** $(\exists \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_k \in \Sigma \mid \mathbf{v}_h = \mu \mathbf{v}_k, \ \mu \in K - \{0\}) \Longrightarrow (\Sigma$ è linearmente dipendente$)$

*Proof.* Senza perdita di generalità, supponiamo che $h < k$. Eseguiamo la combinazione lineare di vettori di $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} 0\mathbf{v}_1 + ... + (-1)\,\mathbf{v}_h + ... + \mu \mathbf{v}_k + ... + 0\mathbf{v}_r \\ = -\mu \mathbf{v}_k + \mu \mathbf{v}_k + \mathbf{0} \\ = (-\mu + \mu)\,\mathbf{v}_k \\ = 0\mathbf{v}_k \\ = \mathbf{0} \end{aligned}$$

In questi passaggi abbiamo applicato la proposizione 1 e la proprietà distributiva dell'operazione $\cdot$ rispetto all'addizione di scalari. Abbiamo quindi trovato una *r-pla* di scalari:

$$(\lambda_1, ..., \lambda_h, ..., \lambda_k, ..., \lambda_r) = (0, ..., -1, ..., \mu, ..., 0) \neq (0, ..., 0, ..., 0, ....0) \mid \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

donde l'asserto. □

**Proposizione.** $(\Sigma$ è linearmente dipendente$) \Longleftrightarrow (\exists \Sigma' \subseteq \Sigma \mid \Sigma'$ è linearmente dipendente$)$

*Proof.* **La condizione è necessaria**.
Hp: $\exists \Sigma' \subseteq \Sigma \mid \Sigma'$ è linearmente dipendente.
Th: $\Sigma$ è linearmente dipendente
Sia:

$$\Sigma' = \left\{\mathbf{v}_{h_1}, \mathbf{v}_{h_2}, ..., \mathbf{v}_{h_p}\right\},$$

essendo:

$$h_i \in \{1, 2, ..., r\}, \ \ i = 1, 2, ...p \leq r$$

Per ipotesi $\exists \left(\lambda_{h_1}, \lambda_{h_2}, ..., \lambda_{h_p}\right) \neq (0, 0, ...0) \mid$

$$\sum_{k=h_1}^{h_p} \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Posto $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, ..., h_p\}$, si consideri la seguente combinazione lineare:

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \sum_{k\in\mathcal{H}} \lambda_k \mathbf{v}_k + \sum_{k\notin\mathcal{H}} 0\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Abbiamo così trovato una *r-pla* di scalari non tutti nulli tali che $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, donde la tesi.
**La condizione è sufficiente**
($\Sigma$ è linearmente dipendente) $\Longrightarrow$ ($\exists \Sigma' \subseteq \Sigma \mid \Sigma'$ è linearmente dipendente)
È banale, poiché $\Sigma \supseteq \Sigma$. Quindi, posto $\Sigma' = \Sigma$, segue la tesi. □

**Proposizione.** $\left(\exists h \in \{1, 2, ..., r\} \mid \mathbf{v}_h = \sum_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{r} \mu_k \mathbf{v}_k\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c}\Sigma \text{ è linearmente} \\ \text{dipendente}\end{array}\right)$

*Proof.* Dimostriamo l'asserto per $\mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}$; nel caso contrario si riduce alla proposizione 2.
Esplicitando la sommatoria:

$$\mathbf{v}_h - \mu_1\mathbf{v}_1 - \mu_2\mathbf{v}_2 - ... - \mu_{h-1}\mathbf{v}_{h-1} - \mu_{h+1}\mathbf{v}_{h+1} - ... - \mu_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Riordinando i singoli termini:

$$-\mu_1\mathbf{v}_1 - \mu_2\mathbf{v}_2 - ... - \mu_{h-1}\mathbf{v}_{h-1} + \mathbf{v}_h - \mu_{h+1}\mathbf{v}_{h+1} - ... - \mu_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

Cioè:

$$\exists \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{h-1}, \lambda_h, \lambda_{h+1}, ..., \lambda_r\right) = \left(-\mu_1, -\mu_2, ..., -\mu_{h-1}, 1, \mu_{h+1}, ..., \mu_r\right) \mid \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

La *r-pla* di scalari $\left(-\mu_1, -\mu_2, ..., -\mu_{h-1}, 1, \mu_{h+1}, ..., \mu_r\right)$ è non nulla. □

# 3 Sottospazio vettoriale generato da un numero finito di vettori

Sia $E$ uno spazio vettoriale su $K$. Consideriamo un insieme $H \neq \emptyset$ e tale che $H \subseteq E$. Diremo che $H$ è un **sottospazio vettoriale** di $E$ se:

1. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H$, $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H$

2. $\forall \mathbf{v} \in H$, $\forall \lambda \in K$, $(\lambda \mathbf{v}) \in H$

I punti 1 e 2 si esprimono dicendo che l'insieme $H$ è **chiuso** rispetto alle operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di uno scalare per un vettore.

**Proposizione.** Il vettore nullo appartiene ad ogni sottospazio vettoriale di $E$.

*Proof.* Sia $H$ un qualunque sottospazio di $E$. Ciò implica:

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H, (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H$$

Prendiamo $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$, per cui $\mathbf{0} \in H$, per ogni $H$ sottospazio di $E$. $\square$

**Corollario 11.** L'insieme $H_0 = \{\mathbf{0}\}$ è un sottospazio di ogni spazio vettoriale $E$.

*Proof.* Sia $E$ uno spazio vettoriale su $K$. Risulta: $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$; per la proposizione 1 è $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall \lambda \in K$, quindi sono verificate le proprietà 1 e 2, da cui l'asserto. $\square$

**Esempio 12.** Asegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dire quali tra i suoi seguenti sottoinsiemi è uno sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:
$H_1 = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$; $H_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ a + b + c = 0\}$, $H_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ a \geq 0\}$; $H_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$

**Soluzione 13.** Prendiamo ad arbitrio due elementi di $H_1$:

$$\mathbf{v} = (a, b, 0)\,, \ \ \mathbf{w} = (c, d, 0)$$

Risulta:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a + b, c + d, 0) \Longrightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H_1$$

Preso ad arbitrio $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \mathbf{v} = (\lambda a, \lambda b, 0) \in H$$

Si conclude che $H_1$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
Consideriamo $H_2$. Per ogni $\mathbf{v} = (a, b, c) \in H_2$, $\ \mathbf{w} = (c, d, e) \in H_2$, la somma è:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a', b', c')\,,$$

essendo:

$$a' = a + d, \ b' = b + e, \ c' = c + f$$

Risulta:

$$a' + b' + c' = (a + b + c) + (d + e + f) = 0$$

Quindi:

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_2, \quad (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in H_2 \tag{13}$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\lambda \mathbf{v} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c),$$

ed è tale che:

$$\lambda a + \lambda b + \lambda c = \lambda (a + b + c) = 0,$$

per cui:

$$\forall \mathbf{v} \in H_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ (\lambda \mathbf{v}) \in H_2 \tag{14}$$

