

Ripassiamo alcune considerazioni utili

matrice	tabella di elementi ordinati per righe e colonne
matrice quadrata	<i>matrice quadrata di ordine n</i> : il numero n delle righe è uguale a quello delle colonne <i>diagonale principale</i> : insieme degli elementi che hanno il numero di riga uguale al numero di colonna
matrice identica	matrice quadrata in cui: $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$
matrice nulla	matrice quadrata con tutti gli elementi nulli
matrice trasposta	di una matrice A : matrice che si ottiene dalla matrice A scambiando, ordinatamente, le righe con le colonne
SOMMA DI MATRICI	<ul style="list-style-type: none">è definita solo per matrici con ugual numero di righe e di colonnesi effettua addizionando tra loro gli elementi di ugual posto
PRODOTTO DI MATRICI	<ul style="list-style-type: none">si può effettuare solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda.ogni elemento $c(i,j)$ della matrice prodotto è il prodotto della riga i della prima matrice per la colonna j della seconda matricenon vale la proprietà commutativa

Data una matrice quadrata A di ordine n e fissato un elemento $a_{i,j}$, si definisce

Minore complementare dell'elemento $a_{i,j}$	determinante della matrice che si ottiene sopprimendo la i -esima riga e la j -esima colonna, al cui incrocio si trova l'elemento $a_{i,j}$; si indica con $M_{i,j}$
Complemento algebrico dell'elemento $a_{i,j}$	il minore complementare o il suo opposto, a seconda che la somma $i+j$ sia pari o dispari; in simboli lo si indica con la scrittura $A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$
Determinante di A	somma dei prodotti tra gli elementi di una riga (o di una colonna) e i corrispondenti complementi algebrici
Matrice dei complementi algebrici	la matrice A^* i cui elementi sono i complementi algebrici degli elementi della matrice assegnata
Matrice singolare	matrice quadrata con determinante nullo

TEOREMA

Se A è una matrice quadrata di ordine n , non singolare allora esiste la sua matrice inversa A^{-1} .
Indicata con A^* la matrice dei complementi algebrici degli elementi di A e con A^{*T} la trasposta di A^* , vale l'uguaglianza:

$$A^{-1} = A^{*T} / \det(A)$$

Dal teorema si evincono i passaggi necessari per la costruzione della matrice inversa di una matrice A non singolare:

- costruzione della matrice A^* dei complementi algebrici di A
- costruzione della matrice A^{*T} , trasposta di A^*
- costruzione della matrice inversa A^{-1} .

RANGO DI UNA MATRICE

Approfondiamo lo studio delle matrici e delle loro proprietà associando ancora alle matrici, siano esse quadrate o rettangolari, un numero che ne identifica una caratteristica, cui impareremo a dare un significato nello studio dei sistemi lineari.

Sia assegnata una matrice A di tipo (m, n)

Sottomatrice quadrata di ordine p ogni matrice quadrata ottenuta selezionando p righe e p colonne, essendo $p \leq$ minimo (m, n) e considerando gli elementi di A posti sulle righe e sulle colonne selezionate

Minore di ordine p di A il determinante di una qualunque sottomatrice quadrata di ordine p estratta da A

Rango o caratteristica di A il massimo ordine dei minori non nulli che si possono estrarre da A
Il rango di una matrice non è altro che il numero di righe o di colonne linearmente indipendenti

Nel seguito indicheremo con r il rango di una matrice

Il **rango** di una matrice è sempre determinabile, perché il massimo ordine dei minori estraibili da A è $p =$ minimo (m, n) . Se tutti i minori di ordine p sono nulli, il rango di A è minore di p e per determinarne il valore bisogna allora valutare tutti i minori di ordine $p-1$ (con $p-1 > 0$). Se almeno uno di essi è non nullo, allora $r = p-1$, altrimenti il rango di A ha valore inferiore. Se sono nulli tutti i minori estratti da A di ordine $p \geq 2$, si considerano gli elementi di A come minori del primo ordine: in questo caso diremo che la matrice ha rango 1 se almeno uno dei suoi elementi non è nullo e ha rango 0 se tutti i suoi elementi sono nulli.

I calcoli necessari a determinare il rango di una matrice sono generalmente laboriosi per l'elevato numero di minori estratti che deve essere considerato. È naturale chiedersi se è proprio necessario considerare *tutti i minori estratti* da una matrice per determinarne il rango: risponde alla domanda il **Teorema di Kronecker**, per il quale si considera un procedimento di calcolo del rango che inverte il cammino sino ad ora seguito.

Partendo dalla definizione di rango di una matrice possiamo dire che una matrice A ha rango r se:

- esiste almeno un minore estratto da A , di ordine r e non nullo;
- tutti i minori estratti da A di ordine $r+1$ sono nulli.

