Sistemi di equazioni lineari
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Introduzione

Sia Σ un sistema di m equazioni lineari in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Qui $a_{ij} \in \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C})$ sono i *coefficienti*, mentre b_i sono i *termini noti.* Poniamo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

La matrice $A\,(m \times n)$ così definita, è la *matrice dei coefficienti*[1].
Risulta inoltre definita la *matrice dei coefficienti e dei termini noti*[2]:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

Il sistema (1) può essere scritto come:

$$AX = B, \tag{4}$$

essendo:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{5}$$

il vettore colonna di dimensioni $n \times 1$, mentre:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, \tag{6}$$

[1]Tale matrice è spesso denominata *matrice incompleta.*
[2]Tale matrice è spesso denominata *matrice completa.*

è il vettore colonna costituito dai termini noti.
Una *soluzione* di (4) [o di (1)] è ogni *n-pla* $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$(o $\mathbb{C}^n$) tale che:

$$A\Xi = B,$$

dove:

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

Chiamiamo Ξ *vettore soluzione* di (4).
Definizione 2. Il sistema (4) [o (1)] si dice *compatibile* se ammette almeno una soluzione. Di contro, è *incompatibile* se è privo di soluzioni. Risolvere il sistema (4) equivale a verificare la sua compatibilità e in caso affermativo ricercare le soluzioni.
Definizione 3
Un sistema compatibile si dice *determinato* se ammette una ed una sola soluzione. Se un sistema compatibile ammette più di una soluzione, ne ammette infinite. In tal caso il sistema si dice *indeterminato.*

2 Ricerca delle soluzioni

Sia p il rango della matrice dei coefficienti. Chiamiamo p *rango* del sistema (1). Come è noto, deve essere $p \leq \min\{m, n\}$.
Inoltre, per definizione di rango di una matrice, esiste almeno un minore non nullo di ordine p. Preso ad arbitrio un minore non nullo di ordine p, chiameremo tale minore *determinante fondamentale.*
Senza perdita di generalità[3] supponiamo che tale minore sia il determinante della matrice quadrata di ordine p:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{pmatrix}, \ \det C \neq 0 \tag{8}$$

Classifichiamo i due casi notevoli:

1. $p = m$. In tal caso il sistema Σ è un *sistema normale.*

2. $p < m$. In tal caso il sistema Σ è un *sistema non normale.*

[3] Basta comunque effettuare opportuni scambi di righe e colonne.

3 Sistemi normali: teorema di Cramer

Per quanto detto deve essere $p = m$. Abbiamo i due sottocasi:

a $p = n$;

b $p < n$.

Nel caso **a** il sistema è di p equazioni in p incognite con la matrice dei coefficienti pari a C [eq .(29)] Quindi:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p &= b_2 \\ &.... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p &= b_p, \end{aligned} \tag{9}$$

che può essere scritto come:

$$CX = B \tag{10}$$

Abbiamo il
Teorema 1
Il sistema (9) ammette una ed una sola soluzione:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix},$$

essendo:

$$X = C^{-1}B \tag{11}$$

Dimostrazione. La matrice C è tale che $\det C \neq 0$, donde è dotata di inversa C^{-1}. Moltiplichiamo per C^{-1} primo e secondo membro (da sinistra) della (10):

$$C^{-1}(CX) = C^{-1}B \Longleftrightarrow CC^{-1}X = C^{-1}B \underset{CC^{-1}=\overline{1}}{\Longleftrightarrow} X = C^{-1}B \tag{12}$$

Viceversa, il vettore $C^{-1}B$ verifica la (10):

$$C\left(C^{-1}B\right) = \left(CC^{-1}\right)B = \overline{1}B = B \tag{13}$$

(Nelle (12) - (13), $\overline{1}$ è la matrice identità di ordine p).

***

Dalla (11) segue il

Teorema 2 (Teorema di Cramer)

Il sistema (9) è compatibile e determinato. La soluzione è data da:

$$x_1 = \frac{\det C_1}{\det C}, x_2 = \frac{\det C_2}{\det C}, ..., x_p = \frac{\det C_p}{\det C} \tag{14}$$

Nella (14) C_j ($j = 1, 2, ..., p$) è la matrice di ordine p, ottenuta da C sostituendo alla colonna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{pj} \end{pmatrix}$, *dei coefficienti dell'incognita x_j, la colonna* $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_p \end{pmatrix}$ *dei termini noti. Cioè:*

$$C_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1p} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_p & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1p} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & b_p & ... & a_{pp} \end{pmatrix}, \; C_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & b_p \end{pmatrix} \tag{15}$$

Dim. Dall'algebra delle matrici:

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & ... & a'_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a'_{p1} & a'_{p2} & ... & a'_{pp} \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & ... & a'_{p1} \\ a'_{12} & a'_{22} & ... & a'_{p2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a'_{1p} & a'_{2p} & ... & a'_{pp} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

Qui a'_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}. Per la (11):

$$X = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} a'_{11}b_1 + a'_{21}b_2 + ... + a'_{p1}b_p \\ a'_{12}b_1 + a'_{22}b_2 + ... + a'_{p2}b_p \\ ... \\ a'_{1p}b_1 + a'_{2p}b_2 + ... + a'_{pp}b_p \end{pmatrix} \tag{17}$$

È facile rendersi conto che $a'_{1j}b_1 + a'_{2j}b_2 + ... + a'_{pj}b_p$ è lo sviluppo del determinante della matrice C_j, per cui:

$$X = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} \det C_1 \\ \det C_2 \\ ... \\ \det C_p \end{pmatrix},$$

donde l'asserto (14).

***

Passiamo ora ai sistemi di tipo **b**. Ora il numero delle incognite è $n > p$, quindi il sistema si scrive.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{..} \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \tag{18}$$

Abbiamo il seguente:

Teorema 3

Il sistema (18) *ammette* ∞^{n-p} *soluzioni, che si ottengono assumendo come parametri le incognite* x_j*, con* $j = p+1, p+2, ..., n$ *e applicando il teorema di Cramer.*

Infatti, il sistema (18) può essere scritto come:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 - (a_{1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 - (a_{2,p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n) \\ \text{..} \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p = b_p - (a_{p,p+1}x_{p+1} + ... + a_{nn}x_n) \end{cases} \tag{19}$$

Poniamo:

$$\lambda_1 = x_{p+1}, \ \lambda_2 = x_{p+2}, ... \ \lambda_{n-p} = x_n$$

Siccome le λ_k sono arbitrarie, segue che il numero di soluzioni è ∞^{n-p}.

4 Sistemi non normali: Teoremi di Rouchè e di Capelli

In un sistema non normale è $p < m$, quindi:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &.... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + ... + a_{pn}x_n &= b_p \\ a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + ... + a_{p+1,p}x_p + a_{p+1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{p+1,n}x_n &= b_{p+1} \\ &... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mp}x_p + a_{m,p+1}x_{p+1} + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{20}$$

deve essere:

$$\det C=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{vmatrix}\neq 0$$

Dimostriamo il seguente
Lemma
Assegnato $r\in\{p+1,p+2,...,m\}$, risulta

$$\forall\left(x_1,x_2,...,x_n\right),\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1-\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2-\sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}x_j \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p-\sum\limits_{j=1}^{n}a_{pj}x_j \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r-\sum\limits_{j=1}^{n}a_{rj}x_j \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r \end{vmatrix} \tag{21}$$

Dim. L'asserto è dimostrabile attraverso una nota proprietà dei determinanti. Precisamente (senza perdita di generalità), un determinante una cui colonna (o riga) è costituito da elementi binomi (in generale polinomi), ammette uno sviluppo del tipo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & c_{1j}+d_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & c_{2j}+d_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & c_{nj}+d_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & c_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & c_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & c_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & d_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & d_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & d_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Indichiamo con D_1 il determinante a primo membro della (21). Abbiamo:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r \end{vmatrix}-\sum_{j=1}^{n}x_j\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & a_{2j} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & a_{pj} \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & a_{rj} \end{vmatrix} \tag{22}$$

I determinanti della sommatoria sono tutti nulli: per $j=1,...,p$, hanno due colonne identiche; per $j=p+1,...,n$, compongono minori di ordine $p+1$ e come tali nulli, giacché il rango della matrice dei coefficienti è p.
Definizione 4

Si definiscono *determinanti associati* al determinante fondamentale $\det C$, i determinanti:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r \end{vmatrix}, \text{ con } r = p+1, p+2, ..., m \tag{23}$$

Ora siamo in grado di enunciare il:

Teorema di Rouchè

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema (20) sia compatibile è che i termini noti siano tali da rendere nulli i determinanti associati (23).

Dim.

Necessità della condizione.

Per ipotesi il sistema è compatibile. Indichiamo quindi con $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ una qualunque soluzione, quindi:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r \end{vmatrix}$$

$$\underset{x_j=\xi_j}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\xi_j \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\xi_j \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p - \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\xi_j \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj}\xi_j \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & 0 \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ciò implica (sempre dalla (21)):

$$0 = \Delta_r$$

Sufficienza della condizione
L'ipotesi è:

$$\Delta_r = 0, \text{ con } r = p+1, p+2, ..., m$$

La (21) diventa:

$$\forall\,(x_1, x_2, ..., x_n)\,, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & b_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & b_p - \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj}x_j \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

Si consideri ora il sistema ottenuto dalla (20) conservando solo le prime p equazioni

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &.... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + ... + a_{pn}x_n &= b_p, \end{aligned} \tag{25}$$

le cui soluzioni sono $(\xi_1, \xi_2, ...\xi_n)$ che poste in (24):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & 0 \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj}\xi_j \end{vmatrix} = 0$$

Cioè:

$$\left(b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj}\xi_j\right) \det C = 0 \underset{\det C \neq 0}{\Longrightarrow} b_r - \sum_{j=1}^{n} a_{rj}\xi_j = 0 \tag{26}$$

Quindi le ξ_j soddisfano le rimanenti $m-p$ equazioni.
Gli $m-p$ determinanti Δ_r si chiamano *determinanti associati* al fissato determinante fondamentale $\det C$.

***

Un enunciato equivalente è dato da:
Teorema di Capelli
Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema non normale (20) sia compatibile è che la matrice A dei coefficienti abbia lo stesso rango della matrice M dei coefficienti e termini noti
Dim.
La condizione è sufficiente

$$R(A) = R(M) = p \Longrightarrow \forall r \in \{p+1, p+2, ..., m\}, \Delta_r = 0$$

Per il teorema di Rouché il sistema è compatibile.
La condizione è necessaria.
L'ipotesi è la compatibilità del sistema. La tesi da dimostrare è $R(M) = p$. Prendiamo ad arbitrio un minore di ordine $p+1$ di M. Se è formato da colonne di soli elementi a_{ij} allora esso è nullo, in quanto minore di ordine $p+1$ di A. Viceversa è del tipo:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & ... & a_{i_1 j_p} & b_{i_1} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & ... & a_{i_2 j_p} & b_{i_2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i_{p+1} j_1} & a_{i_{p+1} j_2} & ... & a_{i_{p+1} j_p} & b_{i_{p+1}} \end{vmatrix}$$

Considerando i complementi algebrici degli elementi dell'ultima colonna si ha che essi o sono tutti nulli ($\Longrightarrow \delta = 0$) o ne esiste almeno uno non nullo, ma in questo caso è un minore di ordine p della matrice A, che può essere assunto come determinante fondamentale del sistema. Quindi δ risulta essere un determinante associato e come tale è nullo per il teorema di Rouchè. Da ciò segue che tutti i minori di ordine $p+1$ sono nulli, donde l'asserto.

5 Sistemi omogenei

Un sistema di equazioni lineari si dice omogeneo quando i suoi termini noti sono tutti nulli. Continuando a considerare un sistema di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Osserviamo innanzitutto che un sistema omogeneo è sempre compatibile, poiché ammette la soluzione.

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0) \tag{28}$$

Si badi che ciò è in accordo con il teorema di Rouchè (se $p < m$). Infatti, supponendo senza ledere la generalità, che il determinante fondamentale del sistema sia:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{29}$$

con $p < m$. Segue che i determinanti associati a Δ sono tutti nulli:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} & 0 \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rp} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad r = p+1, p+2, ..., m$$

Quindi per il teorema di Rouchè il sistema è compatibile.
Ciò premesso, osserviamo che da un punto di vista applicativo non è molto interessante la soluzione (28), denominata *soluzione banale*, bensì le soluzioni non tutte nulle. Quest'ultime sono le *autosoluzioni* o *soluzioni proprie* del sistema.
Sussite il seguente

Teorema di Bolzano-Weirstrass. Il sistema (27) ammette autosoluzioni se e solo se $p < n$

Proof. er ipotesi il determinante fondamentale è (29). Quindi le soluzioni del sistema sono tutte e sole quelle del sistema equivalente ottenuto conservando le prime p equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{30}$$

Risulta:

$$p = n \Longrightarrow \exists! \, (x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$$

Ciò implica che affinché esistano autosoluzioni deve necessariamente essere $p < n$. Si osservi che tale condizione è anche sufficiente. Infatti, posto:

$$x_{p+k} = \lambda_k, \text{ con } k = 1, 2, ..., n-p$$

con

$$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq (0, 0, ..., 0)$$

il sistema (30) diventa:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = -\sum_{k=1}^{n-p} a_{1,p+k}\lambda_k \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = -\sum_{k=1}^{n-p} a_{2,p+k}\lambda_k \\ ... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p = -\sum_{k=1}^{n-p} a_{p,p+k}\lambda_k \end{cases}, \tag{31}$$

ed ammette ∞^{n-p} soluzioni non tutte nulle. □

Consideriamo ora il caso particolare $m = n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{32}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

È evidente che $p < n \Longleftrightarrow \det A = 0$. Da ciò segue:

$$\exists \, (x_1, x_2, ..., x_n) \neq (0, 0, ..., 0) \Longleftrightarrow \det A = 0$$

Cioè, un sistema omogeneo di n equazioni in n incognite ammette autosoluzioni se e solo se è nullo il determinante della matrice dei coefficienti.

6 Esempi numerici

Consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \tag{33}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Risulta: $r(A) = 2 = m$ (numero di equazioni di 33), donde il sistema è di Cramer. Le matrici (15) sono:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \, C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

L'unica soluzione (x_1, x_2) è:

$$x_1 = \frac{\det C_1}{\det C} = \frac{-3}{-3} = 1, \, x_2 = \frac{\det C_2}{\det C} = \frac{-3}{-3},$$

cioè:

$$\Xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

***

Risolviamo il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 0 + 3x_3 &= 1 \\ 0 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \tag{34}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2(-1 - 1) = -3 + 4 = 1 \Longrightarrow r(A) = 3,$$

quindi (34) è un sistema di Cramer.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \det C_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \det C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \det C_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

La soluzione è:

$$x_1 = -4, x_2 = -1, x_3 = 3$$

***

Risolviamo il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 0 + 2x_4 &= 0 \\ 0 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\ 9x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0 &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 31 \Longrightarrow p = 4 = m \Longrightarrow \text{ il sistema è di Cramer}$$

Abbiamo:

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ .3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 31$$

$$\det C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ .0 & 3 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 62$$

$$\det C_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ .0 & -2 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 93$$

$$\det C_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ .0 & -2 & 3 & 3 \\ 9 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -61$$

da qui l'unica soluzione del sistema: $(1, 2, -2, 3)$.

***

Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Risulta:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \equiv \det C$$

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det C_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det C_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det C_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 5$$

L'unica soluzione è: $(1, 0, 0, 5)$.

6.0.1 Esercizi proposti

1.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 10x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= -3 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 0 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 0 - 3x_3 + x_4 &= 10 \\ 0 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 0 + 3x_2 + 0 + x_4 &= 17 \\ x_1 + 2x_2 + 0 + 3x_4 &= 25 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 7 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} x_1 + 0 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 0 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 0 &= 0 \\ 0 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + 4y &= -1 \\ 3x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} x + 4y - z &= 8 \\ 0 + 3y + 5z &= 11 \\ x - 3y + 0 &= -5 \\ 2x - 2y - 2z &= -4 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 1 \\ x + y - z &= 2 \\ 3x - 7y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= -7 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= -10 \end{aligned}$$

16. Determinare i valori del parametro reale h per i quali il seguente sistema risulta compatibile.:

$$\begin{aligned} 4x - hy - z &= 1 \\ hx - y + 3z &= 2 \\ x - y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

17. Dato il sistema:

$$\begin{aligned} hx + 3y - 3z &= -13 \\ x - y - 2z &= -5 \\ 0 + y - z &= -5 \\ 5x + y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

studiarne il comportamento rispetto al parametro reale h.

18. Dato il sistema:

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 0 \\ 0 + y - 2z &= -5 \\ 4x + y + 6z &= 12 \\ hx + 3y - 2z &= -13 \end{aligned}$$

studiarne il comportamento rispetto al parametro reale h.

19. Dato il sistema:

$$\begin{aligned} x - \lambda y &= 1 \\ 4x + \lambda y &= 0 \\ 2x + 3y &= -2\lambda \end{aligned}$$

studiarne il comportamento rispetto al parametro reale λ.

20. Dato il sistema:

$$\begin{aligned} \lambda^2 x + y - 4z &= 2 \\ x + y + 2(\lambda - 1)z &= 1 \end{aligned}$$

studiarne il comportamento rispetto al parametro reale λ.

21. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

22. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 6y + z &= -3 \\ x + 3y - z &= 2 \end{aligned}$$

23. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 0 + 3y + z &= 7 \\ -x + 4y + 0 &= 9 \\ x + 5y - 3z &= 6 \end{aligned}$$

24. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ 3x + 0 + 2z &= 3 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= -2 \end{aligned}$$

25. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x - y - 3z &= 5 \\ x + 4y + 6z &= 1 \\ x - 2y - 4z &= 3 \end{aligned}$$

26. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 5 \\ x + y - 8z &= 13 \\ 4x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

27. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 5 \\ 2x + y - 3z &= 2 \\ 3x + 5y - 4z &= 3 \end{aligned}$$

28. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x + 0 + 2z - t &= 1 \\ 0 + 3y - z + t &= 0 \\ 2x + 0 + 0 + 3t &= 5 \end{aligned}$$

29. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} x + \lambda y + z &= 0 \\ x + y + z &= \lambda \\ \lambda x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

30. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} \lambda x + y - z &= 1 \\ 0 + 2y + \lambda z &= 0 \\ x + 3y + 0 &= 1 \end{aligned}$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

31. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= 1 \\ \lambda x + 4y &= 0 \\ (\lambda - 1)\, x + 6y &= -6 \end{aligned}$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

32. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} x + \lambda y + z &= 2 \\ \lambda x + y + z &= 2\lambda, \end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

33. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2)\, x + 2\lambda y - z &= 1 \\ x - 2y + \lambda z &= -\lambda \\ 0 + y + z &= \lambda, \end{aligned}$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

34. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} x + \lambda y - z &= \lambda \\ x - y + z &= -1 \\ 0 + (\lambda + 1)\, y - 2z &= \lambda + 1, \end{aligned}$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

35. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= 1 \\ 2x - y &= \lambda \\ 4x + (2\lambda - 1)\, y &= \lambda + 2, \end{aligned}$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

36. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} &(\lambda + 1)\, x + 2y - 3z = 1 \\ &2x + (\lambda + 1)\, y + 4z = 1 \\ &3x + 3y + (\lambda + 1)\, z = 1, \end{aligned}$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

37. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} (\lambda + 1)^2\, x + y - 4z &= 2 \\ x + y + 2\lambda z &= 1, \end{aligned}$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

38. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} \lambda x + 2y &= 1 \\ 3x - y &= 2 \\ 4x + \lambda y &= 3\lambda, \end{aligned}$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

39. Discutere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} \lambda x + y - z &= 1 \\ 0 + 2y + \lambda z &= 0 \\ x + 3y + 0 &= 1, \end{aligned}$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

6.0.2 Soluzioni

N. 1
$\det A = 80, \det C_1 = 64, \det C_2 = 32, \det C_3 = 92 \Longrightarrow \Xi^T = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$
N. 2
$\det A = -5, \det C_1 = 0, \det C_2 = 0, \det C_3 = -5 \Longrightarrow \Xi^T = (0, 0, 1)$
N. 3
$\det A = -76, \det C_1 = -152, \det C_2 = -304, \det C_3 = -76, \det C_4 = -380 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \Xi^T = (2, 4, 1, 5)$
N. 4
Le matrici sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Risulta: $\det M = 0 \Longrightarrow r(M) < 3$, inoltre:

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Quindi $r(A) = r(M) = 2 = p$,pertanto il sistema è equivalente a quest'altro:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 3, \end{aligned}$$

che si risolve facilmente: $\Xi^T = (-1, 3)$.
N. 5
Le matrici sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \, M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

È facile rendersi conto che $r(A) = r(M) = 2 \equiv p$. Essendo $m = 3, n = 3$, il sistema è equivalente a:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2, \end{aligned}$$

che ammette $\infty^{n-p} = \infty^1$ soluzioni. Assumiamo x_3 come parametro ($x_3 \equiv \lambda$), risolvendo poi il sistema con la regola di Cramer:

$$x_1 - x_2 = 1 - \lambda$$
$$2x_1 + 3x_2 = 2 - 2\lambda$$

La soluzione generale è:

$$\Xi^T = (1 - \lambda, 0, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

N. 6
Le matrici sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Risulta: $r(A) = 2$, $r(B) = 2$, donde $p = 2 = m \underset{n=4}{\Longrightarrow} \exists \infty^2$ soluzioni. Assumiamo $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$:

$$x_1 + 0 = 7 - \lambda - \mu$$
$$0 + x_2 = 5 - \lambda - \mu$$

Quindi la soluzione generale: $\Xi^T = (7 - \lambda - \mu, 5 - \lambda - \mu, \lambda, \mu,)$.
N. 7
Le matrici sono:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 10 \\ 4 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Risulta $r(A) = 2$, $r(M) = 3 \Longrightarrow$ il sistema è incompatibile.
N. 8
È un sistema di Cramer, la cui unica soluzione è $\Xi^T = (5, -8, 6)$.
N. 9
È un sistema di Cramer, la cui unica soluzione è $\Xi^T = (1, 1, 1)$.
N. 10
È un sistema di Cramer, la cui unica soluzione è $\Xi^T = (1, 2, 3, 4)$.
N. 11
È un sistema di Cramer, la cui unica soluzione è $\Xi^T = \left(\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.
N. 12
Le matrici sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \; M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -3 & 0 & -5 \\ 2 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$\det M = 0;\ \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 38,$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} r(A) = r(M) \equiv p = 3 &\Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile} \\ p < m = 4 &\Longrightarrow \text{ il sistema è non normale} \\ p = n &\Longrightarrow \text{ il sistema è determinato} \end{aligned}$$

Assumiamo come determinante fondamentale, il determinante della matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema è equivalente a:

$$\begin{aligned} x + 4y - z &= 8 \\ 0 + 3y + 5z &= 11 \\ x - 3y + 0 &= -5 \end{aligned}$$

La soluzione è $\Xi^T = (1, 2, 1)$.

N. 13

Le matrici sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $r(A)$:

$$\det A = 0,\ \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \Longrightarrow r(A) = 2$$

$r(M)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow r(M) = 2$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
r(A) = r(M) = 2 \equiv p &\Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile} \\
p < m = 3 &\Longrightarrow \text{ il sistema è non normale} \\
p < n = 3 &\Longrightarrow \text{ il sistema è indeterminato } (\infty^1 \text{ soluzioni})
\end{aligned}
$$

Assumiamo come determinante fondamentale il determinante della matrice di ordine 2:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

donde il sistema equivale a:

$$
\begin{aligned}
x + 2y &= 1 - 3\lambda \\
3x + 2y &= 3 - \lambda,
\end{aligned}
$$

avendo assunto $z = \lambda \in (-\infty, +\infty)$. Le ∞^1 soluzioni sono: $\Xi^T = (1 + \lambda, -2\lambda, \lambda)$.

N. 14

Le matrici sono:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix}; \, M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\det A = 0, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \Longrightarrow r(A) = 2$$

Inoltre è facile verificare che $r(M) = 2$. Quindi:

$$
\begin{aligned}
r(A) = r(M) = 2 \equiv p &\Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile} \\
p < m = 3 &\Longrightarrow \text{ il sistema è non normale} \\
p < n = 3 &\Longrightarrow \text{ il sistema è indeterminato } (\infty^1 \text{ soluzioni})
\end{aligned}
$$

Il sistema equivale a:

$$
\begin{aligned}
2x - 3y &= 1 - \lambda \\
x + y &= 2 + \lambda
\end{aligned}
$$

Le ∞^1 soluzioni sono $\Xi^T = \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{5}\lambda, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\lambda\right) \, \forall \lambda \in (-\infty, +\infty)$.

N. 15

Le matrici sono:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 5 & 7\\ 1 & 4 & 7 & 10\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & -4\\ 1 & 3 & 5 & 7 & -7\\ 1 & 4 & 7 & 10 & -10\end{pmatrix}$$

Manifestamente $r(A)=2$, $r(M)=2$. Quindi:

$$\begin{aligned}r(A)=r(M)=p &\Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile}\\ p<m=3 &\Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile}\\ p<n=4 &\Longrightarrow \text{ il sistema è indeterminato } (\infty^2 \text{ soluzioni})\end{aligned}$$

Il sistema è equivalente a:

$$\begin{aligned}x_1+2x_2&=-4-3\lambda-4\mu\\ x_1+3x_2&=-7-5\lambda-7\mu\end{aligned}$$

Qui abbiamo posto: $x_3=\lambda$, $x_4=\mu$. Le soluzioni sono:

$$\Xi^T=(x_1=2+\lambda+2\mu, x_2=-3-2\lambda-3\mu, x_3=\lambda, x_4=\mu)$$

N. 16

Le matrici sono funzioni di h:

$$A(h)=\begin{pmatrix}4 & -h & -1\\ h & -1 & 3\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix};\ M(h)=\begin{pmatrix}4 & -h & -1 & 1\\ h & -1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Il determinante di $A(h)$ è:

$$\Delta(h)\overset{def}{=}3h^2-4h+1 \tag{36}$$

Gli zeri di $\Delta(h)$ sono $h_1=1/3$; $h_2=1$. I minori estratti di ordine 4 della matrice $M(h)$ sono (a fianco sono riportati gli zeri):

$$\begin{aligned}&D_1(h)=\Delta(h) \qquad (37)\\ &D_2(h)=h^2-3h+5;\quad h_{12}=\frac{1-i\sqrt{11}}{2},\ h_{22}=\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\\ &D_3(h)=2h-13;\ \ h_{13}=\frac{13}{2}\\ &D_4(h)=3h-1;\quad h_{14}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Da ciò segue che se $h = h_j$ $(j = 1, 2)$ il sistema è incompatibile, giacché $r(A(h_j)) = 2$, $r(M(h_j)) = 3$. Viceversa, per $h \neq h_j$ è $r(A(h)) = 3$, $r(M(h)) = 3$, e per tali valori risulta determinato. La soluzione è:

$$\left(\frac{1}{h-1}, \frac{13-2h}{3h^2-4h+1}, \frac{h^2-3h+5}{3h^2-4h+1}\right)$$

N. 17

Le matrici sono:

$$A(h) = \begin{pmatrix} h & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \; M(h) = \begin{pmatrix} h & 3 & -2 & -13 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & -5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Evidentemente $r(M(h)) \leq 4$, $r(A(h)) \leq 3$. Dobbiamo perciò determinare quei valori di h (se esistono) che annullano il determinante della matrice $M(h)$; in tal modo è $r(M(h)) < 4$. Il determinante della matrice $M(h)$ è:

$$D(h) = 19(1-h)$$

che si annulla per $h = h_0 = 1$, perciò $r(M(h_0)) = 3$. Passiamo ai minori del terzo ordine estratti dalla matrice $A(h)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \Delta_1(h) &= 3h + 1 \\ \Delta_2(h) &= -h - 51 \\ \Delta_3(h) &= 4h - 5 \\ \Delta_4(h) &= 19 \end{aligned}$$

Risulta: $\Delta_j(h_0) \neq 0$, $j = 1, ..., 4$. Si conclude che:

$$\begin{aligned} h = h_0 &\Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile e determinato} \\ h \neq h_0 &\Longrightarrow \text{ il sistema è incompatibile} \end{aligned}$$

Inoltre per $h = h_0$ il sistema è equivalente a:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= -13 \\ x - y - 2z &= -5 \\ 0 + y - z &= -5 \end{aligned}$$

L'unica soluzione è $(-1, -2, 3)$.

N. 18

Le matrici sono:

$$A(h) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ h & 3 & -2 \end{pmatrix}; \; M(h) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 4 & 1 & 6 & 12 \\ h & 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}$$

Evidentemente $r(M(h)) \leq 4$, $r(A(h)) \leq 3$. Dobbiamo perciò determinare quei valori di h (se esistono) che annullano il determinante della matrice $M(h)$; in tal modo è $r(M(h)) < 4$. Il determinante della matrice $M(h)$ è:

$$D(h) = 19(h-1)$$

che si annulla per $h = h_0 = 1$, perciò $r(M(h_0)) = 3$. Passiamo ai minori del terzo ordine estratti dalla matrice $A(h)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \Delta_1(h) &= 19 \\ \Delta_2(h) &= 3h+1 \\ \Delta_3(h) &= -11h-48 \\ \Delta_4(h) &= 7h-4 \end{aligned}$$

Risulta: $\Delta_j(h_0) \neq 0$, $j = 1, ..., 4$. Si conclude che:

$$\begin{aligned} h = h_0 &\Longrightarrow \text{il sistema è compatibile e determinato} \\ h \neq h_0 &\Longrightarrow \text{il sistema è incompatibile} \end{aligned}$$

Inoltre per $h = h_0$ il sistema è equivalente a:

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 0 \\ 0 - y - z &= -5 \\ x + 3y - 2z &= -13 \end{aligned}$$

L'unica soluzione è $(-1, -2, 3)$.

N. 19

Scriviamo le matrici:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 4 & \lambda \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \; M(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & \lambda & 0 \\ 2 & 3 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

Abbiamo: $r(A(\lambda)) \leq 2$, $r(M(\lambda)) \leq 3$. Il determinante di $M(\lambda)$ è:

$$\det M(\lambda) = -10\lambda^2 - 2\lambda + 12 \tag{38}$$

La (38) si annulla per:

$$\lambda_1 = -\frac{6}{5},\, \lambda_2 = 1, \tag{39}$$

donde

$$\begin{aligned} r(M(\lambda)) &= 3,\, \forall \lambda \in \Lambda \stackrel{def}{=} \mathbb{R} - \{\lambda_1, \lambda_2\} \\ r(M(\lambda_i)) &= 2,\, i = 1, 2 \end{aligned}$$

cioè per $\lambda \in \Lambda$ il sistema è incompatibile. Restano da discutere i casi $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$. Qui $r(M(\lambda)) \leq 2$; i minori estratti del secondo ordine sono:

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= 5\lambda \\ D_2(\lambda) &= -4 \\ D_3(\lambda) &= -\lambda \\ D_4(\lambda) &= 3 + 2\lambda \\ D_5(\lambda) &= -2 - 2\lambda \\ D_6(\lambda) &= -3 + 2\lambda^2 \\ D_7(\lambda) &= 12 - 2\lambda \\ D_8(\lambda) &= -8\lambda \\ D_9(\lambda) &= -2\lambda^2 \end{aligned}$$

I minori del secondo ordine della matrice $A(\lambda)$ sono:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= 5\lambda \\ \Delta_2(\lambda) &= 3 + 2\lambda \\ \Delta_3(\lambda) &= 12 - 2\lambda \end{aligned}$$

Da ciò segue che

$$r(M(\lambda_i)) = r(A(\lambda_i)) = 2 \Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile e determinato}$$

Il sistema equivalente è:

$$\begin{aligned} x - \lambda_i y &= 1 \\ 4x + \lambda_i y &= 0, \end{aligned}$$

la cui unica soluzione è il vettore:

$$\left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5\lambda_i}\right)$$

che si specializza in:

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right), \text{ per } \lambda = \lambda_1 \\ \left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}\right), \text{ per } \lambda = \lambda_2\end{gathered} \tag{40}$$

N. 20
Scriviamo le matrici:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2(\lambda-1) \end{pmatrix}, M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 2(\lambda-1) & 1 \end{pmatrix}$$

I minori del secondo ordine estratti dalla matrice $A(\lambda)$ sono:

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= \lambda^2 - 1 \\ D_2(\lambda) &= 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4 \\ D_3(\lambda) &= 2\lambda + 2 \end{aligned} \tag{41}$$

I minori del secondo ordine estratti dalla matrice $M(\lambda)$ sono:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= \lambda^2 - 1 \\ \Delta_2(\lambda) &= 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4 \\ \Delta_3(\lambda) &= \lambda^2 - 2 \\ \Delta_4(\lambda) &= 2\lambda + 2 \\ \Delta_5(\lambda) &= -1 \\ \Delta_6(\lambda) &= -4\lambda \end{aligned} \tag{42}$$

Dalla quinta delle (42) risulta:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ r(M(\lambda)) = 2 \tag{43}$$

La (43) implica che dobbiamo imporre la seguente condizione:

$$\exists j_* \in \{1,2,3\} : D_{j_*}(\lambda) \neq 0$$

In altri termini, i tre minori (41) non devono essere simultaneamente nulli. Determiniamo le loro radici:

$$
\begin{aligned}
&D_1(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -1, \lambda = +1 \\
&D_2(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -1, \lambda = 1 - i, \lambda = 1 + i \\
&D_3(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -1
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Dalle (44) segue che:

$$
\forall j \in \{1, 2, 3\}, D_j(\lambda_*) = 0, \tag{45}
$$

essendo $\lambda_* \overset{def}{=} 1$. Quindi:

$$
\text{il sistema è compatibile} \iff \lambda \neq \lambda_* \tag{46}
$$

Più precisamente, per $\lambda \neq \lambda_*$ è $r(A(\lambda)) = r(M(\lambda)) \overset{def}{=} p < n = 3 \Longrightarrow \exists \infty^1$ soluzioni.
La soluzione generale è:

$$
\left(\frac{1 + z(1 + \lambda)}{\lambda^2 - 1}, \frac{\lambda^2 - 2 - 2z(2 + \lambda^2(\lambda - 1))}{\lambda^2 - 1}, z \right) \tag{47}
$$

N. 21
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}
$$

I minori del secondo ordine estratti dalla matrice A sono:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= -7 \\
D_2 &= 5 \\
D_3 &= 8
\end{aligned}
$$

donde:

$$
r(A) = 2 \tag{48}
$$

I minori del secondo ordine estratti dalla matrice A sono:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= -7 \\
\Delta_2 &= 5 \\
\Delta_3 &= 3 \\
\Delta_4 &= 8 \\
\Delta_5 &= 16 \\
\Delta_6 &= -8
\end{aligned}
$$

donde:

$$r(B) = 2 \tag{49}$$

Le (48)-(49) implicano: il sistema è compatibile e indeterminato (∞^1 soluzioni). La soluzione generale è:

$$\left(\frac{8(2-z)}{7}, \frac{5z-3}{7}, z\right)$$

N. 22

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

I minori del secondo ordine estratti dalla matrice A sono:

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ D_2 &= -3 \\ D_3 &= -9 \end{aligned}$$

donde:

$$r(A) = 2 \tag{50}$$

I minori del secondo ordine estratti dalla matrice A sono:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 0 \\ \Delta_2 &= -3 \\ \Delta_3 &= 7 \\ \Delta_4 &= -9 \\ \Delta_5 &= 21 \\ \Delta_6 &= -1 \end{aligned}$$

donde:

$$r(B) = 2 \tag{51}$$

Le (50)-(51) implicano: il sistema è compatibile e indeterminato (∞^1 soluzioni). La soluzione generale è:

$$(2-3y, y, -3)$$

N. 23
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 & 9 \\ 1 & 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Osserviamo subito che:

$$r(A) \leq 3, \quad (\det M = 0 \Longrightarrow r(M) \leq 3)$$

È facile verificare che i minori estratti del terzo ordine di A e di M sono non nulli, quindi:

$$r(A) = r(M) = 3 \equiv p = m = n$$

cioè abbiamo un sistema normale, la cui unica soluzione è: $(-1, 2, 1)$.