Le (13)-(14) implicano che $H_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
L'insieme $H_3$ è:

$$H_3 = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ a \geq 0 \right\}$$

Quindi:

$$\forall \lambda \in (-\infty, 0), \forall \mathbf{v} = (a, b, c) \in H_3, \lambda \mathbf{v} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \text{ con } \lambda a < 0 \Longrightarrow (\lambda \mathbf{v}) \notin H_3$$

Si conclude che $H_3$ **non** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
L'insieme $H_4$ è:

$$H_4 = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 \right\}$$

Abbiamo:

$$\forall \mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall \mathbf{w} = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} + \mathbf{w} = (a', b', c'),$$

essendo:

$$a' = a + d, \ b' = b + e, \ c' = c + f$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} a'^2 + b'^2 + c'^2 &= (a + d)^2 + (b + e)^2 + (c + f)^2 \\ &= f(a, b, c) + f(d, e, f) + 2(ad + eb + cf) \end{aligned} \tag{15}$$

Nella (15) è:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Deve essere:

$$\forall (a, b, c), (d, e, f,) \in H_4, \ f(a, b, c), f(d, e, f) \leq 1,$$

per cui:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 \leq 2(1 + ad + eb + cf) \Longrightarrow \left( \exists (a, b, c), (d, e, f,) \in H_4 : a'^2 + b'^2 + c'^2 > 1 \right) \tag{16}$$

La (16) implica che $H_4$ **non** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

**Esempio 14.** Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ (es. 3). Dire quale tra i seguenti suoi sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ A \text{ è simmetrica}\} \\ H'_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ AX = XA\}, \text{ con } X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) \\ J_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ \det A = 0 \ \} \\ J'_{\mathbb{R}}(n \times n) &= \left\{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ A^2 = 0 \ \right\} \end{aligned}$$

**Soluzione 15.** $\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $A + B = (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}) =$ (A,B simmetriche) $= (c_{ji} = a_{ji} + b_{ji})$, quindi:

$$\forall A, B \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n), \ \ (A + B) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{17}$$

Inoltre: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A = (a_{ij}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $(\lambda A) = (\lambda a_{ij}) = (\lambda a_{ji})$, perciò:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n), \ \ (\lambda A) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{18}$$

Le (17)-(18) implicano che $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $\mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è l'insieme delle matrici di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ che commutano con un'assegnata matrice $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
Risulta: $\forall A, B \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $(A + B)X = AX + BX = XA + XB = X(A + B)$, donde:

$$\forall A, B \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n), (A + B)X = X(A + B) \Longrightarrow (A + B) \in \forall A, B \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{19}$$

Inoltre: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $(\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda(XA) = (\lambda X)A = X(\lambda A)$, donde:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n), \ (\lambda A)X = X(\lambda A) \Longrightarrow (\lambda A) \in \mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n) \tag{20}$$

Le (19)-(19) implicano che $\mathbb{H}'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $J_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è l'insieme delle matici di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ a determinante nullo.
Risulta:

$$(\exists A, B \in J_{\mathbb{R}}(n \times n) : \ \det(A + B) \neq \det A + \det B = 0) \Longrightarrow (A + B) \notin J_{\mathbb{R}}(n \times n),$$

donde $J_{\mathbb{R}}(n \times n)$ **non** è un sottospazio di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
L'insieme $J'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è l'insieme delle matici di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ idempotenti. Risulta:

$$\forall A, B \in J'_{\mathbb{R}}(n \times n), \ \ (A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Evidentemente:

$$\exists A, B \in J'_{\mathbb{R}}(n \times n), \ \ (A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA \neq (A + B)^2 \Longrightarrow (A + B) \notin J'_{\mathbb{R}}(n \times n),$$

donde $J'_{\mathbb{R}}(n \times n)$ **non** è un sottospazio di $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.

***

**Proposizione.** Sia $E$ uno spazio vettoriale su $K$. Se $H_1, H_2, ..., H_n$ sono sottospazi di $E$, allora $\cap_{i=1}^n H_i$ è un sottospazio vettoriale di $E$.

*Proof.* Osserviamo innanzitutto che:

$$(\forall i \in (1, 2, ..., n), \ H_i \subseteq E) \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^n H_i \subseteq E$$

$$(\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_i \quad (i = 1, 2, ..., n)) \Longrightarrow \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \bigcap_{i=1}^n H_i$$

Inoltre $H_i$ è un sottospazio di $E$, quindi:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w} \in H_i \quad (i = 1, 2, ..., n)) \Longrightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in \bigcap_{i=1}^n H_i$$

$$(\forall \lambda \in K, \quad (\lambda \mathbf{v}) \in H_i \quad (i = 1, 2, ...n)) \Longrightarrow (\lambda \mathbf{v}) \in \bigcap_{i=1}^n H_i,$$

donde l'asserto. □

**Teorema 16.** Sia $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ un sistema di vettori di $E$. Sia $A$ l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori di $\Sigma$:

$$A \stackrel{def}{=} \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i \mid \lambda_i \in K, \, \mathbf{v}_i \in \Sigma, \quad (i = 1, 2, ...r) \right\} \tag{21}$$

L'insieme (21) è un sottospazio vettoriale di $E$.

*Proof.* Osserviamo innanzitutto che risulta $\emptyset \neq A \subseteq E$.
Presi ad arbitrio due elementi di $A$:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i, \ \ \mathbf{w} = \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{v}_i,$$

risulta:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \mu_i) \, \mathbf{v}_i \Longrightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in A$$

$$\forall \lambda \in K, \, \lambda \mathbf{v} = \sum_{i=1}^r \tilde{\lambda}_i \mathbf{v}_i \Longrightarrow (\lambda \mathbf{v}) \in A, \ \ \text{essendo } \tilde{\lambda}_i \stackrel{def}{=} \lambda \lambda_i$$

donde l'asserto. □

**Definizione.** L'insieme (21) si chiama ***sottospazio generato da*** $\Sigma$ e si indica con $A[\Sigma]$.

**Esercizio 17.** Assegnato il sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3), \ \mathbf{v}_1 = (2, 3, 0, -1), \ \mathbf{v}_1 = (2, -1, 2, 1)$$

provare che $\mathbf{v} \in A[\Sigma]$, essendo $\mathbf{v} = (3, 9, -4, -2)$.

