

**Sostituzioni di Eulero**  
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Le *sostituzioni di Eulero* vengono utilizzate per il calcolo di integrali del tipo:

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx \quad (1)$$

Qui il simbolo  $\mathcal{R}$  denota una funzione razionale. Seguiamo le definizioni date in [1].

1. La *prima sostituzione di Eulero* si applica quando  $a > 0$ . Precisamente, esprimendo  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  attraverso una variabile ausiliaria  $t$ , l'integrando si riduce ad una funzione razionale di  $t$ . Poniamo:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} + t \quad (2)$$

Senza perdita di generalità prendiamo il segno (+) nella (2), per cui:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{ax}t + t^2$$

Risolviendo rispetto a  $x$ :

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{at}}, \quad (3)$$

cosicché  $x$  è una funzione razionale di  $t$ . Ciò implica:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{at}} + t, \quad (4)$$

cioè anche  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  è una funzione razionale di  $t$ . Differenziamo ora la funzione  $x(t)$  data dalla (3):

$$dx = \frac{-2\sqrt{at}^2 + 2bt - 2c\sqrt{a}}{(b - 2\sqrt{at})^2} dt \quad (5)$$

Sostituendo (4)-(5) nella (1):

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx \\ &= \int \mathcal{R}\left(\frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{at}}, \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{at}} + t\right) \cdot \frac{-2\sqrt{at}^2 + 2bt - 2c\sqrt{a}}{(b - 2\sqrt{at})^2} dt, \end{aligned} \quad (6)$$

per cui abbiamo ridotto l'integrale (1) di una funzione irrazionale, nell'integrale di una funzione razionale della variabile  $t$ .

Esempio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}}$$

Eseguiamo la sostituzione di Eulero prendendo il segno  $(-)$  nella (2):

$$\sqrt{x^2 + x} = -x + t,$$

che risolta rispetto a  $x$ :

$$x = \frac{t^2 - c}{2t}$$

Da ciò segue:

$$\sqrt{x^2 + x} = \frac{t^2 + c}{2t}$$

Differenziando:

$$dx = \frac{t^2 + c}{2t^2} dt$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} &= \int \frac{\frac{t^2+c}{2t^2} dt}{\frac{t^2+c}{2t}} \\ &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln |t| + C \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 + c} \right| + C \end{aligned}$$

2. La *seconda sostituzione di Eulero* si applica per  $c > 0$ . Il cambio di variabile è:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} \quad (7)$$

La sostituzione (7) riduce l'integrale (1) all'integrale di una funzione razionale di  $t$ . Per dimostrare l'asserto prendiamo (senza perdita di generalità) il segno  $(+)$  nella (7), che elevata al quadrato porge:

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}xt + c,$$

che risolta rispetto a  $x$ :

$$x = 0, \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}$$

Prendiamo la soluzione non banale:

$$x = \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2} \quad (8)$$

Da ciò segue:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{2\sqrt{ct^2} - bt}{a - t^2} + \sqrt{c}$$

Cioè  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  è una funzione razionale di  $t$ . Differenziando (8):

$$dx = \frac{2t^2\sqrt{c} - 2bt + 2a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx \\ &= \int \mathcal{R}\left(\frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}, \frac{2\sqrt{ct^2 - bt}}{a - t^2} + \sqrt{c}\right) \cdot \frac{2t^2\sqrt{c} - 2bt + 2a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2} dt, \end{aligned} \quad (9)$$

donde l'asserto.

Esempio:

$$\int \frac{(1 - \sqrt{x^2 + x + 1})^2}{x^2\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$$

Scriviamo:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = xt + 1,$$

che risolta rispetto a  $x$ :

$$x = -\frac{t^2 - t + 1}{t^2 - 1}$$

Perciò:

$$1 - \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{2t^2 - t}{t^2 - 1}$$

Differenziando  $x(t)$

$$dx = 2\frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} & \int \frac{(1 - \sqrt{x^2 + x + 1})^2}{x^2\sqrt{x^2 + x + 1}} dx \\ &= -2 \int \frac{\frac{t^2(2t-1)^2}{(t^2-1)^2} \cdot \frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2}}{\frac{(2t-1)^2}{(t^2-1)^2} \cdot \frac{t^2-t+1}{t^2-1}} dt \\ &= -2 \int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt \\ &= -2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt \\ &= -2t + \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C \\ &= -\frac{2(\sqrt{x^2 + x + 1} - 1)}{x} + \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x - \sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \right| + C \end{aligned}$$

3. La *terza sostituzione di Eulero* si applica quando  $\Delta > 0$ , essendo  $\Delta$  il discriminante del trinomio  $ax^2 + bx + c$ . La sostituzione è:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \xi_1)t, \quad (10)$$

dove  $\xi_1$  è una delle radici (reali) di  $ax^2 + bx + c$ . Se indichiamo con  $\xi_2 \neq \xi_1$  la seconda radice, deve essere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \xi_1)(x - \xi_2),$$

onde la (10) elevata al quadrato:

$$a(x - \xi_1)(x - \xi_2) = (x - \xi_1)t,$$

e risolvendo rispetto a  $x$ :

$$x = \frac{a\xi_2 - \xi_1 t^2}{a - t^2}, \quad (11)$$

cosicché  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  è una funzione razionale di  $t$ :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -a \frac{(\xi_1 - \xi_2)t}{a - t^2} \quad (12)$$

Il differenziale di  $x$ :

$$dx = \frac{2at(\xi_2 - \xi_1)}{(a - t^2)^2} dt \quad (13)$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \\ &= 2a(\xi_2 - \xi_1) \int \mathcal{R}\left(\frac{a\xi_2 - \xi_1 t^2}{a - t^2}, -a \frac{(\xi_1 - \xi_2)t}{a - t^2}\right) \frac{t}{(a - t^2)^2} dt, \end{aligned} \quad (14)$$

donde l'asserto.

Esempio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

Osserviamo che tale integrale può essere calcolato con i metodi già visti per gli integrali contenenti un trinomio semplice di secondo grado. Calcoliamo comunque con il metodo delle sostituzioni di Eulero. Qui è:

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1),$$

per cui applichiamo la terza sostituzione di Eulero:

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = (x + 3)t$$

Risolvendo rispetto a  $x$ :

$$x = \frac{1 + 3t^2}{1 - t^2},$$

onde:

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \left( \frac{1 + 3t^2}{1 - t^2} + 3 \right) t = \frac{4t}{1 - t^2}$$

Il  $dx$ :

$$dx = \frac{10t}{(1 - t^2)^2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} &= 2 \int \frac{dt}{1 - t^2} \\ &= \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1 + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}}{1 - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}} \right| + C \end{aligned}$$

## References

- [1] Piskunov N., *Calcolo differenziale ed integrale (vol. 1)*. Editori Riuniti