Equazioni ridotte della retta

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Le equazioni ridotte di una retta nello spazio, compongono una speciale rappresentazione parametrica della stessa.
Fissato un riferimento cartesiano $R(Oxyz)$ dello spazio ordinario, scriviamo la rappresentazione ordinaria di una retta r

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Per quanto visto nella condizione di parallelismo tra due piani, segue che la cui matrice incompleta del sistema (1):

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ha rango 2.
Senza perdita di generalità, supponiamo che sia:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

Quindi risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} ax + by = -cz - d \\ a'x + b'y = -c'z - d' \end{cases},$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -cz - d & b \\ -c'z - d' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} z + \frac{bd' - b'd}{ab' - a'b} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a & -cz - d \\ a' & -c'z - d' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b} z + \frac{a'd - ad'}{ab' - a'b} \end{aligned} \tag{3}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \ \beta = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b} \\ p &= \frac{bd' - b'd}{ab' - a'b}, \ q = \frac{a'd - ad'}{ab' - a'b} \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto le equazioni ridotte della retta r:

$$\begin{cases} x = \alpha z + p \\ y = \beta z + q \end{cases}$$