**Soluzione 18.** Risulta:

$$\mathbf{v} \in A[\Sigma] \iff \left(\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0) : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{v}_i\right) \tag{22}$$

La (22) si scrive:

$$\lambda_1 (1, -2, 0, 3) + \lambda_2 (2, 3, 0, -1) + \lambda_3 (2, -1, 2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

cioè:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 3 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 9 \\ 0 + 0 + 2\lambda_3 &= -4 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= -2 \end{aligned} \tag{23}$$

La caratteristica del sistema lineare (23) è $p = 3$, per cui esso è equivalente a:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 3 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 9 \\ 0 + 0 + 2\lambda_3 &= -4, \end{aligned}$$

che ammette l'unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 3, -2)$. Si conclude che $\mathbf{v} \in A[\Sigma]$, poichè $\mathbf{v}$ si esprime come combinazione lineare dei vettori di $\Sigma$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$$

***

Sia $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ un sistema di vettori di $E$. Abbiamo la seguente:

**Proposizione.** $\left(\begin{array}{c}\Sigma \text{ è linearmente} \\ \text{indipendente}\end{array}\right) \iff \left(\mathbf{v} \in A[\Sigma] \implies \exists! (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i\right)$

*Proof.* **Implicazione diretta**
Hp $\Sigma$ è lin. indip.
Per definizione di spazio vettoriale generato da $\Sigma$, deve essere:

$$\mathbf{v} \in A[\Sigma] \Longrightarrow \exists\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Se esiste una seconda *r-pla* di scalari $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r) \mid \mathbf{v} = \sum_i \mu_i \mathbf{v}_i$, abbiamo il sistema di equazioni:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$$
$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$$

Sottraendo la seconda dalla prima:

$$(\lambda_1 - \mu_1)\,\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\,\mathbf{v}_2 + ... + (\lambda_r - \mu_r)\,\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{24}$$

Ma $\Sigma$ è linearmente indipendente, per cui la (24) implica:

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = ... = \lambda_r - \mu_r = 0,$$

cioè:

$$\lambda_i = \mu_i, \text{ per } i = 1, 2, ..., r,$$

da cui esistenza ed unicità della *r-pla* di scalari $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$.
**Implicazione inversa**
Hp:

$$\mathbf{v} \in A[\Sigma] \Longrightarrow \exists!\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \mid \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i \tag{25}$$

Per la proposizione 3 è $\mathbf{0} \in A[\Sigma]$, quindi la (25) per $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si scrive:

$$\exists!\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) \mid \mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r \tag{26}$$

L'unica *r-pla* $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$ che verifica la (26) è $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) = (0, 0, ..., 0)$, da cui $\Sigma$ è linearmente indipendente. □

La proposizione (3) ci dice che se $\Sigma$ è un sistema di vettori linearmente indipendente, ogni vettore appartenente al sottospazio generato da $\Sigma$, si esprime in uno e un sol modo come combinazione lineare dei vettori di $\Sigma$.

**Lemma 19.** Siano $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$, $\Sigma' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ due sistemi di vettori di $E$. Se $\Sigma'$ è linearmente indipendente e ogni suo vettore dipende linearmente dai vettori di $\Sigma$, allora è $p \leq r$.

*Proof.* Procediamo per assurdo supponendo che sia: $p = r + 1$. Per ipotesi:

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji} \mathbf{v}_i, \quad \text{per } j = 1, 2, ..., r, r+1 \tag{27}$$

Scriviamo la (27) per $j = j_1 \in \{1, 2, ..., r+1\}$:

$$\mathbf{u}_{j_1} = \lambda_{j_1 1} \mathbf{v}_1 + \lambda_{j_1 2} \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_{j_1 r} \mathbf{v}_r \tag{28}$$

Gli scalari $(\lambda_{j_1 1}, \lambda_{j_1 2}, ..., \lambda_{j_1 r})$ sono non tutti nulli. Nel caso contrario è $\mathbf{u}_{j_1} = \mathbf{0}$ e per la proposizione 2 $\Sigma'$ è linearmente dipendente. Senza perdita di generalità supponiamo che $\lambda_{j_1 1} \neq 0$. Dalla (28):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{u}_{j_1} - \frac{\lambda_{j_1 2}}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{v}_2 - ... - \frac{\lambda_{j_1 r}}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{v}_r \\ &= \frac{1}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{u}_{j_1} - \lambda'_{j_1 2} \mathbf{v}_2 - ... - \lambda'_{j_1 r} \mathbf{v}_r, \end{aligned} \tag{29}$$

essendo:

$$\lambda'_{j_1 i} \stackrel{def}{=} \frac{\lambda_{j_1 i}}{\lambda_{j_1 1}}, \quad i = 2, 3, ..., r$$

In tal modo la (27) diventa:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= \lambda_{j1} \mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{r} \lambda_{ji} \mathbf{v}_i \\ &= \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{u}_{j_1} - \lambda_{j1} \lambda'_{j_1 2} \mathbf{v}_2 - ... - \lambda_{j1} \lambda'_{j_1 r} \mathbf{v}_r + \sum_{i=2}^{r} \lambda_{ji} \mathbf{v}_i \\ &= \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{j_1 1}} \mathbf{u}_{j_1} + \left( \lambda_{j2} - \lambda_{j1} \lambda'_{j_1 2} \right) \mathbf{v}_2 + ... + \left( \lambda_{jr} - \lambda_{j1} \lambda'_{j_1 r} \right) \mathbf{v}_r \end{aligned}$$

cioè:

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\lambda}_{j1} \mathbf{u}_{j_1} + \sum_{i=2}^{r} \tilde{\lambda}_{ji} \mathbf{v}_i \quad \text{per } j \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1\} \tag{30}$$

essendo:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{ji} &= \lambda_{ji} - \lambda_{ji} \lambda'_{j_1 i} \text{ per } i = 2, ..., r \\ \tilde{\lambda}_{j1} &= \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{j_1 1}} \end{aligned}$$

Esplicitiamo la sommatoria a secondo membro della (30):

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\lambda}_{j1} \mathbf{u}_{j_1} + \tilde{\lambda}_{j2} \mathbf{v}_2 + \tilde{\lambda}_{j3} \mathbf{v}_3 + ... + \tilde{\lambda}_{jr} \mathbf{v}_r, \quad \text{per } j \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1\} \tag{31}$$

Scriviamo la (31) per $j = j_2 \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1\}$:

$$\mathbf{u}_{j_2} = \tilde{\lambda}_{j_2 1}\mathbf{u}_{j_1} + \tilde{\lambda}_{j_2 2}\mathbf{v}_2 + \tilde{\lambda}_{j_2 3}\mathbf{v}_3 + ... + \tilde{\lambda}_{j_2 r}\mathbf{v}_r \tag{32}$$

Gli scalari $\left(\tilde{\lambda}_{j_2 2}, \tilde{\lambda}_{j_2 3}, ..., \tilde{\lambda}_{j_2 r}\right)$ sono non tutti nulli. Nel caso contrario è $\mathbf{u}_{j_2} = \tilde{\lambda}_{j_2 1}\mathbf{u}_{j_1}$ e per la proposizione 2 $\Sigma'$ è linearmente dipendente. Senza perdita di generalità supponiamo che $\lambda_{j_2 2} \neq 0$. Dalla (32):

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{u}_{j_2} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 1}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{u}_{j_1} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 3}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{v}_3 - ... - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 r}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{v}_r$$

