

Sistemi di equazioni lineari (parte 1)

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

1 Introduzione

Sia Σ un sistema di m equazioni lineari in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Qui $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) sono i *coefficienti*, mentre b_i sono i *termini noti*. Poniamo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

La matrice A ($m \times n$) così definita, è la *matrice dei coefficienti*¹.
Risulta inoltre definita la *matrice dei coefficienti e dei termini noti*²:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (3)$$

Il sistema (1) può essere scritto come:

$$AX = B, \quad (4)$$

essendo:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (5)$$

il vettore colonna di dimensioni $n \times 1$, mentre:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (6)$$

¹Tale matrice è spesso denominata *matrice incompleta*.

²Tale matrice è spesso denominata *matrice completa*.

è il vettore colonna costituito dai termini noti.

Una *soluzione* di (4) [o di (1)] è ogni n -pla $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ (o \mathbb{C}^n) tale che:

$$A\Xi = B,$$

dove:

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

Chiamiamo Ξ *vettore soluzione* di (4).

Definizione 2. Il sistema (4) [o (1)] si dice *compatibile* se ammette almeno una soluzione. Di contro, è *incompatibile* se è privo di soluzioni. Risolvere il sistema (4) equivale a verificare la sua compatibilità e in caso affermativo ricercare le soluzioni.

Definizione 3

Un sistema compatibile si dice *determinato* se ammette una ed una sola soluzione. Se un sistema compatibile ammette più di una soluzione, ne ammette infinite. In tal caso il sistema si dice *indeterminato*.

2 Ricerca delle soluzioni

Sia p il rango della matrice dei coefficienti. Chiamiamo p *rango* del sistema (1). Come è noto, deve essere $p \leq \min\{m, n\}$.

Inoltre, per definizione di rango di una matrice, esiste almeno un minore non nullo di ordine p . Preso ad arbitrio un minore non nullo di ordine p , chiameremo tale minore *determinante fondamentale*.

Senza perdita di generalità³ supponiamo che tale minore sia il determinante della matrice quadrata di ordine p :

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}, \det C \neq 0 \quad (8)$$

Classifichiamo i due casi notevoli:

1. $p = m$. In tal caso il sistema Σ è un *sistema normale*.
2. $p < m$. In tal caso il sistema Σ è un *sistema non normale*.

³Basta comunque effettuare opportuni scambi di righe e colonne.

3 Sistemi normali: teorema di Cramer

Per quanto detto deve essere $p = m$. Abbiamo i due sottocasi:

a $p = n$;

b $p < n$.

Nel caso **a** il sistema è di p equazioni in p incognite con la matrice dei coefficienti pari a C [eq.(8)] Quindi:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ &\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p &= b_p, \end{aligned} \tag{9}$$

che può essere scritto come:

$$CX = B \tag{10}$$

Abbiamo il

Teorema 1

Il sistema (9) ammette una ed una sola soluzione:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix},$$

essendo:

$$X = C^{-1}B \tag{11}$$

Dimostrazione. La matrice C è tale che $\det C \neq 0$, donde è dotata di inversa C^{-1} . Moltiplichiamo per C^{-1} primo e secondo membro (da sinistra) della (10):

$$C^{-1}(CX) = C^{-1}B \iff CC^{-1}X = C^{-1}B \underset{CC^{-1}=\bar{1}}{\iff} X = C^{-1}B \tag{12}$$

Viceversa, il vettore $C^{-1}B$ verifica la (10):

$$C(C^{-1}B) = (CC^{-1})B = \bar{1}B = B \tag{13}$$

(Nelle (12) - (13), $\bar{1}$ è la matrice identità di ordine p).

Dalla (11) segue il

Teorema 2 (Teorema di Cramer)

Il sistema (9) è compatibile e determinato. La soluzione è data da:

$$x_1 = \frac{\det C_1}{\det C}, x_2 = \frac{\det C_2}{\det C}, \dots, x_p = \frac{\det C_p}{\det C} \quad (14)$$

Nella (14) C_j ($j = 1, 2, \dots, p$) è la matrice di ordine p , ottenuta da C sostituendo

alla colonna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$, dei coefficienti dell'incognita x_j , la colonna $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}$ dei termini noti. Cioè:

$$C_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_p & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & b_p & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}, C_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & b_p \end{pmatrix} \quad (15)$$

Dim. Dall'algebra delle matrici:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{p1} & a'_{p2} & \dots & a'_{pp} \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & \dots & a'_{p1} \\ a'_{12} & a'_{22} & \dots & a'_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{1p} & a'_{2p} & \dots & a'_{pp} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Qui a'_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij} . Per la (11):

$$X = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} a'_{11}b_1 + a'_{21}b_2 + \dots + a'_{p1}b_p \\ a'_{12}b_1 + a'_{22}b_2 + \dots + a'_{p2}b_p \\ \dots \\ a'_{1p}b_1 + a'_{2p}b_2 + \dots + a'_{pp}b_p \end{pmatrix} \quad (17)$$

È facile rendersi conto che $a'_{1j}b_1 + a'_{2j}b_2 + \dots + a'_{pj}b_p$ è lo sviluppo del determinante della matrice C_j , per cui:

$$X = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} \det C_1 \\ \det C_2 \\ \dots \\ \det C_p \end{pmatrix},$$