N. 24
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Il sistema è incompatibile, in quanto è $\det M = 8$, per cui $r(M) > r(A)$.

N. 25
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Osserviamo subito che:

$$r(A) \leq 3, \quad (\det M = 0 \Longrightarrow r(M) \leq 3)$$

È facile verificare che i minori estratti del terzo ordine di A e di M sono tutti nulli, mentre quelli del secondo ordine sono non nulli, donde

$$r(A) = r(M) = 2 \equiv p < m, n$$

cioè abbiamo un sistema non normale che compatibile e indeterminato (∞^1 soluzioni). Assumiamo come determinante fondamentale:

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix},$$

giacché il sistema è equivalente a:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x - y - 3 &= 5 \end{aligned}$$

La soluzione generale è:

$$\left(\frac{7+2z}{3}, -\frac{1+5z}{3}, z\right)$$

N. 26
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -8 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -8 & 13 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A = 0 \Longrightarrow r(A) < 3$$

I minori del terzo ordine estratti da M sono tutti nulli, donde:

$$r(M) < 3$$

I minori del secondo ordine estratti da A e da M sono non nulli, donde:

$r(A) = r(M) \equiv p = 2 < n = 3 \Longrightarrow$ il sistema è compatibile e indeterminato (∞^1 soluzioni)

La soluzione generale è:

$$(-4 - 3z, 17 + 11z, z)$$

N. 27
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A = 0 \Longrightarrow r(A) < 3$$

Ma $r(M) = 3$, in quanto esistono minori del terzo ordine estratti da M non nulli[4], per cui è $r(M) = 3$. Si conclude che il sistema è incompatibile.

N. 28

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \; M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcolando i minori estratti di ordine 3 ci si rende conto che:

$r(A) = r(M) \equiv p = 3 < n = 4 \Longrightarrow$ il sistema è compatibile e indeterminato (∞^1 soluzioni)

La soluzione generale è:

$$\left(\frac{5-3t}{2}, \frac{t-3}{12}, \frac{5t-3}{4} \right)$$

N. 29

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}; \; M(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo i minori estratti del terzo ordine della matrice $M(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ \Delta_2(\lambda) &= \lambda^3 - \lambda \\ \Delta_3(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda \\ \Delta_4(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda \end{aligned} \tag{52}$$

Il determinante di $A(\lambda)$ è:

$$\det A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \tag{53}$$

$\det A(\lambda)$ si annulla per $\lambda_* = 1$ (radice doppia). Si osservi che $\Delta_j(\lambda_*) = 0$ $(j = 1, ..., 4)$, quindi:

$$r(A(\lambda)) = 3 \Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda_*\}$$

Più precisamente:

[4]Precisamente: $0, 28, 4, 44$.

$$\lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda_*\} \Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile e determinato} \tag{54}$$

Nell'ipotesi (54) l'unica soluzione è:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda - 1}, -\frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \right) \tag{55}$$

Per $\lambda = \lambda_*$ risulta:

$$r(A_*) < 3, \, r(M_*) < 3,$$

essendo $A_* = A(\lambda_*)$, $M_* = M(\lambda_*)$. Studiamo il comportamento al variare di λ dei minori del secondo ordine di entrambe le matrici. Matrice $A(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
D_1(\lambda) &= 1 - \lambda \\
D_2(\lambda) &= 0 \\
D_3(\lambda) &= \lambda - 1 \\
D_4(\lambda) &= -\lambda^2 + 1 \\
D_5(\lambda) &= 1 - \lambda \\
D_6(\lambda) &= \lambda - 1 \\
D_7(\lambda) &= 1 - \lambda \\
D_8(\lambda) &= 1 - \lambda \\
D_9(\lambda) &= 0
\end{aligned}$$

Da ciò segue che $D_j(\lambda_*) = 0$ $(j = 1, ..., 9) \Longrightarrow r(A_*) = 1$
Matrice $M(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(\lambda) &= 1-\lambda \\
\Lambda_2(\lambda) &= 0 \\
\Lambda_3(\lambda) &= \lambda-1 \\
\Lambda_4(\lambda) &= \lambda^2 \\
\Lambda_5(\lambda) &= \lambda \\
\Lambda_6(\lambda) &= 1-\lambda^2 \\
\Lambda_7(\lambda) &= 1-\lambda \\
\Lambda_8(\lambda) &= 0 \\
\Lambda_9(\lambda) &= \lambda-1 \\
\Lambda_{10}(\lambda) &= 0 \\
\Lambda_{11}(\lambda) &= 0 \\
\Lambda_{12}(\lambda) &= 1-\lambda \\
\Lambda_{13}(\lambda) &= 1-\lambda \\
\Lambda_{14}(\lambda) &= -\lambda^2 \\
\Lambda_{15}(\lambda) &= 0 \\
\Lambda_{16}(\lambda) &= -\lambda \\
\Lambda_{17}(\lambda) &= -\lambda
\end{aligned} \tag{56}$$

Dalle (56) segue che $r(M_*) = 2$. Quindi per $\lambda = \lambda_*$ è sempre $r(A) \neq r(M)$. Si conclude che la (54) è condizione necessaria e sufficiente per la compatibilità del sistema:

$$\text{il sistema è compatibile e determinato} \iff \lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda_*\} \tag{57}$$

N. 30

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \ M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A(\lambda)$ è:

$$\det A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \tag{58}$$

$\det A(\lambda)$ si annulla per:

$$\lambda_* = -\frac{2}{3}, \ \lambda'_* = 1 \tag{59}$$

Minori estratti del terzo ordine (matrice M):

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= -3\lambda^2 + \lambda + 2 \\ \Delta_2(\lambda) &= 2(\lambda - 1) \\ \Delta_3(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda \\ \Delta_4(\lambda) &= 2(1 - \lambda) \end{aligned} \tag{60}$$

Minori estratti del secondo ordine (matrice M):

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\lambda) &= 2\lambda \\ \Lambda_2(\lambda) &= \lambda^2 \\ \Lambda_3(\lambda) &= 0 \\ \Lambda_4(\lambda) &= \lambda + 2 \\ \Lambda_5(\lambda) &= -2 \\ \Lambda_6(\lambda) &= -\lambda \\ \Lambda_7(\lambda) &= 3\lambda - 1 \\ \Lambda_8(\lambda) &= 1 \\ \Lambda_9(\lambda) &= \lambda - 1 \\ \Lambda_{10}(\lambda) &= 3 \\ \Lambda_{11}(\lambda) &= -2 \\ \Lambda_{12}(\lambda) &= -1 \\ \Lambda_{13}(\lambda) &= -2 \\ \Lambda_{14}(\lambda) &= -\lambda \\ \Lambda_{15}(\lambda) &= -3\lambda \\ \Lambda_{16}(\lambda) &= 2 \\ \Lambda_{17}(\lambda) &= \lambda \end{aligned}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \Delta_j(\lambda_*) &\neq 0, \ \ j \in \{2,3,4\} \\ \Delta_j(\lambda'_*) &= 0, \ \ \forall j \in \{1,2,3,4\} \\ \Lambda(\lambda), \Lambda(\lambda) &\neq 0, \forall \lambda \in (-\infty, +\infty) \end{aligned} \tag{61}$$

Le (61) implicano:

$$\begin{aligned} r(M(\lambda)) &= 2 \ \ \text{se } \lambda = \lambda'_* \\ r(M(\lambda)) &= 3 \ \ \text{se } \lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda'_*\} \end{aligned} \tag{62}$$

Passiamo al rango della matrice $A(\lambda)$. Per quanto detto è:

$$r(A(\lambda)) = 3 \Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda_*, \lambda'_*\}$$

Confrontando con $r(M(\lambda))$ si giunge alla seguente conclusione:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda_*, \lambda'_*\}, \text{ il sistema è compatibile e determinato}$$

In tale ipotesi, l'unica soluzione è:

$$\left(\frac{2}{2+3\lambda}, \frac{\lambda}{2+3\lambda}, -\frac{2}{2+3\lambda} \right)$$

Inoltre, per $\lambda = \lambda_*$ il sistema è incompatibile, poiché per le (62) è $r(M) = 3$, $r(A) = 2$. Infine, per $\lambda = \lambda'_*$ il sistema è compatibile e indeterminato (∞^1 soluzioni), in quanto è $r(M) = 2 = r(A) = p < n = 3$. La soluzione generale è:

$$\left(1 + \frac{3}{2}z, -\frac{z}{2}, z \right), \quad z \in (-\infty, +\infty)$$

N. 31

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \\ \lambda - 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad M(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 4 & -2 \\ \lambda - 1 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$r(A(\lambda)) \leq 2, \; r(M(\lambda)) \leq 3 \tag{63}$$

Studiamo il comportamento di $r(M(\lambda))$. A tale scopo, valutiamo il determinante di $M(\lambda)$:

$$\det M(\lambda) = 4\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right),$$

che si annulla per:

$$\lambda_* = -2, \; \lambda'_* = 1 \tag{64}$$

Quindi:

$$\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\lambda_*, \lambda'_*\right\} \Longrightarrow r(M(\lambda)) = 3 \neq r(A(\lambda)) \Longrightarrow \text{il sistema è incompatibile}$$

Studiamo il comportamento dei minori del secondo ordine estratti da $A(\lambda)$ (accanto sono riportati gli zeri):

$$
\begin{aligned}
&D_1(\lambda) = 4 - \lambda^2, \quad \lambda = -2, 2 \\
&D_2(\lambda) = 6 + \lambda - \lambda^2, \quad \lambda = -2, 3 \\
&D_3(\lambda) = 4 + 2\lambda, \qquad \lambda = -2
\end{aligned}
\tag{65}
$$

Dalle (65) segue che i minori del secondo ordine estratti da $A(\lambda)$ si annullano simultaneamente per $\lambda = \lambda_*$, quindi:

$$
\begin{aligned}
&r(A(\lambda_*)) = 1 \\
&\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda_*\}, \quad r(A(\lambda)) = 2
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Studiamo ora il comportamento dei minori del secondo ordine estratti da $M(\lambda)$ (accanto sono riportati gli zeri):

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1(\lambda) = 4 - \lambda^2, \ \lambda = \pm 2 \\
&\Delta_2(\lambda) = -2 - \lambda, \ \lambda = -2 \\
&\Delta_3(\lambda) = -4 - 2\lambda, \lambda = -2 \\
&\Delta_4(\lambda) = 6 + \lambda - \lambda^2, \quad \lambda = -2, 3 \\
&\Delta_5(\lambda) = -5 - \lambda, \quad \lambda = -5 \\
&\Delta_6(\lambda) = -6 - 6\lambda, \quad \lambda = -1 \\
&\Delta_7(\lambda) = 4 + 2\lambda, \ \lambda = -2 \\
&\Delta_8(\lambda) = -2 - 4\lambda, \ \lambda = -\frac{1}{2} \\
&\Delta_9(\lambda) = -12
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Le (67) implicano:

$$
(\nexists \lambda \in \mathbb{R} : \Delta_j(\lambda) = 0, \, j = 1, ..., 9) \Longrightarrow 2 \leq r(M(\lambda)) \leq 3
$$

Più precisamente:

$$
\begin{aligned}
&r(M(\lambda)) = 3, \quad \text{se } \lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda_*, \lambda'_*\} \\
&r(M(\lambda)) = 2, \quad \text{se } \lambda = \lambda_*, \lambda'_*
\end{aligned}
\tag{68}
$$

Tenendo conto della (66) si conclue che:

$$
\text{il sistema è compatibile} \iff \lambda = \lambda'_* \tag{69}
$$

Inoltre, per tale valore del parametro il sistema è determinato. Nell'ipotesi $\lambda = 1$, risulta:

$$r(A) = r(M) = 2 \equiv p = n < m = 3,$$

perciò il sistema è equivalente a:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + 4y &= 0, \end{aligned}$$

la cui unica soluzione è $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

N. 32

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}; \ M(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Studiamo il comportamento dei minori del secondo ordine estratti da $A(\lambda)$ (accanto sono riportati gli zeri):

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= 1 - \lambda^2, \ \lambda = \pm 1 \\ D_2(\lambda) &= 1 - \lambda, \ \lambda = 1 \\ D_3(\lambda) &= \lambda - 1, \ \lambda = 1 \end{aligned}$$

Da ciò segue che:

$$\begin{aligned} r(A(\lambda)) &= 2, \ \text{se } \lambda \in \mathbb{R} - \{\lambda_*\} \\ r(A(\lambda)) &= 1, \ \text{se } \lambda = \lambda_*, \end{aligned}$$

essendo $\lambda_* = 1$.

Studiamo ora il comportamento dei minori del secondo ordine estratti da $M(\lambda)$ (accanto sono riportati gli zeri):

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= 1 - \lambda^2, \quad \lambda = \pm 1 \\ \Delta_2(\lambda) &= 1 - \lambda, \quad \lambda = 1 \\ \Delta_3(\lambda) &= 0 \\ \Delta_4(\lambda) &= \lambda - 1, \quad \lambda = 1 \\ \Delta_5(\lambda) &= 2\lambda^2 - 2, \quad \lambda = \pm 1 \\ \Delta_6(\lambda) &= 2\lambda - 2, \quad \lambda = 1 \end{aligned}$$

Da ciò segue che:

$$
\begin{aligned}
r\left(M\left(\lambda\right)\right) &= 2, \ \text{ se } \lambda \in \mathbb{R} - \left\{\lambda_*\right\} \\
r\left(M\left(\lambda\right)\right) &= 1, \ \text{ se } \lambda = \lambda_*
\end{aligned}
$$

In altri termini, $r\left(A\left(\lambda\right)\right)$ e $r\left(M\left(\lambda\right)\right)$ hanno il medesimo comportamento rispetto al parametro reale λ, per cui il sistema è compatibile $\forall \lambda \in (-\infty, +\infty)$. Per quanto riguarda il comportamento delle soluzioni, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\lambda = \lambda_* &\Longrightarrow \exists \infty^2 \text{ soluzioni} \\
\lambda \neq \lambda_* &\Longrightarrow \exists \infty^1 \text{ soluzioni}
\end{aligned}
$$

Per $\lambda = \lambda_*$ il sistema è equivalente all'unica equazione:

$$
x + y + z = 2,
$$

dotata di ∞^2 soluzioni:

$$
\left(2 - y - z, y, z\right), \ \ \forall y, z \in \mathbb{R}
$$

Per $\lambda \neq \lambda_*$ il sistema è equivalente a:

$$
\begin{aligned}
x + \lambda y &= 2 - z \\
\lambda x + y &= 2\lambda - z
\end{aligned}
$$

La soluzione generale è:

$$
\left(2 - \frac{z}{1+\lambda}, -\frac{z}{1+\lambda}, z\right), \ \forall z \in \mathbb{R}
$$

N. 33

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$
A\left(\lambda\right) = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda & -1 \\ 1 & -2 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad M\left(\lambda\right) = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}
$$

Studiamo il comportamento dei minori del terzo ordine estratti da $M\left(\lambda\right)$ (accanto sono riportati gli zeri):

$$
\begin{aligned}
\Delta_1\left(\lambda\right) &= -5 - 6\lambda - \lambda^2, \ \ \lambda = -5, \lambda = -1 \\
\Delta_2\left(\lambda\right) &= 1 - 2\lambda - 3\lambda^2, \ \ \lambda = -1, \lambda = \frac{1}{3} \\
\Delta_3\left(\lambda\right) &= 1 + 3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3, \ \ \lambda = -1 \\
\Delta_4\left(\lambda\right) &= -2 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^3, \ \ \lambda = \pm 1
\end{aligned} \tag{70}
$$

Dalle (70) si deduce che:

$$\left(\lambda = \lambda_* \overset{def}{=} -1 \Longrightarrow \Delta_k(\lambda) = 0, \quad k = 1, ...4\right) \Longrightarrow r\left(M\left(\lambda_*\right)\right) = 2, \tag{71}$$

giacchè per $\lambda = \lambda_*$, esiste almeno un minore del secondo ordine non nullo.
D'altro canto il determinante della matrice dei coefficienti è:

$$\mathcal{A}(\lambda) = \Delta_1(\lambda),$$

e come tale si annulla per $\lambda = \lambda_*, \lambda'_*$, essendo $\lambda'_* \overset{def}{=} -5$. Ciò implica:

$$r\left(A\left(\lambda_*\right)\right) = 2 \tag{72}$$

Dalle (71)-(72) segue che:

$$\left(\text{il sistema è compatibile e indeterminato (con } \infty^1 \text{ soluzioni)}\right) \Longleftrightarrow \left(\lambda = \lambda_*\right) \tag{73}$$