In tal modo la (31) diventa:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j &= \tilde{\lambda}_{j1}\mathbf{u}_{j_1} + \tilde{\lambda}_{j2}\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{u}_{j_2} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 1}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{u}_{j_1} - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 3}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{v}_3 - ... - \frac{\tilde{\lambda}_{j_2 r}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{v}_r\right) + \tilde{\lambda}_{j3}\mathbf{v}_3 + ... + \tilde{\lambda}_{jr}\mathbf{v}_r \\ &= \left(\tilde{\lambda}_{j1} - \frac{\tilde{\lambda}_{j2}\tilde{\lambda}_{j_2 1}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\right)\mathbf{u}_{j_1} + \frac{\tilde{\lambda}_{j2}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\mathbf{u}_{j_2} + \left(\tilde{\lambda}_{j3} - \tilde{\lambda}_{j2}\frac{\tilde{\lambda}_{j_2 3}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\right)\mathbf{v}_3 + ... + \left(\tilde{\lambda}_{jr} - \tilde{\lambda}_{j2}\frac{\tilde{\lambda}_{j_2 r}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}\right)\mathbf{v}_r\end{aligned}$$

cioè:

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{r}\tilde{\lambda}'_{ji}\mathbf{v}_i, \text{ per } j \in \{1, 2, ..., r+1\} - \{j_1, j_2\} \tag{33}$$

essendo:

$$\tilde{\lambda}'_{ji} = \tilde{\lambda}_{ji} - \tilde{\lambda}_{j2}\frac{\tilde{\lambda}_{j_2 3}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}, \quad i \in \{1, ..., r\} - \{2\}$$

$$\tilde{\lambda}'_{j2} = \frac{\tilde{\lambda}_{j2}}{\tilde{\lambda}_{j_2 2}}$$

Il procedimento può essere iterato $r$ volte, ottenendo:

$$\mathbf{u}_{j_{r+1}} = \mu_{j_1}\mathbf{u}_{j_1} + \mu_{j_2}\mathbf{u}_{j_2} + ... + \mu_{j_r}\mathbf{u}_{j_r}$$

Abbiamo quindi trovato un vettore di $\Sigma'$ che dipende linearmente dai rimanenti vettori di $\Sigma'$, quindi per la proposizione 2 $\Sigma'$ è linearmente dipendente. Ma ciò contraddice l'ipotesi secondo cui $\Sigma'$ è linearmente indipendente, da qui la tesi. □

# 4 Sistemi di ordine massimo

Sia $E$ uno spazio vettoriale sul campo $K$. Un sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ di vettori di $E$ si dice **sistema di ordine massimo**, se:

1. $\Sigma$ è linearmente indipendente.

2. $\forall p > r$, $\Sigma' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, ..., \mathbf{v}_p\} \subseteq E$ è linearmente dipendente.

Abbiamo la seguente:

**Proposizione.** Se $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ è un sistema di vettori di $E$ linearmente indipendente:

$$\left( \begin{array}{c} \forall \Sigma' \supset \Sigma \\ \Sigma' \text{è linearmente dipendente} \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left( \begin{array}{c} \forall \mathbf{v} \in E - \Sigma, \ \mathbf{v} \text{ dipende} \\ \text{linearmente da } \Sigma \end{array} \right)$$

*Proof.* **Implicazione diretta**
Per ipotesi:

$$\forall \mathbf{v} \in E - \Sigma, \ \Sigma' = \Sigma \cup \{\mathbf{v}\} \supset \Sigma \ , \ \ \Sigma' \text{ è linearmente dipendente} \tag{34}$$

La (34) implica:

$$\exists \, (\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_r) \neq (0, 0, ..., 0) \mid \lambda \mathbf{v} + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{35}$$

Se $\lambda = 0$ si ha:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0} \underset{\Sigma \text{ è lin. indip.}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = ... \lambda_r = 0,$$

ma ciò è impossibile, giacché è $\exists \, (\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_r) \neq (0, 0, ..., 0)$. Quindi necessariamente $\lambda \neq 0$. Dividendo la (35) per $\lambda$:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\lambda}_i \mathbf{v}_i, \tag{36}$$

essendo:

$$\tilde{\lambda}_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda}, \ \ i = 1, 2, ..., r,$$

da cui la tesi.
**Implicazione inversa.**
Per ipotesi: $\forall \mathbf{v} \in E - \Sigma$, $\mathbf{v}$ dipende linearmente da $\Sigma$. Per la proposizione 2 il sistema $\Sigma' = \Sigma \cup \{\mathbf{v}\}$ è linearmente dipendente. In forza dell'arbitrarietà di $\mathbf{v} \in E - \Sigma$, ogni $\Sigma' \subseteq E$ e tale che $\Sigma' \supset \Sigma$ è linearmente dipendente, cioè la tesi. □

**Osservazione.** Da tale proposizione segue che un sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ di vettori di $E$ è un sistema di ordine massimo, se sono verificate le seguenti proprietà:

1. $\Sigma$ è linearmente indipendente.

2. Ogni vettore di $E$ dipende linearmente da $\Sigma$.

Da ciò segue che lo spazio vettoriale $E$ è generato da $\Sigma$, e per la proposizione (3) si ha che ogni vettore di $E$ si esprime in uno e in un solo modo come combinazione lineare dei vettori di $\Sigma$.

**Proposizione.** Sia $E$ uno spazio vettoriale su $K$.

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\} \text{ è un sistema} \\ \text{di ordine massimo}\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c}\forall p > r,\ \Sigma' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\} \\ \text{è linearmente dipendente}\end{array}\right.$$

*Proof.* Per la proposizione 4:

$$(\forall i \in \{1, 2, ..., p\}, \mathbf{u}_i \in E - \Sigma) \Longrightarrow (\mathbf{u}_i \text{ dipende linearmente da } \Sigma) \tag{37}$$

Per il lemma 19, se $\Sigma'$ è linearmente indipendente, la (37) implica $p \leq r$. Viceversa, se $p > r$, $\Sigma'$ è linearmente dipendente. □

**Proposizione.** Sia $E$ uno spazio vettoriale su $K$.

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\},\ \Sigma' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\} \\ \text{due sistemi di ordine massimo}\end{array}\right) \Longrightarrow p = r$$

*Proof.* Per la proposizione 4 e per il lemma 19:

$$\forall \mathbf{u}_i \in \mathbf{\Sigma}',\ \mathbf{u}_i \text{ dipende linearmente da } \Sigma \Longrightarrow p \leq r$$
$$\forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{\Sigma},\ \mathbf{v}_i \text{ dipende linearmente da } \Sigma' \Longrightarrow r \leq p$$

cioè:

$$p \leq r,\ r \leq p) \Longleftrightarrow p = r$$

□

**Proposizione.** Sia $E$ uno spazio vettoriale su $K$ dotato di un sistema $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ di ordine massimo.

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r\} \\ \text{è linearmente indipendente}\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c}\Sigma' \text{ è un sistema di} \\ \text{ordine massimo}\end{array}\right.$$

*Proof.* $\forall \mathbf{v} \in E - \Sigma'$, $\Sigma' \cup \{\mathbf{v}\}$ è linearmente dipendente, quindi per la proposizione 4, $\mathbf{v}$ dipende linearmente da $\Sigma'$. In forza dell'arbitrarietà di $\mathbf{v} \in E - \Sigma'$, segue che $\Sigma'$ è un sistema di ordine massimo. □

# 5 Basi e dimensioni di uno spazio vettoriale

Sia $E$ uno spazio vettoriale sul campo $K$.