Definizione - Assegnata una matrice A di tipo (m, n) si definisce **matrice orlata** una matrice di tipo $(m+1, n+1)$ ottenuta accostando alla matrice assegnata una riga e una colonna
In particolare ogni matrice può essere vista come ottenuta orlando una sua sottomatrice.

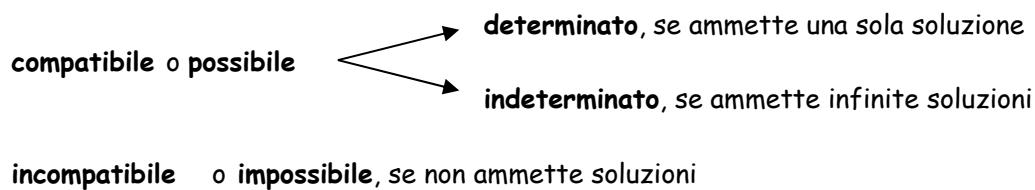
Teorema di Kronecker

Una matrice A ha rango r se e solo se:

- esiste almeno una sottomatrice quadrata A' di ordine r estratta da A il cui determinante è non nullo;
- le sottomatrici quadrate di A di ordine $r+1$ ottenute orlando A' in tutti i modi possibili hanno determinante nullo.

SISTEMI LINEARI

- Un sistema di equazioni di primo grado è anche chiamato **sistema lineare**
- Un sistema si dice scritto **in forma canonica** se le incognite sono tutte a sinistra in forma ordinata ed i termini noti sono a destra del predicato di uguaglianza.
- Se tutti i termini noti sono nulli il sistema si dice **omogeneo**; si dice **non omogeneo** quando almeno un termine noto non è nullo
- Ogni sistema di equazioni lineari può essere:



Finora nelle occasioni in cui abbiamo risolto sistemi implicitamente si richiedeva di avere tante equazioni quante incognite: in generale un sistema lineare potrà avere un numero arbitrario m di equazioni e un numero arbitrario n di incognite, con m maggiore, uguale o minore di n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ovvero in forma matriciale **A • X = B** essendo

- **A** la **matrice dei coefficienti** (o matrice incompleta)
- **X** la matrice colonna formata con le incognite
- **B** la matrice colonna formata con i termini noti

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Ogni n -pla ordinata di numeri reali (p_1, p_2, \dots, p_n) è **soluzione del sistema** se le m equazioni risultano contemporaneamente verificate quando si operano in esse le sostituzioni

$$x_1 = p_1 \quad x_2 = p_2 \quad \dots \quad x_n = p_n$$

SISTEMI NON OMOGENEI

La matrice dei coefficienti identifica biunivocamente un sistema di m equazioni in n incognite solo se il sistema è omogeneo.

- Si definisce **matrice completa** di un sistema non omogeneo la matrice \mathbf{A}' di m righe ed $n+1$ colonne ottenuta dalla matrice incompleta \mathbf{A} aggiungendovi i termini noti.

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Risolvere un sistema che presenta molte equazioni e molte incognite è un procedimento alquanto laborioso. Per questo si è cercato di capire se sia possibile stabilire *a priori* la risolubilità dei sistemi lineari, attraverso la sola analisi dei coefficienti e dei termini noti del sistema, raccolti nelle matrici \mathbf{A} ed \mathbf{A}' . Di grande importanza è il seguente:

Teorema di Rouché - Capelli

Un sistema lineare è compatibile se e solo se la matrice dei coefficienti e la matrice completa hanno lo stesso rango

Occorre quindi effettuare una preliminare ricerca del rango delle matrici \mathbf{A} ed \mathbf{A}' .

In particolare, siano $r = \text{rango}(\mathbf{A})$ e $r' = \text{rango}(\mathbf{A}')$

$r = r' = n \Rightarrow$ sistema compatibile determinato

$r = r' < n \Rightarrow$ sistema compatibile indeterminato (∞^{n-r} soluzioni, cioè $n-r$ incognite giocano il ruolo di parametri)

$r \neq r' \Rightarrow$ sistema incompatibile

Come detto il rango di una matrice corrisponde al numero di righe o colonne linearmente indipendenti. Pertanto nel caso di un sistema compatibile la matrice \mathbf{A} dei coefficienti e la matrice \mathbf{A}' completa hanno lo stesso numero $r = \text{rango}(\mathbf{A}) = \text{rango}(\mathbf{A}')$ di righe (o colonne) linearmente indipendenti. Dunque se m è il numero di righe di \mathbf{A} e \mathbf{A}' (ovvero il numero di equazioni) ci sono $d = m - r$ righe che dipendono linearmente dalle rimanenti: questo significa che d equazioni sono "superflue", cioè non aggiungono informazioni a quelle già fornite dalle r equazioni linearmente indipendenti.

