1 Area del rettangoloide

Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 1 *Sia $A \neq \emptyset$. Gli insiemi non vuoti $A_1, A_2, ..., A_n$ costituiscono una **partizione** di A se:*

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$$

$$\overset{\circ}{A}_k \bigcap \overset{\circ}{A}_{k'} = \emptyset, \text{ per } k, k' \in \{1, 2, ..., n\} \text{ con } k \neq k'$$

Sia $f(x)$ continua in $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e ivi non negativa.

Definizione 2 *Dicesi* **rettangoloide di base** $[a, b]$ **relativo alla funzione** $f(x)$, *il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:*

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\right\} \tag{1}$$

Eseguiamo ora una partizione dell'intervallo $[a, b]$ attraverso $n + 1$ punti:

$$x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$$

Precisamente:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Si tratta di una partizione, poiché:

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, b] = [a, b]$$

$$\forall k, k' \in \{0, 1, ..., n-1\} \text{ con } k \neq k', \quad (x_k, x_{k+1}) \cap (x_{k'}, x_{k'+1}) = \emptyset$$

Indichiamo tale partizione con il simbolo convenzionale $D(x_0, x_1, ..., x_n)$. Poniamo per definizione:

$$\delta = \max_{k \in \mathcal{N}} (x_{k+1} - x_k), \ \ \mathcal{N} = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

Il numero reale $\delta > 0$ si chiama **ampiezza** della partizione. Inoltre, se $f(x)$ non è identicamente nulla consideriamo il minimo e il massimo di $f(x)$ in $[x_k, x_{k+1}]$:

$$m_k = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$
$$M_k = \max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Quindi:

$$r_k \stackrel{def}{=} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \le x \le x_{k+1},\ 0 \le y \le m_k \right\} \tag{2}$$
$$R_k \stackrel{def}{=} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \le x \le x_{k+1},\ 0 \le y \le M_k \right\}$$

Cioè r_k è il rettangolo di base $[x_k, x_{k+1}]$ e altezza m_k, mentre R_k è il rettangolo di base $[x_k, x_{k+1}]$ e altezza M_k. Restano così definiti i seguenti poligoni:

$$\pi(D) = \bigcup_{k=0}^{n-1} r_k \tag{3}$$
$$\Pi(D) = \bigcup_{k=0}^{n-1} R_k$$

$\pi(D)$ è il **plurirettangolo inscritto a** R associato alla partizione D.
$\Pi(D)$ è il **plurirettangolo circoscritto a** R associato alla partizione D.
Evidentemente:

$$s_D \stackrel{def}{=} \mu[\pi(D)] = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(r_k) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) \tag{4}$$
$$S_D \stackrel{def}{=} \mu[\Pi(D)] = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(R_k) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

Inoltre:

$$\forall D, D',\ \pi(D) \subseteq \Pi(D') \Longrightarrow \forall D, D',\ \ s_D \le S_{D'}$$

Nelle suddette ipotesi il rettangoloide

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x) \right\}$$

è misurabile, risultando:

$$\mu(R) = \sup_D s_D = \inf_D S_D$$

Dimostrazione. Se $f(x)$ è identicamente nulla, l'asserto è banale:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ y = 0\right\} \Longrightarrow \mu(R) = 0$$
$$\forall D,\ s_D = S_D = 0 \Longrightarrow \sup_D s_D = \inf_D S_D = 0$$

Consideriamo quindi il caso non banale, cioè $f(x)$ non identicamente nulla in $[a,b]$. Per il teorema di Heine-Cantor, la funzione è ivi uniformemente continua, per cui:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : x', x'' \in [a,b],\ \ |x' - x''| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Eseguiamo una partizione $\bar{D}(x_0, x_1, ..., x_n)$ dell'intervallo $[a,b]$ di ampiezza $\bar{\delta} < \delta_\varepsilon$. Siano

$$\bar{x}_k, \bar{x}'_k \in [x_k, x_{k+1}] : f(\bar{x}_k) = m_k,\ f(\bar{x}'_k) = M_k$$

Quindi:

$$|\bar{x}'_k - \bar{x}_k| \leq x_{k+1} - x_k \leq \bar{\delta} < \delta_\varepsilon \Longrightarrow M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Inoltre:

$$S_{\bar{D}} - s_{\bar{D}} = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \varepsilon$$

Ma $S_{\bar{D}}$ e $s_{\bar{D}}$ sono le aree di due poligoni:

$$\pi\left(\bar{D}\right) = \pi_\varepsilon$$
$$\Pi\left(\bar{D}\right) = \Pi_\varepsilon$$