Per $\lambda = \lambda_*$ il sistema equivale a:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 + z \\ 0 + y &= -1 - z \end{aligned}$$

Le soluzioni sono:

$$(-1 - z, -1 - z, z)$$

Posto $A'_* = A(\lambda'_*)$, $M'_* = M(\lambda'_*)$, si ha:

$$\left(r\left(A'_*\right) = 2 \neq r\left(M'_*\right) = 3\right) \Longrightarrow \left(\text{per } \lambda = \lambda'_* \text{ il sistema è incompatibile}\right) \tag{74}$$

Per $\lambda \notin \mathbb{R} - \{\lambda_*, \lambda'_*\}$:

$$r(A(\lambda)) = 3, r(M(\lambda)) = 3$$

Quindi:

$$\left(\text{il sistema è compatibile e determinato}\right) \Longleftrightarrow \left(\lambda \notin \mathbb{R} - \{\lambda_*, \lambda'_*\}, \right) \tag{75}$$

Se è soddisfatta la (75) l'unica soluzione è:

$$\left(\frac{1 + \lambda - 2\lambda^2}{5 + \lambda}, \frac{3 + 2\lambda + \lambda^2}{5 + \lambda}, \frac{2(1 + 2\lambda)}{5 + \lambda}\right)$$

N. 34

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & \lambda+1 & -2\end{pmatrix};\quad M(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & \lambda\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & \lambda+1 & -2 & \lambda+1\end{pmatrix}$$

La terza riga della matrice $A(\lambda)$ è la somma delle prime due, per cui è $\det A(\lambda) = 0$. Poichè esiste almeno un minore del secondo ordine non nullo estratto da $A(\lambda)$, segue che:

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ r(M(\lambda))=2$$

D'altro canto i minori del terzo ordine estratti da $M(\lambda)$ sono identicamente nulli, quindi:

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ r(M(\lambda))=2$$

Si conclude che comunque prendiamo λ, il sistema risulta compatibile e indeterminato (∞^1 soluzioni). Il sistema equivale a:

$$\begin{aligned}x-z&=\lambda-\lambda y\\ x+z&=-1+y\end{aligned}$$

La soluzione generale è:

$$\left(\frac{1}{2}(-1+y+\lambda-y\lambda),\frac{1}{2}(y-1)(\lambda+1)\right)$$

N. 35

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 2 & -1\\ 4 & 2\lambda-1\end{pmatrix};\quad M(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1\\ 2 & -1 & \lambda\\ 4 & 2\lambda-1 & \lambda+2\end{pmatrix}$$

Studiamo il comportamento dei minori di $A(\lambda)$.

$$\begin{aligned}&D_1(\lambda)=-1-2\lambda,\text{ si annulla per }\lambda=-\frac{1}{2}\\ &D_2(\lambda)=D_1(\lambda)\\ &D_3(\lambda)=2+4\lambda,\text{ si annulla per }\lambda=-\frac{1}{2}\end{aligned}\tag{76}$$

Le (76) implicano:

$$\begin{aligned}r(A(\lambda))&=1,\ \text{ se }\lambda=\lambda_*\\ r(A(\lambda))&=2,\ \text{ se }\lambda\neq\lambda_*\end{aligned}$$

Qui è $\lambda_* \stackrel{def}{=} -1/2$. Passando alla matrice $M(\lambda)$ vediamo che:

$$\det M(\lambda) = 0 \Longrightarrow r(M(\lambda)) < 3$$

I minori del terzo ordine di $M(\lambda)$, sono:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= -1 - 2\lambda \\ \Delta_2(\lambda) &= -2 + \lambda \\ \Delta_3(\lambda) &= 1 + \lambda^2 \\ \Delta_4(\lambda) &= -1 - 2\lambda \\ \Delta_5(\lambda) &= -2 + \lambda \\ \Delta_6(\lambda) &= 1 + \lambda^2 \\ \Delta_7(\lambda) &= 2 + 4\lambda \\ \Delta_8(\lambda) &= 4 - 2\lambda \\ \Delta_9(\lambda) &= -2 - 2\lambda^2 \end{aligned} \tag{77}$$

Dalle (77):

$$\forall \lambda \in (-\infty, +\infty), \; r(M(\lambda)) = 2$$

Da ciò segue che l'insieme dei valori di λ per i quali il sistema è compatibile e determinato è:

$$\Lambda = \mathbb{R} - \{\lambda_*\} \tag{78}$$

Per $\lambda \in \Lambda$ il sistema equivale a:

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= 1 \\ 2x - y &= \lambda \end{aligned} \tag{79}$$

La soluzione è:

$$\left(\frac{1+\lambda^2}{1+2\lambda}, \frac{2-\lambda}{1+2\lambda} \right) \tag{80}$$

N.36

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 & -3 \\ 2 & \lambda+1 & 4 \\ 3 & 3 & \lambda+1 \end{pmatrix}; \quad M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & \lambda+1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & \lambda+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determiniamo l'espressione analitica del rango di $A(\lambda)$ in funzione del parametro λ. Iniziamo col determinare il suo determinante:

$$F(\lambda) \overset{def}{=} \det A(\lambda) = \lambda\left(\lambda^2 + 3\lambda - 4\right), \tag{81}$$

che si annulla per:

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$$

Evidentemente $r(\lambda_k) < 3$ per $k = 1, 2, 3$. Studiamo il comportamento dei minori del secondo ordine:

$$\begin{aligned}
&D_1(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3, \text{ si annulla per } \lambda = -3, \lambda = 1 \\
&D_2(\lambda) = 4\lambda + 10, \text{ si annulla per } \lambda = -\frac{5}{2} \\
&D_3(\lambda) = 3\lambda + 11, \text{ si annulla per } \lambda = -\frac{11}{3} \\
&D_4(\lambda) = 2\lambda + 11, \text{ si annulla per } \lambda = -\frac{11}{2} \\
&D_5(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 11, \text{ si annulla per } \lambda = -1 \pm 2\sqrt{3}
\end{aligned} \tag{82}$$

Dalle (82) segue:

$$\begin{aligned}
&r(A(\lambda)) = 3 \Longleftrightarrow \lambda \in \Lambda \overset{def}{=} \mathbb{R} - \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \\
&r(A(\lambda)) = \Longleftrightarrow \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}
\end{aligned}$$

Determiniamo i minori estratti da $M(\lambda)$ del terzo ordine:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 10, \ \text{ si annulla per } \lambda = -4, \lambda = 0, \lambda = 1 \\
&\Delta_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3, \ \text{ si annulla per } \lambda = 1, \lambda = 3 \\
&\Delta_3(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 10, \ \text{ si annulla per } \lambda = 2 \pm i\sqrt{6} \\
&\Delta_4(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 11, \ \text{ si annulla per } \lambda = \frac{1}{2}\left(-3 \pm i\sqrt{53}\right)
\end{aligned} \tag{83}$$

Dalle (83) segue:

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \ r(M(\lambda)) = 3$$

Quindi:

$$(il \text{ sistema è compatibile e determinato }) \Longleftrightarrow (\lambda \in \Lambda)$$

Per $\lambda \in \Lambda$ la soluzione è:

$$\left(\frac{\lambda^2+3\lambda-11}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+4)}, \frac{\lambda^2-4\lambda+10}{\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda}, \frac{\lambda-3}{\lambda(\lambda+4)}\right)$$

N.37

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}; \quad M(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Minori del secondo ordine estratti da $A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= \lambda(\lambda+2), \text{ si annulla per } \lambda = 0, -2 \\ D_2(\lambda) &= 4 + 2\lambda\left(1+\lambda^2\right), \text{ si annulla per } \lambda = -2, \pm i \\ D_3(\lambda) &= 2(2+\lambda), \text{ si annulla per } \lambda = -2 \end{aligned} \tag{84}$$

Dalle (84) segue:

$$\forall \lambda \in \Lambda = \mathbb{R} - \{\lambda_*\}, \quad r(A(\lambda)) = 2, \tag{85}$$

essendo $\lambda_* \overset{def}{=} -2$

Passiamo ai minori estratti da $M(\lambda)$.

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= \lambda(\lambda+2), \ \text{ si annulla per } \lambda = -2, \lambda = 0 \\ \Delta_2(\lambda) &= 4 + 2\lambda\left(1+\lambda^2\right), \ \text{ si annulla per } \lambda = -2, \pm i \\ \Delta_3(\lambda) &= \lambda^2 + 2\lambda - 1, \ \text{ si annulla per } \lambda = -1 \pm \sqrt{2} \\ \Delta_4(\lambda) &= \Delta_1(\lambda), \ \text{ si annulla per } \lambda = -2, \lambda = 0 \\ \Delta_5(\lambda) &= -1 \\ \Delta_6(\lambda) &= -4(\lambda+1), \ \text{ si annulla per } \lambda = -1 \end{aligned} \tag{86}$$

Dalle (86) segue:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ r(M(\lambda)) = 2 \tag{87}$$

Confrontando le (85)-(87):

$$(\text{il sistema è compatibile}) \iff (\lambda \in \Lambda) \tag{88}$$

Inoltre, per $\lambda \in \Lambda$ la caratteristica del sistema è $p = 2$, mentre il numero di incognite è $n = 1$, per cui la condizione di compatibilità (88) si riscrive:

$$\left(\text{il sistema è compatibile e indeterminato } (\infty^1 \text{ soluzioni})\right) \iff (\lambda \in \Lambda) \tag{89}$$

Le ∞^1 soluzioni sono quelle del sistema equivalente:

$$\begin{aligned} (\lambda+1)^2 x + y &= 2 + 4z \\ x + y &= 1 - 2\lambda z \end{aligned} \tag{90}$$

Abbiamo:

$$\left(\frac{1+2z(2+\lambda)}{\lambda(\lambda+2)}, \frac{-1+2\lambda+\lambda^2-2z(2+\lambda+2\lambda^2+\lambda^3)}{\lambda(\lambda+2)}\right)$$

N. 38
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & \lambda \end{pmatrix}; \quad M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & \lambda & 3\lambda \end{pmatrix}$$

Determiniamo il rango di $A(\lambda)$. I minori del secondo ordine sono:

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= -6-\lambda, \text{ si annulla per } \lambda = -6 \\ D_2(\lambda) &= 8+\lambda^2, \text{ si annulla per } \lambda = \pm 2\sqrt{2} \\ D_3(\lambda) &= 4+3\lambda, \text{ si annulla per } \lambda = -4/3 \end{aligned}$$

Risulta:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \ r(A(\lambda)) = 2$$

Passiamo alla matrice $M(\lambda)$. Il suo rango è pari a 3 se e solo se è non nullo il suo determinante:

$$G(\lambda) = \det M(\lambda) = -5\left(\lambda^2+3\lambda-4\right)$$

Le radici sono:

$$\lambda_1 = -4, \ \lambda_2 = 1 \tag{91}$$

Evidentemente:

$$r(M(\lambda)) = 3 \Longleftrightarrow \lambda \in \Lambda_1 = \mathbb{R} - \Lambda,$$

essendo:

$$\Lambda \stackrel{def}{=} \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

Pertanto la condizione di compatibilità è:

$$\text{il sistema è compatibile e determinato} \iff \lambda \in \Lambda \tag{92}$$

Per $\lambda \in \Lambda$ il sistema equivale a:

$$\begin{aligned} \lambda x + 2y &= 1 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}$$

L'unica soluzione è:

$$\left(\frac{5}{6+\lambda}, \frac{3-2\lambda}{6+\lambda} \right)$$

N. 39

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iniziamo esplicitando il determinante di $A(\lambda)$:

$$F(\lambda) \overset{def}{=} \det A(\lambda) = -3\lambda^2 + \lambda + 2$$

Gli zeri della funzione $F(\lambda)$ sono:

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3}, \; \lambda_2 = 1$$

Calcoliamo i minori del secondo ordine estratti da $A(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
D_1(\lambda) &= 2\lambda, \text{ si annulla per } \lambda = 0 \\
D_2(\lambda) &= \lambda^2, \text{ si annulla per } \lambda = 0 \\
D_3(\lambda) &= 3\lambda - 1, \text{ si annulla per } \lambda = \frac{1}{3} \\
D_3(\lambda) &= 3\lambda - 1, \text{ si annulla per } \lambda = \frac{1}{3} \\
D_4(\lambda) &= 1 \\
D_5(\lambda) &= 3 \\
D_6(\lambda) &= -2 \\
D_7(\lambda) &= -\lambda, \text{ si annulla per } \lambda = 0 \\
D_7(\lambda) &= -3\lambda, \text{ si annulla per } \lambda = 0
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$
\begin{aligned}
&r\left(A\left(\lambda\right)\right)=3 \ \text{ per } \lambda\in\Lambda=\mathbb{R}-\left\{\lambda_1,\lambda_2\right\}\\
&r\left(A\left(\lambda\right)\right)=2 \text{ altrimenti}
\end{aligned}
$$

Passiamo alla matrice $M\left(\lambda\right)$. I minori del terzo ordine:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1\left(\lambda\right)=2+\lambda-3\lambda^2, \ \text{ si annulla per } \lambda=-\frac{2}{3},1 \qquad (93)\\
&\Delta_2\left(\lambda\right)=-2\left(1-\lambda\right), \ \text{ si annulla per } \lambda=1\\
&\Delta_3\left(\lambda\right)=\left(-1+\lambda\right)\lambda \ \text{ si annulla per } \lambda=0,1\\
&\Delta_4\left(\lambda\right)=2-2\lambda, \ \text{ si annulla per } \lambda=1
\end{aligned}
$$

Dalle (93) vediamo che l'unico valore di $\lambda_2=1$ è l'unico valore di λ che annulla simultaneamente i minori del terzo ordine estratti da $M\left(\lambda\right)$. Viceversa, per $\lambda=\lambda_1$ è $r\left(A\left(\lambda_1\right)\right)=2$, $r\left(M\left(\lambda_1\right)\right)=3$. Quindi:

$$\lambda=\lambda_1 \Longrightarrow \text{ il sistema è incompatibile}$$

Inoltre per $\lambda=\lambda_2$ è $r\left(M\left(\lambda_2\right)\right)=2$, come si deduce dal calcolo diretto dei minori del secondo ordine estratti da $M\left(\lambda\right)$. Quindi:

$$\lambda=\lambda_2 \Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile e indeterminato } (\infty^1 \text{ soluzioni})$$

Infine per $\lambda\neq\lambda_{1,2}$ o ciò che è lo stesso, per $\lambda\in\Lambda$ è $r\left(A\left(\lambda\right)\right)=r\left(M\left(\lambda\right)\right)=2$, per cui:

$$\text{il sistema è compatibile e determinato} \Longleftrightarrow \lambda\in\Lambda$$

6.0.3 Esercizi proposti (seconda parte)

1. Risolvere il sistema:

$$
\begin{aligned}
2x_1-x_2-x_3&=4\\
3x_1+4x_2-2x_3&=11\\
3x_1-2x_2+4x_3&=11
\end{aligned}
$$

2. Risolvere il sistema:

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+2x_3&=-1\\
2x_1-x_2+2x_3&=-4\\
4x_1+x_2+4x_3&=-2
\end{aligned}
$$

3. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

4. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 51 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

5. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

6. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8 \end{aligned}$$

7. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \end{aligned}$$

8. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 0 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_1 + 0 - 2x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0 - 5x_4 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0 &= 5 \end{aligned}$$

9. Risolvere il sistema:

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4 \\
3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6 \\
3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\
3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6
\end{aligned}
$$

10. Risolvere il sistema:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\
&3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\
&5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\
&7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16
\end{aligned}
$$

11. Risolvere il sistema:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 0 &= 0 \\
0 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0 + 0 &= 2 \\
0 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 0 &= -2 \\
0 + 0 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2
\end{aligned}
$$

12. Risolvere il sistema:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\
&x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5
\end{aligned}
$$

13. Risolvere il sistema:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13 \\
&2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10 \\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11 \\
&2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6 \\
&2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3
\end{aligned}
$$

14. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -3 \end{aligned}$$

15. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5 \end{aligned}$$

16. Discutere il comportamento del sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

al variare di λ in $\mathbb{R}$.

17. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

18. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

19. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 &= -6 \end{aligned}$$

20. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

21. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 0 - 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 0 - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \end{aligned}$$

22. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ 0 + x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 + 0 - 3x_4 &= 1 \\ 0 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$$

23. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 14 \end{aligned}$$

24. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2 \\ 0 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12 \end{aligned}$$

25. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3 \end{aligned}$$

26. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 &= -1 \end{aligned}$$

27. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 3 \end{aligned}$$

28. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 0 - 3x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 7 \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 &= 25 \end{aligned}$$

29. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 0 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= -1 \end{aligned}$$

30. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 0 &= 2 \end{aligned}$$

31. Assegnato il sistema:

$$\begin{aligned} bx + ay + 0 &= c \\ cx + 0 + az &= b \\ 0 + cy + bz &= a, \end{aligned}$$

dimostrare che $abc \neq 0$ è condizione necessaria e sufficiente affinchè esso sia compatibile e determinato.

32. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

essendo λ un parametro reale.

33. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z + t &= 1 \\ x + \lambda y + z + t &= \lambda \\ x + y + \lambda z + t &= \lambda^2 \\ x + y + z + \lambda t &= \lambda^3 \end{aligned}$$

essendo λ un parametro reale.

34. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x + ay + a^2 z &= a^3 \\ x + by + b^2 z &= b^3 \\ x + cy + c^2 z &= c^3 \end{aligned}$$

essendo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

35. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + by + cz &= d \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z &= d^2 \end{aligned}$$

essendo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

36. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x + by + z &= 3 \\ x + 2by + z &= 4 \end{aligned}$$

essendo $a, b \in \mathbb{R}$.

37. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{aligned}$$

essendo $a, b \in \mathbb{R}$.

38. Assegnato il sistema:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= m \\ x + ay + z &= n \\ x + y + az &= p, \end{aligned}$$

discuterne il comportamento al variare dei parametri reali a, m, n, p.

39. Discutere il sistema:

$$\begin{aligned} x + ay + a^2 z &= 1 \\ x + ay + abz &= a \\ bx + a^2 y + a^2 bz &= a^2 b \end{aligned}$$

40. Assegnato il sistema:

$$\begin{aligned} (\lambda + 3)\, x + y + 2z &= \lambda \\ \lambda x + (\lambda - 1)\, y + z &= 2\lambda \\ 3\,(\lambda + 1)\, x + \lambda y + (\lambda + 3) &= 3, \end{aligned}$$

discuterne il comportamento al variare del parametro reale λ.

41. Studiare il seguente sistema:

$$\begin{aligned} \lambda x + \lambda y + (\lambda + 1)\, z &= \lambda \\ \lambda x + \lambda y + (\lambda - 1)\, z &= \lambda \\ (\lambda + 1)\, x + \lambda y + (2\lambda + 3)\, z &= 1, \end{aligned}$$

al variare di λ in $\mathbb{R}$.

42. Studiare il sistema:

$$\begin{aligned} 3kx + (2k + 1)\, y + (k + 1)\, z &= k \\ (2k - 1)\, x + (2k - 1)\, y + (k - 2)\, z &= k + 1 \\ (4k - 1)\, x + 3ky + 2kz &= 1 \end{aligned}$$

al variare di k in $\mathbb{R}$.

43. Studiare il seguente sistema:

$$\begin{aligned} ax + by + 2z &= 1 \\ ax + (2b-1)\,y + 3z &= 1 \\ ax + by + (b+3)\,z &= 2b-1 \end{aligned}$$

44. Assegnato il sistema:

$$\begin{aligned} (2m+1)\,x - my + (m+1)\,z &= m-1 \\ (m-2)\,x - 2x + (m-1)\,y + (m-2)\,z &= m \\ (2m-1)\,x + (m-1)\,y + (2m-1)\,z &= m, \end{aligned}$$

studiarne il comportamento al variare di m in $\mathbb{R}$.

45. Studiare il comportamento del sistema:

$$\begin{aligned} (5\lambda+1)\,x + 2\lambda y + (4\lambda+1)\,z &= 1+\lambda \\ (4\lambda-1)\,x + (\lambda-1)\,y + (4\lambda-1)\,z &= -1 \\ 2\,(3\lambda+1)\,x + 2\lambda y + (5\lambda+2)\,z &= 2-\lambda \end{aligned}$$

6.0.4 Soluzioni

N. 1

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \; M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60$$

Quindi:

$$r\,(A) = 3$$

Evidentemente $r\,(M) = 3$, quindi:

$$r\,(A) = r\,(M) = 3 = p$$

Perciò il sistema è di Cramer e la sua soluzione è:

$$(3, 1, 1)$$

N. 2
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \ M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A = 6 \Longrightarrow r(A) = r(M) = 3$$

Il sistema è di Cramer e la sua soluzione è

$$(1, 2, -2)$$

N. 3
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \ M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A = -2 \Longrightarrow r(A) = r(M) = 3$$

Il sistema è di Cramer e la sua soluzione è

$$(-8, 11, 1)$$

N. 4
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 51 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A = -27 \Longrightarrow r(A) = r(M) = 3$$

Il sistema è di Cramer e la sua soluzione è

$$\left(\frac{7}{9}, -\frac{88}{27}, \frac{295}{27}\right)$$

N. 5
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\3&-1&-1&-2\\2&3&-1&-1\\1&2&3&-1\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\3&-1&1&-2&-4\\2&3&-1&-1&-6\\1&2&3&-1&-4\end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A=-153\Longrightarrow r(A)=r(M)=4$$

Il sistema è di Cramer e la sua soluzione è

$$(-1,-1,0,1)$$

N. 6
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&-2\\2&-1&-2&-3\\3&2&-1&2\\2&-3&2&1\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}1&2&3&-2&6\\2&-1&-2&-3&8\\3&2&-1&2&4\\2&-3&2&1&-8\end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A=324\Longrightarrow r(A)=r(M)=4$$

Il sistema è di Cramer e la sua soluzione è

$$(1,2,-1,-2)$$

N. 7
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&3\\3&2&1&2\\4&3&2&1\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&2&3&1\\3&2&1&2&1\\4&3&2&1&-5\end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A=-20\Longrightarrow r(A)=r(M)=4$$

Il sistema è di Cramer e la sua soluzione è

$$(-2,2,-3,3)$$

N. 8
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & 12 \\ 4 & 3 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A = 24 \Longrightarrow r(A) = r(M) = 4$$

Il sistema è di Cramer e la sua soluzione è:

$$(1, 2, 1, -1)$$

N. 9

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A = 176 \Longrightarrow r(A) = r(M) = 4$$

Il sistema è di Cramer e la sua soluzione è:

$$(2, 0, 0, 0)$$

N. 10

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 12 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A = 2048 \Longrightarrow r(A) = r(M) = 4$$

Il sistema è di Cramer e la sua soluzione è:

$$(1, -1, 0, 2)$$

N. 11

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1\\1&2&3&0&0\\0&1&2&3&0\\0&0&1&2&3\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\1&2&3&0&0&2\\0&1&2&3&0&-2\\0&0&1&2&3&2\end{pmatrix}$$

Il determinante di A vale: $\det A=16$, quindi è $r(A)=5$ e tale è il rango della matrice M. Si conclude che il sistema è di Cramer con soluzione:

$$(1,-1,1,-1,1)$$

N. 12

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\1&2&1&1&1\\1&1&3&1&1\\1&1&1&4&1\\1&1&1&1&5\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1&2\\1&2&1&1&1&0\\1&1&3&1&1&3\\1&1&1&4&1&-2\\1&1&1&1&5&5\end{pmatrix}$$

Il determinante di A vale: $\det A=98$, quindi è $r(A)=5$ e tale è il rango della matrice M. Si conclude che il sistema è di Cramer con soluzione:

$$(1,-1,1,-1,1)$$

N. 13

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&2&3&4\\2&2&1&2&3\\2&2&2&1&2\\2&2&2&2&1\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&13\\2&1&2&3&4&10\\2&2&1&2&3&11\\2&2&2&1&2&6\\2&2&2&2&1&3\end{pmatrix}$$

Il determinante di A vale: $\det A=31$, quindi è $r(A)=5$ e tale è il rango della matrice M. Si conclude che il sistema è di Cramer con soluzione:

$$(0,2,-2,0,3)$$

N. 14

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-3&4&-1\\2&-1&3&-4&2\\3&1&-1&2&-1\\4&3&4&2&2\\1&-1&-1&2&-3\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}1&2&-3&4&-1&-1\\2&-1&3&-4&2&8\\3&1&-1&2&-1&3\\4&3&4&2&2&-2\\1&-1&-1&2&-3&-3\end{pmatrix}$$

Il determinante di A vale: $\det A = 48$, quindi è $r(A) = 5$ e tale è il rango della matrice M. Si conclude che il sistema è di Cramer con soluzione:

$$(2, 0, -2, -2, 1)$$

N.15
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Determiniamo il rango di A. A tale scopo osserviamo che i minori del terzo ordine estratti da A sono tutti nulli, mentre esistono minori del secondo ordine non nulli. Quindi:

$$r(A) = 2 \tag{94}$$

Stesso comportamento dei minori estratti dalla matrice M, per cui:

$$r(M) = 2 \tag{95}$$

Dalle (94)-(95) segue che il sistema è compatibile e ha caratteristica $p = 2$. Essendo $n = 4$ il numero di incognite, si ha che esso ammette ∞^2 soluzioni che si ottengono risolvendo il sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 - x_4 &= -1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

La soluzione generale è:

$$(2x_2 - x_3, x_2, x_3, 1)$$

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{gathered}$$

N. 16
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix}$$

I minori del terzo ordine estratti da A sono tutti nulli, mentre esistono minori del secondo ordine non nulli:

$$r(A) = 2$$

I minori del terzo ordine non nulli estratti da $M(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1(\lambda) = 5(\lambda - 5), \text{ si annulla per } \lambda = 5 \\
&\Delta_2(\lambda) = -3(\lambda - 5), \text{ si annulla per } \lambda = 5 \\
&\Delta_3(\lambda) = 7(\lambda - 5), \text{ si annulla per } \lambda = 5 \\
&\Delta_4(\lambda) = -\lambda + 5, \text{ si annulla per } \lambda = 5 \\
&\Delta_5(\lambda) = -6(\lambda - 5), \text{ si annulla per } \lambda = 5 \\
&\Delta_6(\lambda) = 5(\lambda - 5), \text{ si annulla per } \lambda = 5
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&r(M(\lambda)) = 3 \text{ per } \lambda \in \Lambda = \mathbb{R} - \{\lambda_*\} \\
&r(M(\lambda)) = 2 \text{ per } \lambda = \lambda_*,
\end{aligned} \tag{96}$$

essendo $\lambda_* \stackrel{def}{=} 5$. La (96) implica:

$$(\text{il sistema è compatibile}) \iff (\lambda = \lambda_*)$$

Inoltre per tale valore del parametro λ il sistema è inderminato con ∞^2 soluzioni.

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &= 1 - x_3 - x_4 \\
x_1 + 2x_2 &= 2 + x_3 - 4x_4
\end{aligned}$$

La soluzione generale è:

$$\left(\frac{1}{5}(4 - x_3 - 6x_4), \frac{1}{5}(3 + 3x_3 - 7x_4), x_3, x_4\right)$$

N. 17

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

I minori del terzo ordine di A:

$$\Delta_1 = -4,\ \Delta_2 = -8,\ \Delta_3 = -4,\ \Delta_4 = -4$$

Quindi:

$$r\left(A\right) = 3$$

Il determinante della matrice M è:

$$\det M = 12$$

Ciò implica: $r\left(M\right) = 4$, per cui il sistema è incompatibile.

N. 18

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix};\ M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

I minori del terzo ordine di A:

$$\Delta_1 = 22,\ \Delta_2 = -22,\ \Delta_3 = -22,\ \Delta_4 = 22$$

Quindi:

$$r\left(A\right) = 3$$

Il determinante della matrice M è:

$$\det M = 0,$$

per cui:

$$r\left(M\right) = 3$$

Il sistema è compatibile e determinato. Il sistema equivalente si ottiene cancellando l'ultima equazione:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \end{aligned}$$

La soluzione è:

$$(1, 2, -2)$$

N. 19

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -13 \end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}$$

I minori del terzo ordine di A:

$$\Delta_1=-6,\ \Delta_2=-6,\ \Delta_3=6,\ \Delta_4=18$$

Quindi:

$$r(A)=3$$

Inoltre:

$$\det M=0 \Longrightarrow r(M)=3$$

Si conclude che il sistema è compatibile e determinato, la cui soluzione si ottiene risolvendo:

$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3&=3 \\ 3x_1+x_2-5x_3&=0 \\ 4x_1-x_2+x_3&=3 \end{aligned}$$

risulta:

$$(1,2,1)$$

N. 20

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A=20 \Longrightarrow r(A)=4$$

Il sistema è di Cramer. La soluzione è:

$$\left(\frac{3}{10},\frac{9}{5},-\frac{1}{2},-\frac{19}{10}\right)$$

N. 21

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1&-1\\2&-1&0&-3\\3&0&-1&1\\2&2&-2&5\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}2&-1&1&-1&1\\2&-1&0&-3&2\\3&0&-1&1&-3\\2&2&-2&5&-6\end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\det A=-9\Longrightarrow r(A)=4$$

Il sistema è di Cramer. La soluzione è:

$$\left(0,2,\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$$

N. 22

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&3&0&-3\\0&-7&3&1\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&3&0&-3\\0&-7&3&1\end{pmatrix}$$

Il rango della matrice A è $r(A)<3$ poiché è $\det A=0$, mentre esistono minori del terzo ordine non nulli. Ad esempio:

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&-1\\1&3&0\end{vmatrix}=2\Longrightarrow r(A)=3$$

Idem per la matrice M: $r(M)=3$. Si conclude che il sistema è compatibile con ∞^1 soluzioni. Il sistema equivalente è:

$$\begin{aligned}x_1-2x_2+3x_3&=4+4x_4\\0+x_2-x_3&=-3-x_4\\x_1+3x_2+0&=1+3x_4\end{aligned}$$

La soluzione generale è:

$$(-8,3+x_4,2(3+x_4))$$

N. 23

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix}1&2&3&4&11\\2&3&4&1&12\\3&4&1&2&13\\4&1&2&3&14\end{pmatrix}$$

Il rango della matrice A è $r(A) = 4$ poiché è $\det A = 160$, quindi il sistema è di Cramer e la sua soluzione è:

$$(2, 1, 1, 1)$$

N. 24
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \; M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

I minori del terzo e quarto ordine estratti da A sono tutti nulli, quindi: $r(A) < 3$. D'altro canto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \Longrightarrow r(A) = 2$$

Anche il rango di M è pari a 2; quindi il sistema è compatibile ed ha caratteristica $p = 2$. Il numero di incognite è $n = 5$, quindi $\exists\ \infty^3$ soluzioni che sono quelle del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 - x_3 - x_4 - x_5 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -2 - x_3 - x_4 + 3x_5 \end{aligned}$$

La soluzione generale è:

$$(-16 + x_3 + x_4 + 5x_5, 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5, x_3, x_4, x_5)$$

N. 25
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}; \; M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Identico comportamento del sistema precedente:

$$r(A) = r(M) = 2$$

La soluzione è quella del sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 + x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 - x_2 &= -x_3 - x_4 + 2x_5 \end{aligned}$$

La soluzione generale è:

$$\left(\frac{1+x_5}{3}, \frac{1}{3}+x_3+x_4-\frac{5}{3}x_5, x_3, x_4, x_5\right)$$

N. 26
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 \end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5&=1 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5&=1 \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5&=1 \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5&=-1 \end{aligned}$$

Risulta: $r(A)=r(M)=2\overset{def}{=}p \Longrightarrow \exists\ \infty^{n-p}=\infty^3$ soluzioni che sono quelle del sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1-2x_2&=1-x_3+x_4-x_5 \\ x_1+2x_2&=1+x_3-x_4+2x_5 \end{aligned}$$

La soluzione generale è:

$$\left(\frac{1+x_5}{3}, \frac{1}{6}(-1-3x_3-3x_4+5x_5), x_3, x_4, x_5\right)$$

N. 27
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix};\ M=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

I minori di ordine 4 estratti da A sono tutti nulli, mentre esistono minori del terzo ordine non nulli, ad esempio:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-60 \Longrightarrow r(A)=3$$

Passiamo alla matrice M. Qui esistono minori di ordine 4 non nulli, ad esempio:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 5 & 2 \\ -2 & 5 & -7 & 3 \\ 7 & -5 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 36 \Longrightarrow r(M) = 4$$

Essendo $r(A) \neq r(M)$ si conclude che il sistema è incompatibile.

N. 28

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 2 \\ 9 & -9 & 6 & -16 & 2 \end{pmatrix}; \ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 9 & -9 & 6 & -16 & 2 & 25 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice A è:

$$r(A) = 3$$

Di contro, esistono minori di ordine 4 estratti da M, ad esempio:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 7 \\ 6 & -16 & 2 & 25 \end{vmatrix} = -40,$$

donde $r(M) = 4$. Si conclude che il sistema è incompatibile.