**Definizione.** Ogni sistema di ordine massimo è una ***base*** di $E$.

**Definizione.** Se $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ è una base di $E$, l'intero naturale $r$ è la ***dimensione*** di $E$ e si indica con $\dim E$.

Tipicamente una base di $E$ è indicata con:

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_r\} \equiv \{\mathbf{e}_i\} \tag{38}$$

Per ogni $\mathbf{v} \in E$:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + ... + \lambda_r \mathbf{e}_r \tag{39}$$

Gli scalari $(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_r)$ sono le **componenti** del vettore $\mathbf{v}$ nella base $\{\mathbf{e}_i\}$, e si indicano con $(v_1, v_2, ..., v_r)$, per cui:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + ... + v_r \mathbf{e}_r \tag{40}$$

**Esempio 20.** Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ sul campo reale $\mathbb{R}$. I ***vettori unitari*** di $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)\,, \; \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0)\,, ..., \; \mathbf{e}_r = (0, 0, ..., 1)\,,$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$.
Infatti preso ad arbitrio un vettore $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (v_1, 0, ..., 0) + (0, v_2, ..., 0) + ... (0, 0, ..., v_n) \\ &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + ... + v_n \mathbf{e}_n\end{aligned}$$

***

Siano $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}'_i\}$ due basi distinte del medesimo spazio vettoriale $E$ su $K$. Evidentemente:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik} \mathbf{e}_k \tag{41}$$

Qui $\alpha_{ik}$ compongono una matrice $R\,(r \times r)$ sul campo $K$. A loro volta i vettori $\mathbf{e}_i$ si esprimono come combinazione lineare dei vettori di $\{\mathbf{e}'_i\}$:

$$\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{r} \beta_{ik} \mathbf{e}'_k \tag{42}$$

In maniera analoga, i coefficienti $\beta_{ik}$ della combinazione lineare sono gli elementi di matrice di $R'\,(r \times r)$ sul campo $K$.
Sostituendo la (41) nella (42):

$$\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{r} \beta_{ik} \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj} \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \beta_{ik} \alpha_{kj} \mathbf{e}_j \tag{43}$$

Il vettore $\mathbf{e}_i$ si scrive:

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{r} \delta_{ij} \mathbf{e}_j,$$

essendo $\delta_{ki} = \delta_{ik}$ il *simbolo di Kronecher*:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = k \\ 0, \text{ se } i \neq k \end{cases}$$

La (43) diventa:

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \beta_{ik} \alpha_{kj} \mathbf{e}_j - \sum_{j=1}^{r} \delta_{ij} \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie nel primo termine:

$$\sum_{j=1}^{r} \left[ \sum_{k=1}^{r} (\beta_{ik} \alpha_{kj}) - \delta_{ij} \right] \mathbf{e}_j = \mathbf{0} \tag{44}$$

Per definizione di base, il sistema di vettori $\{\mathbf{e}_i\}$ è linearmente indipendente, donde la (44) è verificata se e solo se:

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_{ik} \alpha_{kj} = \delta_{ij} \quad \text{per} \quad j = 1, 2, ..., r$$

che è manifestamente equivalente alla relazione seguente:

$$R'R = \overline{1}$$

Allo stesso modo si dimostra che $RR' = \overline{1}$. Si conclude che:

$$R' = R^{-1}$$

Si consideri ora un vettore $\mathbf{v} \in E$ che ha componenti $(v_1, v_2, ..., v_r)$ in $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{r} v_k \mathbf{e}_k \tag{45}$$

Il medesimo vettore ha componenti $(v_1', v_2', ..., v_r')$ in $\{\mathbf{e}_i'\}$:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{r} v_k' \mathbf{e}_k' \tag{46}$$

Confrontando le (45)-(46) e tenendo conto della (42):

$$\sum_{i=1}^{r} v_i' \mathbf{e}_i' = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} v_k \beta_{kj} \mathbf{e}_j'$$

Eseguendo negli indici muti la sostituzione $(k, j) \to (j, i)$ e dopo una serie di passaggi:

$$v_i' = \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} v_j \quad \text{per } i = 1, 2, ..., r \tag{47}$$

Indichiamo con $\mathbf{V}$ la matrice $(r \times 1)$ i cui elementi sono le componenti di $\mathbf{v}$ in $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{V} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_r \end{pmatrix}, \tag{48}$$

Quindi:

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ ... \\ v_r' \end{pmatrix} \tag{49}$$

Con le posizioni (48)-(49), la (47) si scrive:

$$\mathbf{V}' = R^{-1}\mathbf{V}, \tag{50}$$

che può essere invertita:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{V}' \tag{51}$$

Le (50)-(51) sono le formule del cambiamento di base $\{\mathbf{e}_i\} \to \{\mathbf{e}_i'\}$.

**Esempio 21.** Assegnato il vettore $\mathbf{v} = (1, 2)$ nella base $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, si determinino le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathbf{e}_1' = (1, 1)$, $\mathbf{e}_2' = (1, -1)$.

**Soluzione 22.** La matrice $R$ è:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det R = -1 - 1 = -2$$

la cui aggiunta è:

$$aggR = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'inversa [eq. (**??**)]:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

Per la (50):

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

quindi:

$$v'_1 = \frac{3}{2}, v'_2 = -\frac{1}{2}$$

**Esempio 23.** Assegnato il vettore $\mathbf{v} = (3, 2, 2)$ nella base $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si determinino le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathbf{e}'_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{e}'_2 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{e}'_3 = (0, 1, 1)$.

**Soluzione 24.** La matrice $R$ è:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inversa è:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Quindi il vettore colonna nella nuova base:

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si conclude che le componenti di $\mathbf{v}$ nella nuova base sono:

$$v'_1 = 1,\ v'_2 = 0,\ \ v'_3 = 2$$

# 6 Esercizi proposti

1. Assegnati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$:

   $$\mathbf{v}_1 = (2, 4)\,, \mathbf{v}_2 = (1, 2)\,, \mathbf{v}_3 = (-1, 1)\,, \mathbf{v}_4 = (3, 6)\,, \mathbf{v}_5 = (4, 5)\,, \mathbf{v}_6 = (3, 9)\,,$$

   provare che: 1) $\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_4$ sono proporzionali a $\mathbf{v}_1$; 2) $\mathbf{v}_5$ dipende linearmente da $\Sigma_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$; 3) $\mathbf{v}_4$ dipende linearmente da $\Sigma_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$; 4) $\mathbf{v}_6$ dipende linearmente da $\Sigma_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5\}$; 5) $\mathbf{v}_3$ non dipende linearmente da $\Sigma_2$.