Risoluzione di un sistema compatibile

- Si estrae dalla matrice dei coefficienti \mathbf{A} una sottomatrice quadrata \mathbf{B} di ordine r , non singolare (ovvero $\det(\mathbf{B}) \neq 0$): la matrice \mathbf{B} esiste certamente perché r è il rango di \mathbf{A}
- Se $r < m$ si considerano le r equazioni del sistema corrispondenti alle righe della matrice \mathbf{B}
- Se $r = m$ si considerano tutte le equazioni del sistema
- Si considerano come incognite del sistema le r incognite corrispondenti alle colonne della matrice \mathbf{B} , le rimanenti $n-r$ incognite sono considerate come parametri e le espressioni che in ogni equazione le contengono possono essere portate al termine noto: si ottiene così un nuovo sottosistema di r equazioni in r incognite, la cui matrice dei coefficienti è pertanto una matrice quadrata
- Si risolve il sistema con uno dei metodi noti (della matrice inversa, di Cramer, di Gauss-Jordan)

METODI PER LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Come si è visto, ogni **sistema compatibile** può essere ridotto ad un sistema la cui matrice dei coefficienti è quadrata e non singolare, considerando solo le equazioni linearmente indipendenti e portando al termine noto le incognite che giocano il ruolo di parametri.

I metodi esposti di seguito si riferiscono dunque a sistemi di questo tipo, in cui la matrice dei coefficienti A è quadrata di ordine n e non singolare. Poiché il rango r coincide con il numero delle equazioni n , in base al teorema di Rouché-Capelli, il sistema risulta determinato ed ha un'unica soluzione. È chiaro che, se la colonna dei termini noti contiene s incognite che hanno il ruolo di parametri, il sistema ha in realtà ∞ soluzioni.

METODO DELLA MATRICE INVERSA

- Va ricordato innanzitutto che la matrice inversa può essere definita solo per una matrice quadrata: infatti il prodotto tra A e A^{-1} deve poter essere effettuato in entrambi gli ordini e deve dare come risultato la matrice identità, che per definizione è quadrata
- Risolviamo il sistema $A \cdot X = B$, nel caso in cui $\det(A) \neq 0$. Allora $\text{rango}(A) = \text{rango}(A') = n$. Essendo $\det(A) \neq 0$, esiste la matrice inversa di A , che indichiamo A^{-1} . Moltiplicando a sinistra i due membri dell'equazione matriciale per A^{-1} otteniamo:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

ed essendo $A^{-1} \cdot A = I$, $I \cdot X = X$ otteniamo l'espressione che fornisce il vettore soluzione

$$X = A^{-1} \cdot B$$

In sintesi la soluzione del sistema assegnato è l'esito di due operazioni

- la costruzione della matrice inversa della matrice dei coefficienti, per ipotesi non singolare
- il prodotto della matrice ottenuta per il vettore dei termini noti

Per la costruzione della matrice inversa, ci si può avvalere del

Teorema

L'inversa di una matrice non singolare si può ottenere come

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{\det(A)}$$

dunque per calcolare l'inversa di una matrice è necessario calcolarne il determinante, la matrice dei complementi algebrici, e fare la trasposta di quest'ultima.

- Se il sistema è omogeneo, l'unica soluzione è quella banale

LA REGOLA DI CRAMER (si veda MODULI.MAT,TOMO B, pagg. 198/203)

L'unica soluzione del sistema determinato $A \cdot X = B$ è data dalla n-upla di numeri reali

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

dove la matrice A_i è ottenuta sostituendo l'i-esima colonna di A con la colonna dei coefficienti.

IL METODO DI GAUSS-JORDAN (si veda MODULI.MAT,TOMO B, pagg. 203/208)

Definizioni

matrice triangolare superiore: matrice quadrata in cui gli elementi al di sotto della diagonale principale sono tutti nulli

matrice triangolare inferiore: matrice quadrata in cui gli elementi al di sopra della diagonale principale sono tutti nulli

Il metodo in esame consiste in un algoritmo il cui obiettivo è quello di trasformare il sistema in esame in uno ad esso equivalente, caratterizzato da una matrice dei coefficienti in forma triangolare, risolubile per semplice sostituzione. Tale algoritmo è utile soprattutto perché, per la sua meccanicità, si presta ad essere implementato su un calcolatore. Le operazioni lecite che permettono di passare da un sistema ad uno ad esso equivalente sono:

1. moltiplicare o dividere una equazione (ovvero una riga della matrice completa) per un numero reale diverso da 0.
2. sostituire ad una equazione una combinazione lineare di tale equazione con una o più delle rimanenti (ovvero sostituire ad una riga della matrice completa una combinazione lineare di tale riga con una o più delle rimanenti).
3. scambiare di posto due equazioni.

ATTENZIONE - Il metodo di Gauss-Jordan consiste nel ridurre la matrice dei coefficienti in forma triangolare. Le operazioni vanno però effettuate sulla **matrice completa** del sistema, poiché esse debbono coinvolgere le equazioni.

(a cura della prof. V. Riboldi)