N. 29

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \ M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $\det A = 0$, per cui è $r(A) < 5$. Esistono minori di ordine 4 non nulli: $r(A) = 4$. Inoltre, i minori del quinto ordine estratti dalla matrice M sono tutti nulli, quindi $r(M) = 4$. Perciò il sistema è compatibile e indeterminato con ∞^1 soluzioni che sono quelle del sistema ottenuto cancellando la quinta equazione:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -1 - x_5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 3 + x_5 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 3 + x_5 \end{aligned}$$

La soluzione generale è:

$$\left(-\frac{x_5}{2}, \frac{1}{2}(-2-x_5), 0, \frac{1}{2}(-2-x_5)\right)$$

N. 31
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix}; \ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{pmatrix}$$

Il calcolo diretto porge:

$$\det A(a,b,c) = -2abc \tag{97}$$

La (97) implica:

$$r(A(a,b,c)) = 3 \Longleftrightarrow abc \neq 0 \tag{98}$$

D'altro canto il sistema è compatibile e determinato se e solo se $r(A) = r(M) = 3$, donde l'asserto. La soluzione è:

$$\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}, \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

N. 32
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}; \ M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A(\lambda)$ è:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\stackrel{def}{=} \det A(\lambda) \\ &= \lambda^3 - 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

Si annulla per :

$$\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 1$$

I minori del secondo ordine estratti da $A(\lambda)$ sono:

$$
\begin{aligned}
D_1(\lambda) &= \lambda^2 - 1 \\
D_2(\lambda) &= \lambda - 1 \\
D_3(\lambda) &= -\lambda + 1 \\
D_4(\lambda) &= D_2(\lambda) \\
D_5(\lambda) &= D_1(\lambda) \\
D_6(\lambda) &= D_2(\lambda) \\
D_7(\lambda) &= D_2(\lambda) \\
D_8(\lambda) &= D_3(\lambda) \\
D_9(\lambda) &= D_1(\lambda)
\end{aligned}
$$

Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
F(\lambda_h) &= 0, \;\; \text{per } h = 1, 2 \\
D_k(\lambda_h) &= 0, \;\; \text{per } k = 1, 2, 3, \; h = 1, 2
\end{aligned}
\tag{99}
$$

Le (99) implicano:

$$
\begin{aligned}
r(A(\lambda)) = 3 &\Longleftrightarrow \lambda \in \Lambda \overset{def}{=} \mathbb{R} - \{\lambda_1, \lambda_2\} \\
\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\} &\Longrightarrow r(A(\lambda)) = 1
\end{aligned}
$$

I minori del terzo ordine estratti dalla matrice $M(\lambda)$ sono:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1(\lambda) &= F(\lambda) \\
\Delta_2(\lambda) &= \left(\lambda^2 - 1\right)^2 \\
\Delta_3(\lambda) &= -(\lambda - 1)^2 \\
\Delta_4(\lambda) &= \Delta_3(\lambda) \\
\Delta_5(\lambda) &= \lambda + 1
\end{aligned}
\tag{100}
$$

Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\Delta_h(\lambda_1) &\neq 0, \text{ per } h \in \{2, 3, 4, 5\} \\
\Delta_h(\lambda_2) &= 0, \text{ per } h \in \{1, 2, 3, 4, 5\}
\end{aligned}
\tag{101}
$$

Quindi:

$$\lambda = \lambda_1 \Longrightarrow \left(r\left(A\left(\lambda_1\right)\right) = 1, \quad r\left(M\left(\lambda_1\right)\right) = 3\right) \Longrightarrow \text{ il sistema è incompatibile} \tag{102}$$
$$\lambda = \lambda_2 \Longrightarrow \left(r\left(A\left(\lambda_1\right)\right) = 1, \quad r\left(M\left(\lambda_1\right)\right) = 1\right) \Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile}$$

L'ultima proposizione si giustifica osservando che per $\lambda = \lambda_2$ i minori del secondo ordine estratti da $M(\lambda)$ sono tutti nulli. In tal caso, il sistema è indeterminato in quanto ammette ∞^2 soluzioni. Inoltre:

$$\text{il sistema è compatibile e determinato } \Longleftrightarrow \lambda \in \Lambda \tag{103}$$

Se è vera la (103), l'unica soluzione del sistema è:

$$\left(-\frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \frac{1}{2+\lambda}, \frac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda}\right)$$

Per $\lambda = \lambda_2$ le soluzioni sono quelle dell'equazione:

$$x + y + z = 1,$$

cioè:

$$(1 - y - z, y, z), \quad \forall y, z \in (-\infty, +\infty)$$

N. 33

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}; \quad M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice $A(\lambda)$ è:

$$\det A(\lambda) = \left(\lambda^3 - 1\right)(\lambda + 3),$$

che si annulla per:

$$\lambda_1 = -3, \ \lambda_2 = 1 \tag{104}$$

I minori del terzo ordine estratti da $A(\lambda)$ sono:

$$
\begin{aligned}
D_1(\lambda) &= \lambda^3 - 3\lambda + 2\\
D_2(\lambda) &= (\lambda-1)^2\\
D_3(\lambda) &= -(\lambda-1)^2\\
D_4(\lambda) &= (\lambda-1)^2\\
D_5(\lambda) &= D_1(\lambda)\\
D_6(\lambda) &= D_2(\lambda)\\
D_7(\lambda) &= D_2(\lambda)\\
D_8(\lambda) &= D_3(\lambda)\\
D_9(\lambda) &= D_4(\lambda)\\
D_{10}(\lambda) &= D_2(\lambda)\\
D_{11}(\lambda) &= D_1(\lambda)\\
D_{12}(\lambda) &= D_2(\lambda)\\
D_{13}(\lambda) &= D_2(\lambda)\\
D_{14}(\lambda) &= D_3(\lambda)\\
D_{15}(\lambda) &= D_2(\lambda)\\
D_{16}(\lambda) &= D_1(\lambda)
\end{aligned}
$$

Abbiamo:

$$
\begin{gathered}
\forall h = 1,2,...,16,\ \ D_h(\lambda_2) = 0 \qquad (105)\\
\forall h = 1,2,...,16,\ \ D_h(\lambda_1) \neq 0
\end{gathered}
$$

Inoltre:

$$
A(\lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, M(\lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (106)
$$

che hanno manifestamente rango 1.
Le (104)-(106)-(105) implicano:

$$
\begin{gathered}
r(A(\lambda)) = 4 \Longleftrightarrow \lambda \in \Lambda = \mathbb{R} - \{\lambda_1, \lambda_2\}\\
\lambda = \lambda_1 \Longrightarrow r(A(\lambda_1)) = 3\\
\lambda = \lambda_2 \Longrightarrow r(A(\lambda_2)) = 1
\end{gathered}
$$

Quindi per $\lambda \in \Lambda$ il sistema risulta compatibile e determinato, poiché è $r(A(\lambda)) = r(M(\lambda)) = 4$. L'unica soluzione[5] è:

$$\left(-\frac{\lambda^2+2\lambda+2}{\lambda+3}, -\frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda+3}, \frac{2\lambda+1}{\lambda+3}, \frac{\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+3}\right) \tag{107}$$

Passiamo al caso $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$, iniziando con $\lambda = \lambda_1$. Per tale valore di λ esistono minori del quarto ordine estratti dalla matrice $M(\lambda_1)$ non nulli, per cui è $r(M(\lambda_1)) = 4$. Quindi:

$$\lambda = \lambda_1 \Longrightarrow \text{ il sistema è incompatibile}$$

Per $\lambda = \lambda_2$ risulta:

$$r(A(\lambda_2)) = r(M(\lambda_2)) = 1 \Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile e indeterminato}$$

Più precisamente, esistono ∞^3 soluzioni che si ottengono risolvendo l'equazione lineare:

$$x + y + z + t = 1,$$

la cui soluzione generale è:

$$(-y-z-t, y, z, t), \quad \forall y, z, t \in \mathbb{R}$$

N. 34

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}; \ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A(a,b,c)$ è:

$$\begin{aligned} F(a,b,c) &\overset{def}{=} \det A(a,b,c) \\ &= -(a-b)(a-c)(b-c) \end{aligned} \tag{108}$$

Dalla (108) segue immediatamente:

$$r(A(a,b,c)) = 3 \Longleftrightarrow a, b, c \text{ sono tutti distinti} \tag{109}$$

Cioè:

$$\text{il sistema è compatibile e determinato} \Longleftrightarrow a, b, c \text{ sono tutti distinti} \tag{110}$$

[5] Ovviamente dipendente dal parametro λ.

In tal caso l'unica soluzione del sistema è:

$$(abc, -bc - a(b+c), a+b+c) \tag{111}$$

Ora sia $a = b$; abbiamo:

$$F(a,a,c) = 0 \Longrightarrow r(A(a,a,c)) < 3 \tag{112}$$

Esistono comunque minori del secondo ordine estratti da $A(a,b,c)$ non nulli, quindi:

$$r(A(a,a,c)) = 2$$

Un calcolo diretto porge:

$$r(M(a,a,c)) = 2$$

Quindi per $a = b \neq c$, il sistema è compatibile e indeterminato (∞^1 soluzioni). La soluzione generale si ottiene dal sistema:

$$\begin{aligned} x + ay &= a^3 - a^2 z \\ x + cy &= c^3 - c^2 z \end{aligned}$$

Risulta:

$$\left(a\left(a^2 + c^2(c-z)\right) - az, a^3 + c^3(c-z) - a^2 z, z\right) \tag{113}$$

Nei rimanenti casi - in cui due dei tre parametri a, b, c sono uguali - si assiste al medesimo comportameto: compatibilità e indeterminazione (∞^1 soluzioni).
Resta infine da esaminare il caso speciale: $a = b = c$. Il sistema diventa:

$$\begin{aligned} x + ay + a^2 z &= a^3 \\ x + ay + a^2 z &= a^3 \\ x + ay + a^2 z &= a^3, \end{aligned}$$

manifestamente equivalente all'unica equazione lineare:

$$x + ay + a^2 z = a^3$$

Da cui la soluzione generale dipendente da due parametri (y, z).

$$\left(a^3 - ay + a^2 z, y, z\right), \forall y, z \in \mathbb{R}$$

N. 35

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix};\ M(a,b,c,d)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\end{pmatrix}$$

Il determinante di $A(a,b,c)$ è:

$$\begin{aligned}F(a,b,c)&\overset{def}{=}\det A(a,b,c)\\&=-(a-b)(a-c)(b-c)\end{aligned}\tag{114}$$

Dalla (114) segue immediatamente:

$$r(A(a,b,c))=3\Longleftrightarrow\ a,b,c\text{ sono tutti distinti}\tag{115}$$

Cioè:

$$\text{il sistema è compatibile e determinato}\ \Longleftrightarrow\ a,b,c\text{ sono tutti distinti}\tag{116}$$

In tal caso l'unica soluzione del sistema è:

$$\left(\frac{(b-d)(c-d)}{(a-b)(a-c)},\frac{(a-d)(-c+d)}{(a-b)(b-c)},\frac{(a-d)(-b+d)}{(a-c)(-b+c)}\right)\tag{117}$$

Ora sia $a=b\neq c$; abbiamo:

$$F(a,a,c)=0\Longrightarrow r(A(a,a,c))<3\tag{118}$$

Esistono comunque minori del secondo ordine estratti da $A(a,b,c)$ non nulli, quindi:

$$r(A(a,a,c))=2$$

I minori del terzo ordine estratti dalla matrice $M(a,a,c,d)$ sono:

$$\begin{aligned}&\Delta_1(a,a,c,d)=0\\&\Delta_2(a,a,c,d)=0\\&\Delta_3(a,a,c,d)=-a^2c+ac^2+a^2d-c^2d-ad^2+cd^2\\&\Delta_4(a,a,c,d)=\Delta_3(a,a,c,d)\end{aligned}\tag{119}$$

Dalle (119):

$$\begin{aligned}&r(M(a,a,c,d))=3,\ a\neq d,c\neq d\\&r(M(a,a,c,d))=2,\ a=d\\&r(M(a,a,c,d))=2,\ c=d\end{aligned}\tag{120}$$

Le (120) implicano che per $a=b\neq c$ il sistema è compatibile se è vera una delle condizioni seguenti: $a=d$, $c=d$. In entrambi i casi il numero delle soluzioni è ∞^1.
Se $a=d$ le soluzioni del sistema si ricavano dal seguente:

$$\begin{aligned} x+z &= 1-y \\ ax+cz &= a-ay \end{aligned} \tag{121}$$

Per assegnati valori dei parametri reali a,c, le ∞^1 soluzioni sono:

$$\left((1+a)(1-y), y, a(1+c)(1-y)\right) \tag{122}$$

Se $c=d$ le soluzioni del sistema si ricavano dal seguente:

$$\begin{aligned} x+z &= 1-y \\ ax+cz &= c-ay \end{aligned}$$

Per assegnati valori dei parametri reali a,c, le ∞^1 soluzioni sono:

$$\left(1+c-y(1+a), y, c^2-a\left[y(1+c)-1\right]\right) \tag{123}$$

Passiamo al caso $a\neq b=c$. Abbiamo:

$$r\left(A\left(a,b,b\right)\right)=2 \tag{124}$$

I minori del terzo ordine estratti dalla matrice $M\left(a,b,b,d\right)$ sono:

$$\begin{aligned} &\Delta_1\left(a,b,b,d\right)=0 \\ &\Delta_2\left(a,b,b,d\right)=-a^2b+ab^2+a^2d-b^2d-ad^2+bd^2 \\ &\Delta_3\left(a,b,b,d\right)=\Delta_2\left(a,a,c,d\right) \\ &\Delta_4\left(a,b,b,d\right)=0 \end{aligned} \tag{125}$$

Dalle (125):

$$\begin{aligned} &r\left(M\left(a,b,b,d\right)\right)=3,\ a\neq d, b\neq d \\ &r\left(M\left(a,b,b,d\right)\right)=2,\ a=d \\ &r\left(M\left(a,b,b,d\right)\right)=2,\ b=d \end{aligned} \tag{126}$$

Cioè abbiamo un comportamento analogo al precedente:

$$
\begin{aligned}
(a,b,b,d) &= (a,b,b,a) \Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile } (\infty^1 \text{ soluzioni}) \\
(a,b,b,d) &= (a,b,b,b) \Longrightarrow \text{il sistema è compatibile } (\infty^1 \text{ soluzioni})
\end{aligned} \tag{127}
$$

Ci aspettiamo che anche il caso $a = c \neq b$ sia analogo ai precedenti. Infatti:

$$
r\left(A\left(a,b,a\right)\right) = 2 \tag{128}
$$

I minori del terzo ordine estratti dalla matrice $M\left(a,b,b,d\right)$ sono:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1\left(a,b,a,d\right) &= 0 \\
\Delta_2\left(a,b,a,d\right) &= -a^2b + ab^2 + a^2d - b^2d - ad^2 + bd^2 \\
\Delta_3\left(a,b,a,d\right) &= 0 \\
\Delta_4\left(a,b,a,d\right) &= \Delta_2\left(a,a,c,d\right)
\end{aligned} \tag{129}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
(a,b,a,d) &= (a,b,a,a) \Longrightarrow \text{ il sistema è compatibile } (\infty^1 \text{ soluzioni}) \\
(a,b,a,d) &= (a,b,a,b) \Longrightarrow \text{il sistema è compatibile } (\infty^1 \text{ soluzioni})
\end{aligned} \tag{130}
$$

Esaminiamo l'ultimo caso: $a = b = c \neq 0$. Qui si annullano oltre al determinante di A, anche i suoi minori del secondo ordine, quindi:

$$
r\left(A\left(a,a,a\right)\right) = 1
$$

D'altro canto, i minori del terzo ordine estratti da $M\left(a,a,a,d\right)$ sono identicamente nulli per qualunque valore di d. I minori del secondo ordine non nulli sono:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1\left(a,d\right) &= d - a \\
\Delta_2\left(a,d\right) &= d^2 - a^2 \\
\Delta_3\left(a,d\right) &= ad\left(d - a\right)
\end{aligned} \tag{131}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
r\left(M\left(a,a,a,d\right)\right) &= 2, \;\; d \neq a \\
r\left(M\left(a,a,a,d\right)\right) &= 1, \;\; d = a
\end{aligned} \tag{132}
$$

Ciò implica che per $a = b = c \neq 0$

$$\text{il sistema è compatibile} \Longleftrightarrow d = a \tag{133}$$

Il numero di soluzioni è ∞^2, poiché $p = 1$. Il sistema si scrive:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + ay + az &= a \\ a^2x + a^2y + a^2z &= d^2 \end{aligned} \tag{134}$$

Osservazione. Dalla (134) si evince direttamente che le prime due equazioni sono equivalenti a $x + y + z = 1$, e che il sistema ammette soluzioni se e solo se $d = a$.

La soluzione generale è quella dell'equazione lineare:

$$x + y + z = 1$$

Cioè:

$$(1 - y - z, y, z)$$

N. 36
Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ a^2 & 2b & 1 \end{pmatrix}; \ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ a^2 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A(a,b)$ è:

$$F(a,b) \stackrel{def}{=} \det A(a,b) = b(1-a) \tag{135}$$

La (135) implica:

$$r(A(a,b)) = 3 \Longleftrightarrow (a \neq 1, b \neq 0) \tag{136}$$

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, esistono minori del terzo ordine estratti dalla matrice $M(a,b)$ non nulli, per cui:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \ r(M(a,b)) = 3 \tag{137}$$

Dalle (135)-(137):

$$(a \neq 1, b \neq 0) \Longrightarrow (\text{il sistema è compatibile e determinato}) \tag{138}$$

Se è vera la (138) la soluzione è:

$$\left(\frac{1-2b}{b\left(1-a\right)},\frac{1}{b},\frac{1+2b\left(a-2\right)}{b\left(a-1\right)}\right) \tag{139}$$

Per esaminare gli altri casi, esplicitiamo i minori del terzo ordine estratti dalla matrice $M\left(a,b\right)$:

$$\begin{aligned}
\Delta_1\left(a,b\right) &= b\left(1-a\right) \\
\Delta_2\left(a,b\right) &= -1+4b-2ab \\
\Delta_3\left(a,b\right) &= a-1 \\
\Delta_4\left(a,b\right) &= 1-2b
\end{aligned} \tag{140}$$

Dalle (140):

$$\left(\Delta_h\left(a,b\right)=0,\ h=1,...4\right) \Longleftrightarrow \left(a=1,b=1/2\right) \tag{141}$$

Da questa condizione e dalla (136):

$$\left(a=1,\ b=1/2\right) \Longrightarrow \text{(il sistema è compatibile e indeterminato)} \tag{142}$$

Più precisamente, le ∞^1soluzioni si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{aligned}
x+y &= 4-z \\
x+\frac{1}{2}y &= 3-z
\end{aligned}$$

Otteniamo:

$$\left(2-z,2,z\right)$$

N. 37

Le due matrici (coefficienti, coefficienti+termini noti) sono:

$$A\left(a,b\right)=\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix};\ M\left(a,b\right)=\begin{pmatrix} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A\left(a,b\right)$ è:

$$F\left(a,b\right) \stackrel{def}{=} \det A\left(a,b\right) = b\left(a-1\right)^2\left(a+2\right), \tag{143}$$

Gli zeri al finito della funzione $F\left(a,b\right)$ sono:

$$b=0, a=1, a=-2 \tag{144}$$

donde:

$$r\left(A\left(a,b\right)\right)=3\Longleftrightarrow\left(b\neq 0,\ a\neq -2,1\ \right) \tag{145}$$