2. Assegnati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)\,,\ \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)\,,\ \mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)\,,\ \mathbf{v}_4 = (1, 1, 1)\,,\ \mathbf{v}_5 = (2, 1, -2)\,,\ \mathbf{v}_6 = (1, 5, 4)\,,$$

provare che: 1) $\mathbf{v}_4$,$\mathbf{v}_5$ non dipendono linearmente $\Sigma_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$; 2) $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_6$ dipendono linearmente da $\Sigma_1$; 3) $\mathbf{v}_5$ dipende linearmente da $\Sigma_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$; 4) $\mathbf{v}_6$ dipende linearmente da $\Sigma_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

3. Provare che il seguente sistema di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}\,,$$

essendo: $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 1)$, è linearmente indipendente. Esprimere quindi il vettore $\mathbf{v} = (1, -2, 5)$ come combinazione lineare dei vettori di $\Sigma$.

4. Assegnato il sistema i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}\,,$$

essendo: $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 1)$, scrivere il vettore $\mathbf{v} = (2, -5, 3)$ come combinazione lineare dei vettori di $\Sigma$.

5. Provare che il seguente sistema di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}\,,$$

essendo: $\mathbf{v}_1 = (3, 0, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -1, -5)$, è linearmente indipendente. Determinare poi per quali valori del parametro reale $k$ il vettore $\mathbf{v} = (1, -2, k)$ si esprime come combinazione lineare dei vettori di $\Sigma$.

6. Sia $\Sigma = \{u(x), v(x), w(x)\}$ un sistema di vettori di $\mathcal{P}_2[x]$ (spazio vettoriale i cui vettori sono i polinomi su $\mathbb{R}$ di grado $\leq 2$).

$$u(x) = x^2 - 2x + 5,\ v(x) = 2x^2 - 3x,\ \ w(x) = x + 3$$

Dimostrare che $\Sigma$ è linearmente indipendente ed esprimere il vettore $p(x) = x^2 + 4x - 3$ come combinazione lineare dei vettori di $\Sigma$.

7. Assegnati i vettori di $\mathcal{P}_2[x]$:

$$\begin{array}{lll} a(x) = x^2 - x + 1 & b(x) = x^2 + x - 1 & c(x) = x^2 \\ d(x) = -x + 1 & e(x) = 2x^2 - x + 2 & f(x) = x^2 + x - 2 \end{array},$$

mostare che: 1) $b(x)$ non è proporizionale a $a(x)$; 2) $c(x)$ dipende linearmente da $\Sigma_1 = \{a(x), b(x)\}$; 3) $e(x)$ non dipende linearmente da $\Sigma_1$; 4) $e(x)$ dipende linearmente da $\Sigma_2 = \{a(x), b(x), c(x)\}$; 5) $d(x)$ dipende linearmente da $\Sigma_2$; 6) $f(x)$ dipende linearmente da $\Sigma_3 = \{a(x), b(x), e(x)\}$.

8. Provare che il sistema $\Sigma = \left\{ e_1(x) = 1,\, e_2(x) = x-1,\, e_3(x) = (x-1)^2 \right\}$ è una base di $\mathcal{P}_2[x]$, e trovare le componenti di $p(x) = 4x^2 - x + 1$ in $\Sigma$.

9. Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si considerino le basi:

$$\begin{array}{c} \mathbf{e}_1 = (1,0,0)\,,\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0)\,,\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1) \\ \mathbf{e}'_1 = (1,1,1)\,,\ \mathbf{e}'_2 = (1,1,0)\,,\ \mathbf{e}'_3 = (1,0,0) \end{array}$$

   Determinare le componenti dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nella base $\{\mathbf{e}'_i\}$, essendo note le loro componenti nella base $\{\mathbf{e}_i\}$: $\mathbf{v} = (4,-3,2)$, $\mathbf{w} = (a,b,c)$.

10. Assegnato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri l'insieme:

$$H = \left\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : 2v_1 + v_2 - v_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

   Dimostrare che $H$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, determinandone una base.

## 6.1 Soluzioni

1. Il quesito 1 si risolve banalmente:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1, \ \ \mathbf{v}_4 = \frac{3}{2}\mathbf{v}_1$$

   Quesito 2:

$$\mathbf{v}_5 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_3$$

   cioè:

$$\lambda(2,4) + \mu(-1,1) = (4,5) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\lambda - \mu = 4 \\ 4\lambda + \mu = 5 \end{array} \right. ,$$

   che ammette l'unica soluzione $(\lambda, \mu) = (3/2, -1)$, quindi:

$$\mathbf{v}_5 = \frac{3}{2}\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$$

   Quesito 3:

$$\mathbf{v}_4 = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2,$$

   cioè:

$$\alpha(2,4) + \beta(1,2) = (3,6) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + 2\beta = 6 \end{array} \right. ,$$

   che ammette $\infty^1$soluzioni $(\alpha, \beta) = (\alpha, 3 - 2\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, quindi:

$$\mathbf{v}_4 = 3\mathbf{v}_2 - \alpha \mathbf{v}_1, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Quesito 4:

$$\mathbf{v}_6 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_3 + \nu \mathbf{v}_4,$$

cioè:

$$\lambda (2,4) + \mu (-1,1) + \nu (4,5) = (3,9) \iff \begin{cases} 2\lambda - \mu + 4\nu = 3 \\ 4\lambda + \mu + 5\nu = 9 \end{cases},$$

che ammette $\infty^1$soluzioni $(\lambda, \mu, \nu) = \left(2 - \frac{3}{2}\nu, 1 + \nu, \nu\right)$, $\forall \nu \in \mathbb{R}$, quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_6 &= \left(2 - \frac{3}{2}\nu\right) \mathbf{v}_1 + (1 + \nu) \mathbf{v}_3 + \nu \mathbf{v}_5 \\ &= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \nu \left(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5 - \frac{3}{2}\mathbf{v}_1\right), \ \forall \nu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Quesito 5:

$$\mathbf{v}_3 = \gamma \mathbf{v}_1 + \delta \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\gamma (2,4) + \delta (1,2) = (-1,1) \iff \begin{cases} 2\gamma + \delta = -1 \\ 4\gamma + 2\delta = 1 \end{cases}$$

Tale sistema è incompatibile $\Longrightarrow \nexists (\gamma, \delta) : \mathbf{v}_3 = \gamma \mathbf{v}_1 + \delta \mathbf{v}_2$.

2. Quesito 1:

$$\mathbf{v}_4 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\lambda (1,2,1) + \mu (1,1,0) = (1,1,1) \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 0 = 1 \end{cases}$$

Tale sistema lineare è incompatibile, quindi $\nexists (\lambda, \mu) : \mathbf{v}_4 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$.

$$\mathbf{v}_5 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\lambda (1,2,1) + \mu (1,1,0) = (2,1,-2) \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 2\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 0 = -2 \end{cases}$$

Tale sistema lineare è incompatibile, quindi $\nexists (\lambda, \mu) : \mathbf{v}_5 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$.

