Applicazione delle sostituzioni trigonometriche ed iperboliche (File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Tali sostituzioni si applicano ad integrali di funzioni irrazionli del tipo

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \tag{1}$$

dove $\mathcal{R}$ denota una funzione razionale. Prima di eseguire la sostituzione si trasforma il trinomio ax^2+bx+c nella somma è nella differenza di due quadrati, dopodiché attraverso una variabile ausiliaria ξ, l'integrale (1) assume una delle seguenti forme:

$$\begin{aligned} 1) & \int \mathcal{R}\left(\xi, \sqrt{\alpha^2-\xi^2}\right) d\xi \\ 2) & \int \mathcal{R}\left(\xi, \sqrt{\alpha^2+\xi^2}\right) d\xi \\ 3) & \int \mathcal{R}\left(\xi, \sqrt{\xi^2-\alpha^2}\right) d\xi \end{aligned}$$

Le corrispondenti sostituzioni sono:

$$\begin{gathered} 1)\ \xi = \alpha \sin t \quad \text{oppure } \xi = \alpha \tanh t \\ 2)\ \xi = \alpha \tan t \quad \text{oppure } \xi = \alpha \sinh t \\ 3)\ \xi = \frac{\alpha}{\cos t} \quad \text{oppure } \xi = \alpha \cosh t \end{gathered}$$

***

Esempio
Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+4}}$$

Scriviamo:

$$x^2+4x+4 = (x+2)^2+1$$

Quindi siamo nel caso 2:

$$x+2 = \tan t \Longrightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+4}} &= \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t}} \\ &= \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C \end{aligned}$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin t} &= \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan t}\\ &= \frac{\sqrt{1+(x+2)^2}}{x+2}\\ &= \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}\end{aligned}$$

Finalmente il risultato:

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+4x+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} + C$$