Determiniamo i minori del secondo ordine estratti da $A\left(a,b\right)$:

$$\begin{aligned} D_1\left(a,b\right)&=b\left(a^2-1\right) \\ D_2\left(a,b\right)&=a-1 \\ D_3\left(a,b\right)&=b\left(1-a\right) \\ D_4\left(a,b\right)&=b\left(a-1\right) \\ D_5\left(a,b\right)&=a^2-1 \\ D_6\left(a,b\right)&=b\left(a-1\right) \\ D_7\left(a,b\right)&=b\left(1-a\right) \\ D_8\left(a,b\right)&=a-1 \\ D_9\left(a,b\right)&=b\left(a^2-1\right) \end{aligned} \tag{146}$$

Dalle (146)

$$\left(D_h\left(a,b\right)=0,\ \ h=1,...,9\right)\Longleftrightarrow\left(\left(a,b\right)=\left(1,b\right)\right) \tag{147}$$

Riassumendo

$$\begin{aligned} r\left(A\left(a,b\right)\right)=3&\Longleftrightarrow\left(b\neq 0,\ a\neq -2,1\ \right) \\ r\left(A\left(a=-2,1,b\right)\right)=r\left(A\left(a,0\right)\right)=2\ &\Longleftrightarrow\left(\left(a,b\right)\neq\left(1,b\right),\ \ \forall b\in\mathbb{R}\right) \\ r\left(A\left(a=-2,1,b\right)\right)=r\left(A\left(a,0\right)\right)=1\ &\Longleftrightarrow\left(\left(a,b\right)=\left(1,b\right),\ \ \forall b\in\mathbb{R}\right) \end{aligned} \tag{148}$$

Esplicitiamo i minori del terzo ordine estratti da $M\left(a,b\right)$:

$$\begin{aligned} \Delta_1\left(a,b\right)&=F\left(a,b\right) \\ \Delta_2\left(a,b\right)&=b\left(a-1\right)\left(a-b\right) \\ \Delta_3\left(a,b\right)&=\left(1-a\right)\left(ab+b-2\right) \\ \Delta_4\left(a,b\right)&=b\left(a-1\right)\left(a-b\right) \end{aligned} \tag{149}$$

Abbiamo il seguente comportamento:

$$\left(\Delta_h\left(a,b\right)=0,\ \ h=1,...4\right)\Longleftrightarrow\left(\left(a,b\right)=\left(1,b\right),\ \left(a,b\right)=\left(-2,-2\right)\right) \tag{150}$$

Cioè:

$$r\left(M\left(a,b\right)\right)<3\Longleftrightarrow\left(\left(a,b\right)=\left(1,b\right),\ \left(a,b\right)=\left(-2,-2\right)\right)$$

Se è vera la (150) i minori del secondo ordine estratti da M e che dipendono da b, sono:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(b) &= b-1\\ \Gamma_2(b) &= b(b-1)\\ \Gamma_3(b) &= b-1,\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}& r(M(a,b)) = 3 \Longleftrightarrow ((a,b) \neq (1,b), (a,b) \neq (-2,-2), \ \ \forall b \in \mathbb{R}) \\ & r(M(a,b)) = 2 \Longleftrightarrow (a = b = -2)\end{aligned} \tag{151}$$

Confrontando le (151)-(148):

$$(b \neq 0, \ a \neq -2, 1 \ ) \Longrightarrow (\text{il sistema è compatibile e determinato}) \tag{152}$$

Se è vera la (152), la soluzione è:

$$\left(\frac{a-b}{a^2+a-2}, \frac{b^2+ab-2}{F(a,b)}, \frac{a-b}{a^2+a-2}\right) \tag{153}$$

Inoltre:

$$r(A(-2,-2)) = r(M(-2,-2)) = 2$$

Quindi per $a = b = -2$ il sistema ammette ∞^1soluzioni che sono quelle del sistema:

$$\begin{aligned}-2x-2y &= 1-z\\ x+4y &= -2-z\end{aligned} \tag{154}$$

Risolvendo (154):

$$\left(z, -\frac{1}{2}(1+z), z\right)$$

Infine:

$$r(A(1,1)) = r(M(1,1)) = 1$$

Cioè per $a = b = 1$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni che sono quelle dell'equazione lineare:

$$x+y+z=1$$

Assumendo come parametri liberi:

$$(1-(y-z)\,,y,z) \tag{155}$$

N. 38
Scriviamo le due matrici:

$$A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix};\ M(a,m,n,p)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & m \\ 1 & a & 1 & n \\ 1 & 1 & a & p \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A(a)$:

$$F(a)\overset{def}{=}\det A(a)=(a-1)^2(a+2) \tag{156}$$

Le radici al finito di $F(a)$ sono:

$$a_1=-2,\ a_2=1 \tag{157}$$

I minori del secondo ordine estratti da $A(a)$:

$$\begin{aligned} D_1(a)&=a^2-1 \\ D_2(a)&=a-1 \\ D_3(a)&=-D_2(a) \\ D_4(a)&=D_2(a) \\ D_5(a)&=D_1(a) \\ D_6(a)&=D_2(a) \\ D_7(a)&=-D_2(a) \\ D_8(a)&=D_2(a) \\ D_9(a)&=D_1(a) \end{aligned} \tag{158}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} &\forall h=1,...,9,\quad |D_h(a_1)|=3 \\ &\forall h=1,...,9,\quad D_h(a_2)=0 \end{aligned} \tag{159}$$

Dalle (156)-(159) risulta:

$$\begin{aligned} &\forall a\in\mathbb{R}-\{a_1,a_2\}\,,\ r(A(a))=3 \\ &r(A(a_1))=2 \\ &r(A(a_2))=1 \end{aligned} \tag{160}$$

I minori del terzo ordine estratti da $M(a,m,n,p)$:

$$\begin{aligned}\Delta_1(a,m,n,p) &= F(a) \\ \Delta_2(a,m,n,p) &= (a-1)\left[p(a+1)-(m+n)\right] \\ \Delta_3(a,m,n,p) &= (a-1)\left[m+p-(a+1)n\right] \\ \Delta_4(a,m,n,p) &= (a-1)\left[m(a+1)-n-p\right]\end{aligned} \tag{161}$$

Dalle (161) segue:

$$\forall h \in \{1,2,3,4\}, \, \Delta_h(a_2,m,n,p) = 0 \tag{162}$$

I minori del secondo ordine estratti da $M(a,m,n,p)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(a,m,n,p) &= a^2-1 \\ \Gamma_2(a,m,n,p) &= a-1 \\ \Gamma_3(a,m,n,p) &= an-m \\ \Gamma_4(a,m,n,p) &= a-1 \\ \Gamma_5(a,m,n,p) &= -am+n \\ \Gamma_6(a,m,n,p) &= n-m \\ \Gamma_7(a,m,n,p) &= a-1 \\ \Gamma_8(a,m,n,p) &= a^2-1 \\ \Gamma_9(a,m,n,p) &= -m+ap \\ \Gamma_{10}(a,m,n,p) &= a-1 \\ \Gamma_{11}(a,m,n,p) &= -m+p \\ \Gamma_{12}(a,m,m,p) &= -am+p \\ \Gamma_{13}(a,m,m,p) &= 1-a \\ \Gamma_{14}(a,m,m,p) &= -1+a \\ \Gamma_{15}(a,m,m,p) &= -n+p \\ \Gamma_{16}(a,m,m,p) &= -1+a^2 \\ \Gamma_{17}(a,m,m,p) &= -n+ap \\ \Gamma_{18}(a,m,m,p) &= -an+p\end{aligned} \tag{163}$$

Dalle (163) segue che per $a=a_2$, i minori non identicamente nulli sono:

$$\begin{aligned}\Gamma_3(a_2,m,m,p) &= n-m \\ \Gamma_9(a_2,m,m,p) &= p-m \\ \Gamma_{15}(a_2,m,m,p) &= p-n,\end{aligned}$$

che sono simultaneamente nulli se, e solo $n = m = p$.
Quindi:

$$\begin{aligned} & r\left(M\left(a_2, m, n, p\right)\right) = 1, \text{ per } m = n = p \\ & r\left(M\left(a_2, m, n, p\right)\right) = 2, \quad \text{altrimenti} \end{aligned} \tag{164}$$

Dalla (160) vediamo che $r\left(A\left(a_2\right)\right) = 1$. Ciò implica che per $a = a_2$ il sistema è compatibile se, e solo se $m = n = p$. In tal caso il sistema è

$$\begin{aligned} x + y + z &= m \\ x + y + z &= m \\ x + y + z &= m, \end{aligned}$$

banalmente equivalente all'unica equazione lineare:

$$x + y + z = m,$$

che ammette le ∞^2 soluzioni:

$$(m - y - z, y, z)$$

Passiamo al caso $a = a_1$. I minori del terzo ordine non identicamente nulli estratti da $M\left(a_1, m, n, p\right)$

$$\begin{aligned} \Delta_2\left(a_1, m, n, p\right) &= 3\left(m + n + p\right) \\ \Delta_3\left(a_1, m, n, p\right) &= -\Delta_2\left(a_1, m, n, p\right) \\ \Delta_4\left(a_1, m, n, p\right) &= \Delta_2\left(a_1, m, n, p\right) \end{aligned} \tag{165}$$

Dalle (165):

$$\left(\forall h \in \{2, 3, 4\}, \ \ \Delta_h\left(a_1, m, n, p\right) = 0\right) \Longleftrightarrow m + n + p = 0 \tag{166}$$

Da ciò segue che per $a = a_1$ il sistema è compatibile se, e solo se $m + n + p = 0$. In tal caso, ammette ∞^1 soluzioni che si ottengono dal sistema:

$$\begin{aligned} -2x + y &= m - z \\ x - 2y &= n - z \end{aligned}$$

Risolvendo

$$\left(\frac{1}{3}\left(-2m - n + 3z\right), \frac{1}{3}\left(-m - 2n + 3z\right), z\right) \tag{167}$$

Infine, per $a \in \mathbb{R} - \{a_1, a_2\}$, il sistema è compatibile e determinato. La soluzione è:

$$\left(\frac{m(a+1)-n-p}{(a+2)(a-1)}, \frac{n(a+1)-m-p}{(a+2)(a-1)}, \frac{p(a+1)-m-n}{(a+2)(a-1)}\right) \tag{168}$$

N. 39

Scriviamo le matrici:

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2 b \end{pmatrix}; \quad M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & a & ab & a \\ b & a^2 & a^2 b & a^2 b \end{pmatrix} \tag{169}$$

Il determinante di $A(a,b)$:

$$F(a,b) \stackrel{def}{=} \det A(a,b) = a^2 (a-b)^2, \tag{170}$$

che si annulla per:

$$a = 0, b \tag{171}$$

Un calcolo diretto mostra che per $a = 0, b$, i minori del secondo ordine estratti da $A(a,b)$ sono simultaneamente nulli. Quindi:

$$\begin{aligned} & r(A(a,b)) = 3 \Longleftrightarrow a \in \Lambda(b) \stackrel{def}{=} \mathbb{R} - \{0, b\}, \forall b \in \mathbb{R} \\ & r(A(a,a)) = r(A(0,b)) = 1 \end{aligned} \tag{172}$$

Passiamo ai minori del terzo ordine estratti da $M(a,b)$:

$$\begin{aligned} \Delta_1(a,b) &= a^2 (a-b)^2 \\ \Delta_2(a,b) &= a(1-a)(a-b) \\ \Delta_3(a,b) &= ab\left(1-a^2\right)(a-b) \\ \Delta_4(a,b) &= a^4 (a-b)(1-b) \end{aligned} \tag{173}$$

Dalle (173):

$$\forall h \in \{1,2,3,4\}, \ \ \Delta_h(a,a) = \Delta_h(0,b) = 0, \tag{174}$$

Cioè:

$$r(M(a,b)) = 3 \Longleftrightarrow a \in \Lambda(b) \stackrel{def}{=} \mathbb{R} - \{0, b\}, \forall b \in \mathbb{R} \tag{175}$$

Confrontando le (172)-(175) segue:

$$(\text{il sistema è compatibile e determinato}) \Longleftrightarrow (F(a,b) \neq 0) \tag{176}$$

Se $F(a,b)$ la soluzione è:

$$\left(\frac{a^2(1-b)}{a-b}, \frac{b(a^2-1)}{a(a-b)}, \frac{1-a}{a(a-b)}\right) \tag{177}$$

Passiamo al caso $a=b$. Dalla seconda delle (172) e dalla (174): $r(A(a,a))=1$, $r(M(a,a))<3$. Per esplicitare quest'ultimo, scriviamo i minori del secondo ordine non indenticamente nulli estratti da $M(a,a)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(a) &= a-1 \\
\Gamma_2(a) &= a(a-1) \\
\Gamma_3(a) &= a^2(a-1) \\
\Gamma_4(a) &= a\left(a^2-1\right) \\
\Gamma_5(a) &= a^2\left(a^2-1\right) \\
\Gamma_6(a) &= a^3\left(a^2-1\right) \\
\Gamma_7(a) &= a^2(a-1) \\
\Gamma_8(a) &= a^3(a-1) \\
\Gamma_9(a) &= a^4(a-1)
\end{aligned} \tag{178}$$

Dalle (178):

$$r(M(a,a))=1 \Longleftrightarrow a=1 \tag{179}$$

Quindi se $a=b$, il sistema è compatibile se, e solo se $a=b=1$. In tal caso è $p=1$, quindi esistono ∞^2 soluzioni che si ottengono risolvendo l'equazione lineare:

$$x+y+z=1$$

Abbiamo:

$$(1-y-z,y,z)$$

Passiamo al caso $a=0$. Dalla seconda delle (172): $r(0,b)=1$, mentre [eq. (174)] $r(M(0,b))<3$. Per $(a,b)=(0,b)$ esiste un minore del secondo ordine estratto da $M(0,b)$ pari a -1, per cui è $r(M(0,b))=2$. Si conclude che se $a=0$, il sistema è incompatibile.

N. 40

Le matrici che ci interessano sono:

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{pmatrix}; M(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & 2\lambda \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 & 3 \end{pmatrix} \tag{180}$$

Determinante di $A(\lambda)$:

$$F(\lambda) \stackrel{def}{=} \det A(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 1), \tag{181}$$

i cui zeri sono:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 \tag{182}$$

I minori del secondo ordine estratti da $A(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
D_1(\lambda) &= \lambda^2 + \lambda - 3 \\
D_2(\lambda) &= 3 - \lambda \\
D_3(\lambda) &= 3 - 2\lambda \\
D_4(\lambda) &= \lambda^2 - 3 \\
D_5(\lambda) &= \lambda^2 + 3 \\
D_6(\lambda) &= 3 - \lambda \\
D_7(\lambda) &= 3 - 2\lambda^2 \\
D_8(\lambda) &= -3 + \lambda^2 \\
D_9(\lambda) &= \lambda^2 + \lambda - 3
\end{aligned} \tag{183}$$

Abbiamo:

$$\exists h \in \{1, 2, ..., 9\}, \; D_h(\lambda_k) \neq 0 \tag{184}$$

Dalle (182)-(184):

$$\begin{aligned}
r(A(\lambda)) = 3 &\Longleftrightarrow \lambda \in \Lambda \stackrel{def}{=} \mathbb{R} - \{\lambda_1, \lambda_2\} \\
r(A(\lambda_k)) = 2, &\quad k = 1, 2
\end{aligned} \tag{185}$$

I minori del terzo ordine estratti da $M(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\lambda) &= F(\lambda) \\
\Delta_2(\lambda) &= -4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda - 9 \\
\Delta_3(\lambda) &= -\lambda^3 - 12\lambda + 9 \\
\Delta_4(\lambda) &= \lambda^3 + 3\lambda^2 - 15\lambda + 9
\end{aligned} \tag{186}$$

Dalle (186):

$$\forall h \in \{2, 3, 4\}, \Delta_h(\lambda_k) \neq 0, \; k = 1, 2 \tag{187}$$

La (187) implica:

$$r\left(M\left(\lambda\right)\right)=3,\,\forall\lambda\in\mathbb{R} \tag{188}$$

donde:

$$\text{(il sistema è compatibile)}\Longleftrightarrow\lambda\in\Lambda \tag{189}$$

Nel caso (189) il sistema ammette l'unica soluzione:

$$\left(\frac{\lambda^3+3\lambda^2-15\lambda+9}{F\left(\lambda\right)},\frac{\lambda^3+12\lambda-9}{F\left(\lambda\right)},\frac{-4\lambda^3+3\lambda^2+12\lambda-9}{F\left(\lambda\right)}\right) \tag{190}$$

N. 41
Scriviamo le solite matrici:

$$A\left(\lambda\right)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & \lambda+1\\ \lambda & \lambda & \lambda-1\\ \lambda+1 & \lambda & 2\lambda+3\end{pmatrix};\,M\left(\lambda\right)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & \lambda+1 & \lambda\\ \lambda & \lambda & \lambda-1 & \lambda\\ \lambda+1 & \lambda & 2\lambda+3 & 1\end{pmatrix} \tag{191}$$

Calcoliamo il determinante di $A\left(\lambda\right)$:

$$F\left(\lambda\right)=\det A\left(\lambda\right)=-2\lambda \tag{192}$$

I minori del secondo ordine estratti da $A\left(\lambda\right)$:

$$\begin{aligned}&D_1\left(\lambda\right)=0\\&D_2\left(\lambda\right)=F\left(\lambda\right)\\&D_3\left(\lambda\right)=F\left(\lambda\right)\\&D_4\left(\lambda\right)=-\lambda\\&D_5\left(\lambda\right)=\lambda^2+\lambda-1\\&D_6\left(\lambda\right)=\lambda\left(\lambda+2\right)\\&D_7\left(\lambda\right)=-\lambda\\&D_8\left(\lambda\right)=\lambda^2+3\lambda+1\\&D_9\left(\lambda\right)=\lambda\left(\lambda+4\right)\end{aligned} \tag{193}$$