Quesito 2:

$$\mathbf{v}_3 = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\lambda(1,2,1)+\mu(1,1,0)=(0,1,1)\Longleftrightarrow\begin{cases}\lambda+\mu=0\\2\lambda+\mu=1\\\lambda+0=1\end{cases}$$

La terza equazione di tale sistema è combinazione lineare delle prime due, per cui:

$$\begin{cases}\lambda+\mu=0\\2\lambda+\mu=1\end{cases}\Longrightarrow(\lambda,\mu)=(1,-1)$$

Quindi:

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$$

Imponiamo che:

$$\mathbf{v}_6=\alpha\mathbf{v}_1+\beta\mathbf{v}_2$$

cioè:

$$\alpha(1,2,1)+\beta(1,1,0)=(1,5,4)\Longleftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=1\\2\alpha+\beta=5\\\alpha+0=4\end{cases}$$

La terza equazione di tale sistema è combinazione lineare delle prime due, per cui:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\2\alpha+\beta=5\end{cases}\Longrightarrow(\alpha,\beta)=(4,-3),$$

quindi:

$$\mathbf{v}_6=4\mathbf{v}_1-3\mathbf{v}_2$$

Quesito 3:

$$\mathbf{v}_5=\lambda\mathbf{v}_1+\mu\mathbf{v}_2+\nu\mathbf{v}_4,$$

cioè:

$$\lambda(1,2,1)+\mu(1,1,0)+\nu(1,1,1)=(2,1,-2)\Longleftrightarrow\begin{cases}\lambda+\mu+\nu=2\\2\lambda+\mu+\nu=1\\\lambda+0+\nu=-2\end{cases}$$

Tale sistema è compatibile e determinato: $\exists!\,(\lambda,\mu,\nu)=(-1,4-1)$, donde:

$$\mathbf{v}_5=-\mathbf{v}_1+4\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_4$$

Quesito 4:

$$\mathbf{v}_6=\lambda\mathbf{v}_1+\mu\mathbf{v}_2+\nu\mathbf{v}_3,$$

cioè:

$$\lambda(1,2,1)+\mu(1,1,0)+\nu(0,1,1)=(1,5,4)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\lambda+\mu+0=1\\2\lambda+\mu+\nu=5\\\lambda+0+\nu=4\end{array}\right.$$

La terza equazione di tale sistema è combinazione lineare delle prime due, per cui:

$$\left\{\begin{array}{c}\lambda+\mu+0=1\\2\lambda+\mu+\nu=5\end{array}\right.$$

Tale sistema è compatibile e indeterminato. Precisamente: $p=2$, $n=3\Longrightarrow\exists\infty^1$soluzioni:

$$(\lambda,\mu,\nu)=(4-\nu,\nu-3,\nu)\,,\ \forall\nu\in\mathbb{R}$$

Quindi il vettore $\mathbf{v}_6$ si esprime in $\infty^1$ modi distinti come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}_6=(4-\nu)\,\mathbf{v}_1+(\nu-3)\,\mathbf{v}_2+\nu\mathbf{v}_3$$

**Osservazione.** Esistono $\infty^1$ combinazioni lineari, poiché il sistema $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ è linearmente dipendente. Infatti il sistema omogeneo:

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha+\beta+0=0\\2\alpha+\beta+\gamma=0\\\alpha+0+\gamma=0\end{array}\right.,$$

ha caratteristica $p=2$, per cui ammette $\infty^1$ autosoluzioni $\Longrightarrow\exists\,(\alpha,\beta,\nu)\neq(0,0,0):\alpha\mathbf{v}_1+\beta\mathbf{v}_2+\gamma\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$.

3. Abbiamo l'equazione vettoriale:

$$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,2,3)+\lambda_3(2,-1,1)=(0,0,0)$$

che scritta componente per componente conduce al sistema omogeneo:

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3&=0\\\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3&=0\\\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3&=0\end{aligned}\tag{52}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&-1\\1&3&1\end{pmatrix}$$

Abbiamo: $\det A = 5 \Longrightarrow$ il sistema (52) ammette unicamente la soluzione banale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$, per cui il sistema $\Sigma$ è linearmente indipendente.

Scriviamo la combinazione lineare:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

equivalente a:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= -2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 5 \end{aligned} \tag{53}$$

Tale sistema è compatibile e determinato. La soluzione è $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-6, 3, 2)$. Perciò: $\mathbf{v} = -6\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$.

4. Il sistema $\Sigma = \{(1, -3, 2), (2, -4, -1), (1, -5, 7)\}$ è linearmente dipendente se il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0, \end{aligned} \tag{54}$$

è banale. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Risulta: $\det A = 0 \Longrightarrow p < n$, essendo $p$ la caratteristica del sistema e $n = 3$ il numero di incognite. Quindi il sistema (54) ammette $\infty^{n-p}$ soluzioni non nulle, perciò $\exists\, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$, da ciò segue che $\Sigma$ è linearmente dipendente e che non è possibile esprimere il vettore $\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei vettori di $\Sigma$.

5. $\nexists \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2$, quindi per la proposizione 2 il sistema $\Sigma$ è linearmente indipendente. Scriviamo:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2,$$

ottenendo il sistema lineare:

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1 \\ 0 - \lambda_2 &= -2 \\ -2\lambda_1 - 5\lambda_2 &= k \end{aligned} \tag{55}$$

La matrice dei coefficienti e la matrice dei coefficienti più termini noti:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; M(k) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & k \end{pmatrix};$$

Risulta: $p = r(A) = 2$. Affinchè il sistema sia compatibile, deve essere $r(A) = r(M)$. Poniamo:

$$F(k) \stackrel{def}{=} \det M(k) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & k \end{vmatrix} = -3(k+8)$$

È facile convincersi che $r(A) = r(M) = 2 \Longleftrightarrow F(k) = 0 \Longleftrightarrow k = -8 \stackrel{def}{=} k_*$. Ed è questo il valore di $k$ tale che:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Per $k = k_*$, il sistema (55) ammette l'unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 2)$, per cui:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$$

6. Il sistema $\Sigma$ è linearmente indipendente se:

$$\lambda u(x) + \mu v(x) + \nu w(x) = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$$

Sostituendo le espressioni analitiche di $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ e ordinando i vari termini:

$$(\lambda + 2\mu) x^2 + (-2\lambda - 3\mu + \nu) x + (5\lambda + 3\nu) = 0 \tag{56}$$

La (56) equivale al sistema:

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu + 0 &= 0 \\ -2\lambda - 3\mu + \nu &= 0 \\ 5\lambda + 0 + 3\nu &= 0, \end{aligned} \tag{57}$$

che è banale: $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0)$, per cui $\Sigma$ è linearmente indipendente.