Perciò:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \Pi_\varepsilon, \pi_\varepsilon : \mu(\Pi_\varepsilon) - \mu(\pi_\varepsilon) < \varepsilon$$

ciò implica la misurabilità di R. Infine:

$$s_{\bar{D}} \leq \mu(R),\ s_{\bar{D}} > S_D - \varepsilon,$$

cioè:

$$S_{\bar{D}} - \mu(R) < \varepsilon \tag{5}$$

Similmente:

$$\mu(R) \leq S_{\bar{D}},\ S_{\bar{D}} < s_{\bar{D}} + \varepsilon$$

per cui:

$$\mu(R) - s_{\bar{D}} < \varepsilon \tag{6}$$

Dalle (5)-(6) segue:

$$\mu(R) = \sup_D s_{\bar{D}} = \inf_D S_{\bar{D}}$$

■

***

Dal teorema appena dimostrato segue che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall D(x_0, x_1, ..., x_n)$:

$$\begin{aligned} s_D &= \text{ valore approssimato per difetto di } \mu(R) \\ S_D &= \text{ valore approssimato per eccesso di } \mu(R) \end{aligned}$$

Scegliere come valore approssimato di $\mu(R)$ la somma s_D, equivale ad approssimare $\forall k \in \mathcal{N}$, il rettangoloide:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \leq x \leq x_{k+1},\ 0 \leq y \leq f(x)\right\} \tag{7}$$

con il rettangolo r_k in esso inscritto. Viceversa, scegliere come valore approssimato di $\mu(R)$ la somma S_D, equivale ad approssimare $\forall k \in \mathcal{N}$, il rettangoloide (7) con il rettangolo R_k ad esso circoscritto.

Ora poniamo:

$$\forall k \in \mathcal{N},\ \tau_k \stackrel{def}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \leq x \leq x_{k+1},\ 0 \leq y \leq \eta_k\right\},$$

essendo $\eta_k \in [m_k, M_k]$.

Il poligono:

$$\tau(D) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \tau_k$$

è un plurirettangolo che non è inscritto ad R e al tempo stesso non è circoscritto ad R.

$$\sigma_D \stackrel{def}{=} \mu(\tau(D)) \Longrightarrow s_D \leq \sigma_D \leq S_D$$

Il numero reale σ_D è comunque un valore approssimato di $\mu(R)$. Inoltre:

$$(m_k \leq \eta_k \leq M_k) \underset{\substack{f(x) \text{ è continua} \\ \text{in } [x_k, x_{k+1}]}}{\Longrightarrow} (\exists \xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \mid f(\xi_k) = \eta_k)$$

Quindi:

$$\mu(\tau_k) = f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \Longrightarrow \sigma_D = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\tau_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{8}$$

Dalla (8) segue che σ_D dipende da ξ_k per ogni $k \in \mathcal{N}$.

$$\forall \xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \text{ (con } k \in \mathcal{N}), \ s_D \leq \sigma_D \leq S_D \Longrightarrow |\sigma_D - \mu(R)| \leq S_D - s_D$$

Dalla dimostrazione dell'ultimo teorema segue

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall D \ (\delta < \delta_\varepsilon), \ |\sigma_D - \mu(R)| < \varepsilon \tag{9}$$

La (9) può essere scritta nela forma simbolica:

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma_D = \mu(R) \tag{10}$$

Si osservi che la (10) non è l'usuale operazione di passaggio al limite, giacché σ_D non una funzione ad un sol valore di δ. Infatti, assegnato un numero reale positivo $\delta < b - a$, esistono infinite partizioni di ampiezza δ, e per ciascuna partizione esistono infiniti valori di σ_D, giacché questi ultimi dipendono dai punti ξ_k (che possono essere scelti in infiniti modi). Da ciò si conclude che σ_D è una funzione ad infiniti valori di δ. Pertanto, la (10) andrebbe riscritta nella forma:

$$\sigma_D \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} \mu(R),$$

e cioè le somme σ_D tendono all'area del rettangoloide, quando la loro ampiezza tende a zero.

***

Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e ivi non positiva. In tal caso il rettangoloide di base $[a,b]$, relativo a $f(x)$, si ridefinisce:

$$R \stackrel{def}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq 0\right\}$$

Indichiamo con R' il rettangoloide di base $[a,b]$, relativo a $-f(x)$. È facile convincersi che R' è simmetrico a R rispetto all'asse x.

Per i teoremi precedenti si ha che R' è misurabile:

$$\mu(R') = \lim_{\delta \to 0} \sigma'_D, \tag{11}$$

essendo:

$$\begin{aligned} \sigma'_D &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[-f(\xi_k)\right](x_{k+1} - x_k) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= -\sigma_D, \end{aligned} \tag{12}$$

per una generica partizione D di ampiezza δ, e per ogni $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Dalle (11)-(12) segue

$$\mu(R') = -\lim_{\delta \to 0} \sigma_D$$

Dalla misurabilità di R' e dalla simmetria tra R' e R, segue che R è misurabile:

$$\mu(R) = \mu(R'),$$

donde:

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma_D = -\mu(R) \tag{13}$$