Dalle (192)-(193):

$$\begin{aligned}&r\left(A\left(\lambda\right)\right)=3\Longleftrightarrow\lambda\neq0\\&r\left(A\left(0\right)\right)=2\end{aligned} \tag{194}$$

I minori del terzo ordine estratti da $M\left(\lambda\right)$:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= F(\lambda) \\ \Delta_2(\lambda) &= 0 \\ \Delta_3(\lambda) &= -F(\lambda) \\ \Delta_4(\lambda) &= -F(\lambda)(\lambda-1) \end{aligned} \tag{195}$$

Dalle (195) segue che l'annullarsi del determinante di $A(\lambda)$ implica l'annullarsi dei minori del terzo ordine estratti da $M(\lambda)$, donde:

$$\lambda = 0 \Longrightarrow r(A(0)) = r(M(0)) = 2 \tag{196}$$

Quindi:

$$(\text{il sistema è compatibile e determinato}) \Longleftrightarrow \lambda \neq 0 \tag{197}$$

Inoltre:

$$\lambda = 0 \Longrightarrow \left(\text{il sistema è compatibile e determinato } (\infty^1 \text{ soluzioni})\right) \tag{198}$$

Per $\lambda \neq 0$ la soluzione è:

$$(1-\lambda, \lambda, 0) \tag{199}$$

Per $\lambda = 0$, le ∞^1 soluzioni sono quelle del sistema:

$$\begin{aligned} 0 - z &= 0 \\ x + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Cioè:

$$(1, 0, z) \tag{200}$$

N. 42

Le matrici sono:

$$A(k) = \begin{pmatrix} 3k & 2k+1 & k+1 \\ 2k-1 & 2k-1 & k-2 \\ 4k-1 & 3k & 2k \end{pmatrix}; \quad M(k) = \begin{pmatrix} 3k & 2k+1 & k+1 & k \\ 2k-1 & 2k-1 & k-2 & k+1 \\ 4k-1 & 3k & 2k & 1 \end{pmatrix} \tag{201}$$

Il determinante di $A(k)$ è:

$$F(k) = \det A(k) = (k-1)^2 (k+1) \tag{202}$$

Gli zeri di $F(k)$:

$$k_1 = -1, k_2 = 1 \tag{203}$$

I minori del secondo ordine estratti da $A(k)$:

$$\begin{aligned} D_1(k) &= 2k^2 - 3k + 1 \\ D_2(k) &= k^2 - 7k + 1 \\ D_3(k) &= -(1 + 4k) \\ D_4(k) &= (k-1)^2 \\ D_5(k) &= 2k^2 - 3k + 1 \\ D_6(k) &= k(k-1) \\ D_7(k) &= -\left(2k^2 - 3k + 1\right) \\ D_8(k) &= 7k - 2 \\ D_9(k) &= k(k+4) \end{aligned} \tag{204}$$

Dalle (204):

$$k = k_j,\ j = 1, 2 \Longrightarrow \exists D_i(k_j) \neq 0,\ i = 1, ..., 9 \tag{205}$$

Le (202)-(205) implicano:

$$\begin{aligned} r(A(k \neq k_j)) &= 3 \\ r(A(k_j)) &= 2 \end{aligned} \tag{206}$$

I minori del terzo ordine estratti dalla matrice $M(k)$:

$$\begin{aligned} \Delta_1(k) &= F(k) \\ \Delta_2(k) &= -3k(k-1)^2 \\ \Delta_3(k) &= -k\left(2k^2 - 9k + 7\right) \\ \Delta_4(k) &= 4k^2 - 3k - 1 \end{aligned} \tag{207}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \Delta_i(k_1) &\neq 0, \text{ per } i = 2, 3, 4 \\ \Delta_i(k_2) &= 0, \text{ per } i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \tag{208}$$

Cioè:

$$r\left(M\left(k_1\right)\right)=3 \tag{209}$$
$$r\left(M\left(k_2\right)\right)=2$$

Le (206)-(209) implicano:

$$\begin{aligned} k \neq k_1, k_2 &\Longrightarrow \text{(il sistema è compatibile e determinato)} \\ k = k_2 &\Longrightarrow \text{(il sistema è compatibile e indeterminato)} \\ k = k_1 &\Longrightarrow \text{(il sistema è incompatibile)} \end{aligned} \tag{210}$$

Nel primo caso la soluzione è:

$$\left(\frac{4k+1}{k^2-1}, \frac{k\left(2k-7\right)}{k^2-1}, -\frac{3k}{k+1}\right) \tag{211}$$

Per $k=k_2$ il sistema ammette ∞^1soluzioni che si ottengono da

$$\begin{aligned} 3y+2z &= 1-3x \\ y-z &= 2-x \end{aligned}$$

Risolvendo:

$$\left(x, 1-x, -1\right) \tag{212}$$

N. 43

Scriviamo le matrici:

$$A\left(a,b\right)=\begin{pmatrix} a & b & 2 \\ a & 2b-1 & 3 \\ a & b & b+3 \end{pmatrix}; \; M\left(a,b\right)=\begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{pmatrix} \tag{213}$$

Il determinante di $A\left(a,b\right)$:

$$F\left(a,b\right)=\det A\left(a,b\right)=a\left(b^2-1\right) \tag{214}$$

Gli zeri di $F\left(a,b\right)$:

$$a_1=0, b_1=-1, b_2=1 \tag{215}$$

I minori del secondo ordine estratti da $A\left(a,b\right)$:

$$
\begin{aligned}
D_1(a,b) &= a(b-1) \\
D_2(a,b) &= a \\
D_3(a,b) &= 2-b \\
D_4(a,b) &= 0 \\
D_5(a,b) &= a(b+1) \\
D_6(a,b) &= b(1+b) \\
D_7(a,b) &= a(1-b) \\
D_8(a,b) &= ab \\
D_9(a,b) &= 2b^2+2b-3
\end{aligned} \tag{216}
$$

Dalle (216) vediamo che per $a = a_1$, i minori non identicamente nulli sono:

$$
\begin{aligned}
D_3(a_1,b) &= 2-b \\
D_6(a_1,b) &= b(1+b) \\
D_9(a_2,b) &= 2b^2+2b-3
\end{aligned} \tag{217}
$$

Dalle (217):

$$
\exists h \in \{3,6,9\} : D_h(a_1,b) \neq 0 \tag{218}
$$

Per $b = b_1$, i minori non identicamente nulli sono:

$$
\begin{aligned}
D_1(a,b_1) &= -2a \\
D_2(a,b_1) &= a \\
D_3(a,b_1) &= 3 \\
D_7(a,b_1) &= 2a \\
D_8(a,b_1) &= -a \\
D_9(a,b_1) &= -3
\end{aligned} \tag{219}
$$

Dalle (219):

$$
\exists h \in \{1,2,3,7,8,9\} : D_h(a,b_1) \neq 0 \tag{220}
$$

Per $b = b_2$, i minori non identicamente nulli sono:

$$
\begin{aligned}
D_2(a,b_2) &= a \\
D_3(a,b_2) &= 1 \\
D_4(a,b_2) &= 2a \\
D_5(a,b_2) &= 2 \\
D_8(a,b_2) &= a \\
D_9(a,b_2) &= 1
\end{aligned}
\tag{221}
$$

Dalle (221):

$$
\exists h \in \{2,3,4,5,8,9\} : D_h(a,b_2) \neq 0 \tag{222}
$$

Sempre dalle (216):

$$
\exists h : D_h(a_1,b_j) \neq 0, \text{ per } j = 1,2 \tag{223}
$$

Dalle (215)-(218)-(220)-(222)-(223) segue:

$$
\begin{aligned}
r(A(a,b)) &= 3, \text{ per } a\left(b^2-1\right) \neq 0 \\
r(A(a,b)) &= 2, \text{ altrimenti}
\end{aligned}
\tag{224}
$$

Passiamo ai minori del terzo ordine estratti da $M(a,b)$:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1(a,b) &= F(a,b) \\
\Delta_2(a,b) &= 2F(a,b) \\
\Delta_3(a,b) &= 2a(b-1) \\
\Delta_4(a,b) &= -b^2+6b-5
\end{aligned}
\tag{225}
$$

Dalle (225) vediamo che per $a = a_1$ i minori del terzo ordine non identicamente nulli sono:

$$
\Delta_4(a_1,b) = --b^2+6b-5,
$$

che si annulla per $b = 1,5$. Quindi se $r(A(a,b)) = 2$ (cioè se $F(a,b) = 0$), è $r(M(a,b)) = 2$ se e solo se $b = 1,5$. Ciò implica:

$$
\text{(il sistema è compatibile e determinato)} \Longleftrightarrow a\left(b^2-1\right) \neq 0 \tag{226}
$$

Altrimenti:

$$
a\left(b^2-1\right) = 0 \Longrightarrow [\text{(il sistema è compatibile)} \Longleftrightarrow (b = 1,5)] \tag{227}
$$

Si osservi che la (227) è equivalente a:

$$(a,b)=(a,1)\Longrightarrow \left(\text{il sistema è compatibile e indeterminato } (\infty^1 \text{ soluzioni})\right) \tag{228}$$
$$(a,b)=(0,5)\Longrightarrow \left(\text{il sistema è compatibile e indeterminato } (\infty^1 \text{ soluzioni})\right)$$

Nel caso (226) la soluzione è:

$$\left(\frac{b^2+2b-5}{a(b+1)},\frac{b-1}{b+1},\frac{2(b-1)}{b+1}\right) \tag{229}$$

Nel caso (227) il sistema ammette ∞^1. Esaminiamo i singoli casi:

- $(a,b)=(a,1)$
  Il sistema è:
  $$\begin{aligned} ax+y+2z&=1\\ ax+y+3z&=1\\ ax+y+3z&=1, \end{aligned}$$
  la cui soluzione generale è:
  $$(x,1-ax,0) \tag{230}$$

- $(a,b)=(0,5)$
  Il sistema è:
  $$\begin{aligned} 5y+2z&=1\\ 9y+3z&=1\\ 5y+8z&=9 \end{aligned}$$
  Risolvendo:
  $$\left(x,-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right) \tag{231}$$

N. 44
Le matrici:

$$A(m)=\begin{pmatrix} 2m+1 & -m & m+1\\ m-2 & m-1 & m-2\\ 2m+1 & m-1 & 2m-1 \end{pmatrix};\ M(m)=\begin{pmatrix} 3m & 3m-7 & m-5 & m-1\\ 2m-1 & 4m-1 & 2m & m\\ 4m & 5m-7 & 2m-5 & m \end{pmatrix} \tag{232}$$

Calcoliamo il determinante di $A(m)$:

$$F(m) = \det A(m) = m\left(m^2 - 1\right),$$

che si annulla per:

$$m_1 = -1, m_2 = 0, m_3 = 1 \tag{233}$$

I minori del secondo ordine estratti da $A(m)$:

$$\begin{aligned}
D_1(m) &= 3m^2 - 3m - 1 \\
D_2(m) &= m(m-2) \\
D_3(m) &= -2m^2 + 2m + 1 \\
D_4(m) &= 4m^2 - 2m - 1 \\
D_5(m) &= m(-1 + 2m) \\
D_6(m) &= -3m^2 + m + 1 \\
D_7(m) &= m^2 - 1 \\
D_8(m) &= 0 \\
D_9(m) &= m^2 - 1
\end{aligned} \tag{234}$$

Risulta:

$$\exists h \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} : \forall k \in \{1,2,3\}, \quad D_h(m_k) \neq 0 \tag{235}$$

Dalle (234)-(235):

$$\begin{aligned}
r(A(m)) &= 3, \text{ se } m \in \Lambda \stackrel{def}{=} \mathbb{R} - \{m_k\} \\
r(A(m)) &= 2, \text{ altrimenti}
\end{aligned} \tag{236}$$

Passiamo ai minori del terzo ordine estratti dalla matrice $M(m)$.

$$\begin{aligned}
\Delta_1(m) &= F(m) \\
\Delta_2(m) &= -2m^3 + m - 1 \\
\Delta_3(m) &= -m^2(m+1) \\
\Delta_4(m) &= -\Delta_2(m)
\end{aligned} \tag{237}$$

Dalle (237):

$$\begin{gathered}
\Delta_h(m_1) = 0, \ h = 1,2,3,4 \\
\exists h \in \{1,2,3,4\} : \Delta_h(m_k) \neq 0 \text{ con } k = 2,3
\end{gathered} \tag{238}$$

Le (238) implicano:

$$\begin{aligned} r\left(M\left(m\right)\right) &= 2\ ,\ \text{per } m = m_1 \\ r\left(M\left(m\right)\right) &= 3,\ \ \text{altrimenti} \end{aligned} \tag{239}$$

Si conclude che:

$$m \in \Lambda \stackrel{def}{=} \mathbb{R} - \{m_1, m_2, m_3\} \Longrightarrow (\text{ il sistema è compatibile e determinato}) \tag{240}$$
$$m = m_1 \Longrightarrow (\text{il sistema è compatibile e indeterminato})$$
$$m = m_2, m_3 \Longrightarrow (\text{il sistema è incompatibile})$$

Per $m \in \Lambda$ l'unica soluzione è:

$$\left(\frac{2m^2 - 2m + 1}{m\left(m-1\right)}, \frac{m}{m-1}, -\frac{2m^2 - 2m + 1}{m\left(m-1\right)}\right) \tag{241}$$

Per $m = m_1$ il sistema è:

$$\begin{aligned} -x + y &= -2 \\ -3x - 2y - 3z &= -1 \\ -3x - 2y - 3z &= -1, \end{aligned}$$

equivalente a:

$$\begin{aligned} -x + y &= -2 \\ -3x - 2y &= -1 + 3z \end{aligned}$$

Le ∞^1soluzioni sono:

$$\left(1 - \frac{3}{5}z, -1 - \frac{3}{5}z, z\right)$$

N. 45

Scriviamo le solite matrici:

$$A\left(\lambda\right) = \begin{pmatrix} 5\lambda + 1 & 2\lambda & 4\lambda + 1 \\ 4\lambda - 1 & \lambda - 1 & 4\lambda - 1 \\ 2\left(3\lambda + 1\right) & 2\lambda & 5\lambda + 2 \end{pmatrix},\ M\left(\lambda\right) = \begin{pmatrix} 5\lambda + 1 & 2\lambda & 4\lambda + 1 & 1 + \lambda \\ 4\lambda - 1 & \lambda - 1 & 4\lambda - 1 & -1 \\ 2\left(3\lambda + 1\right) & 2\lambda & 5\lambda + 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A\left(\lambda\right)$:

$$F(\lambda) = \lambda\left(\lambda^2 - 1\right),$$

che si annulla per:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1 \tag{242}$$

I minori del secondo ordine estratti da $A(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
D_1(\lambda) &= -3\lambda^2 - 2\lambda - 1 \\
D_2(\lambda) &= \lambda(4\lambda - 1) \\
D_3(\lambda) &= 4\lambda^2 + \lambda + 1 \\
D_4(\lambda) &= -2\lambda(\lambda + 1) \\
D_5(\lambda) &= \lambda(1 + \lambda) \\
D_6(\lambda) &= 2\lambda(1 + \lambda) \\
D_7(\lambda) &= 2\left(\lambda^2 + \lambda + 1\right) \\
D_8(\lambda) &= \lambda - 4\lambda^2 \\
D_9(\lambda) &= -3\lambda^2 - \lambda - 1
\end{aligned} \tag{243}$$

Risulta:

$$\forall h,\ D_h(\lambda) \neq 0$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&r(A(\lambda)) = 3, \text{ per } \lambda \in \Lambda \overset{def}{=} \mathbb{R} - \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \\
&r(A(\lambda)) = 2, \text{ per } \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{244}$$

Passiamo ai minori del terzo ordine estratti dalla matrice $M(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\lambda) &= F(\lambda) \\
\Delta_2(\lambda) &= \lambda\left(5\lambda^2 - 2\lambda - 1\right) \\
\Delta_3(\lambda) &= \lambda^2(7 - 8\lambda) \\
\Delta_4(\lambda) &= \lambda^2(5 - 7\lambda)
\end{aligned} \tag{245}$$

Dalle (245):

$$\begin{aligned}
&\forall h \in \{1, 2, 3, 4\},\ \Delta_h(\lambda_2) = 0 \\
&\exists h \in \{1, 2, 3, 4\} : \Delta_h(\lambda_j) \neq 0,\ \forall j \in \{1, 3\}
\end{aligned} \tag{246}$$

Quindi:

$$r\left(M\left(\lambda\right)\right)=3,\text{ per }\lambda\in\Lambda'\overset{def}{=}\mathbb{R}-\{\lambda_2\}\qquad(247)$$
$$r\left(M\left(\lambda\right)\right)=2,\text{ altrimenti}$$

Dal confronto delle (244)-(247):

$$\lambda\in\Lambda\Longrightarrow(\text{il sistema è compatibile e determinato})\qquad(248)$$
$$\lambda=\lambda_2\Longrightarrow(\text{il sistema è compatibile e indeterminato})$$
$$\lambda\in\Lambda-\{\lambda_2\}\Longrightarrow(\text{il sistema è incompatibile})$$

Per $\lambda\in\Lambda$, l'unica soluzione è:

$$\left(\frac{\lambda\left(5-7\lambda\right)}{\lambda^2-1},\frac{\lambda\left(8\lambda-7\right)}{\lambda^2-1},\frac{5\lambda^2-2\lambda-1}{\lambda^2-1}\right)\qquad(249)$$

Per $\lambda=\lambda_2$, il sistema è

$$x+z=1$$
$$-x-y-z=-1$$
$$2x+2z=2,$$

equivalente a:

$$x=1-z$$
$$x+y=1-z,$$

le cui soluzioni sono:

$$(1-z,0,z)$$