Scriviamo:

$$p(x) = \lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x) + \lambda_3 \nu(x),$$

cioè:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 0 &= 1 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 4 \\ 5\lambda_1 + 0 + 3\lambda_3 &= -3, \end{aligned} \tag{58}$$

Il sistema lineare (58) è compatibile e determinato. La soluzione è $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-3, 2, 4)$; pertanto:

$$p(x) = -3u(x) + 2v(x) + 4\nu(x)$$

7. 1) $b(x)$ e $a(x)$ sono proporzionali se:

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R} : b(x) = \lambda a(x)) \Longleftrightarrow x^2 + x - 1 = \lambda\left(x^2 - x + 1\right)$$

equivalente a:

$$(\lambda - 1)x^2 + (-\lambda - 1)x + (\lambda + 1) = \mathbf{0}, \tag{59}$$

essendo $\mathbf{0}$ il polinomio nullo (vettore nullo). La (59) è vera se, e solo se:

$$\begin{aligned} \lambda - 1 &= 0 \\ \lambda + 1 &= 0 \\ \lambda + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Tale sistema è manifestamente incompatibile, donde $\nexists \lambda : b(x) = \lambda(x)$.

2). Scriviamo:

$$c(x) = \lambda a(x) + \mu b(x)$$

equivalente a:

$$(\lambda + \mu - 1)x^2 + (-\lambda + \mu)x + (\lambda - \mu) = \mathbf{0},$$

da cui il sistema lineare:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Longrightarrow (\lambda, \mu) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

quindi:

$$c(x) = \frac{1}{2}[a(x) + b(x)]$$

3). Scriviamo:

$$e(x) = \lambda a(x) + \mu b(x)$$

Sostituendo le espressioni di $a(x)$, $b(x)$, $e(x)$:

$$(\lambda + \mu - 2)x^2 + (-\lambda + \mu + 1)x + (\lambda - \mu - 2) = \mathbf{0},$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 2 \end{cases} \Longrightarrow \nexists (\lambda, \mu),$$

per cui $e(x)$ non è combinazione lineare di $\Sigma_1$.

4). Scriviamo:

$$e(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) + \nu c(x)$$

Sostituendo le espressioni di $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $e(x)$:

$$(\lambda + \mu + \nu - 2)x^2 + (-\lambda + \mu + 1)x + (\lambda - \mu - 2) = \mathbf{0},$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 2 \\ \lambda - \mu + 0 = 0 \\ \lambda - \mu + 0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 2 \\ \lambda - \mu + 0 = 0 \end{cases},$$

che ammette $\infty^1$ soluzioni:

$$(\lambda, \mu, \nu) = \left(1 - \frac{\nu}{2}, 1 - \frac{\nu}{2}, \nu\right), \ \forall \nu \in \mathbb{R}$$

Quindi:

$$e(x) = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) a(x) + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) b(x) + \nu c(x)$$

**Osservazione.** Il vettore $e(x)$ si esprime in infiniti modi come combinazione lineare dei vettori $\Sigma_2 = \{a(x), b(x), c(x)\}$, poiché tale sistema è linearmente dipendente. Infatti:

$$\alpha a(x) + \beta b(x) + \gamma c(x) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 0 = 0 \\ \alpha - \beta + 0 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette $\infty^1$ soluzioni non banali, quindi $\exists \infty^1 \ (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0) : \alpha a(x) + \beta b(x) + \gamma c(x) = \mathbf{0}$

5). Scriviamo:

$$d(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) + \nu c(x)$$

Sostituendo le espressioni di $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$:

$$(\lambda + \mu + \nu) x^2 + (-\lambda + \mu + 1) x + (\lambda - \mu - 1) = \mathbf{0},$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu + 0 = 1 \\ \lambda - \mu + 0 = 1 \end{cases},$$

cheè compatibile e indeterminato con $\infty^1$ soluzioni:

$$(\lambda, \mu, \nu) = \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right), -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\nu}{2}\right), \nu\right), \forall \nu \in \mathbb{R}$$

Quindi:

$$d(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) a(x) + \left(1 + \frac{\nu}{2}\right) b(x)\right] + \nu c(x)$$

6). Esprimiamo il polinomio $f(x)$ come combinazione lineare di $\Sigma_2 = \{a(x), b(x), e(x)\}$:

$$f(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) + \nu e(x)$$

cioè:

$$(\lambda + \mu + 2\nu - 1) x^2 + (-\lambda + \mu - \nu - 1) x + (\lambda - \mu + 2\nu + 2) = \mathbf{0},$$

quindi:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 1 \\ -\lambda + \mu - \nu = 1 \\ \lambda - \mu + 2\nu = -2 \end{cases}$$

Tale sistema è compatibile e determinato:

$$(\lambda, \mu, \nu) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1\right),$$

donde:

$$f(x) = \frac{3}{2}[a(x) + b(x)] - e(x)$$

8. Scriviamo:
$$\lambda_1 e_1(x) + \lambda_2 e_2(x) + \lambda_3 e_3(x) = \mathbf{0}$$
Sostituendo le espressioni analitiche di $e_i(x)$:
$$\lambda_1 + \lambda_2(x-1) + \lambda_3\left(x^2 - 2x + 1\right) = \mathbf{0},$$
equivalente al sistema lineare omogeneo:
$$\begin{cases} 0 + 0 + \lambda_3 = 0 \\ 0 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases},$$
che ammette l'unica soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$, donde $\Sigma$ è una base. Scriviamo $p(x)$:
$$p(x) = \mu_1 e_1(x) + \mu_2 e_2(x) + \mu_3 e_3(x)$$
Ottenendo:
$$\begin{cases} 0 + 0 + \mu_3 = 4 \\ 0 + \mu_2 - 2\mu_3 = -1 \\ \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (4, 7, 4)$$
Quindi:
$$p(x) = 4e_1(x) + 7e_2(x) + 4e_3(x)$$
Si conclude che la terna $(4, 7, 4)$ sono le componenti del "vettore" $p(x)$ nella base $\Sigma$.

9. Passando ai vettori colonna:
$$\mathbf{V}' = R^{-1}\mathbf{V}, \;\; \mathbf{W}' = R^{-1}\mathbf{W},$$
$R^{-1}$ è la matrice inversa di:
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Abbiamo:
$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{W}' = \begin{pmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{pmatrix},$$

da cui le componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nella nuova base:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (2, -5, 7) \\ \mathbf{w} &= (c, b-c, a-b) \end{aligned}$$

10. $\forall \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{v}' = (v_1', v_2', v_3') \in H$,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{v}' &= (v_1 + v_1', v_2 + v_2', v_3 + v_3') \\ 2(v_1 + v_1') &+ (v_2 + v_2') - (v_3 + v_3') \\ &= (2v_1 + v_2 - v_3) + (2v_1' + v_2' - v_3') \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in H$,

$$2(\lambda v_1) + (\lambda v_2) - (\lambda v_3) = \lambda (2v_1 + v_2 - v_3) = 0$$

da cui $H$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Per ricercare una sua base risolviamo l'equazione lineare omogenea:

$$2v_1 + v_2 - v_3 = 0,$$

nelle incognite $v_1, v_2, v_3$. Essa ammette $\infty^2$ soluzioni non banali:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, v_3) &= (v_1, v_2, 2v_1 + v_2) \\ &= (v_1, 0, 2v_1) + (0, v_2, v_2) \\ &= v_1 (1, 0, 2) + v_2 (0, 1, 1) \end{aligned}$$

Quindi $\dim H = 2$, e una base di $H$ è $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$.