# Intersezione di due rette nel piano

**(File scaricato da http://www.extrabyte.info)**

Consideriamo due rette $r$ e $r'$ di un piano $\alpha$ (su cui è assegnato un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(Oxy)$), le cui equazioni sono rispettivamente:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Evidentemente:

$$P_0(x_0, y_0) \in r \cap r' \Longleftrightarrow \left( \begin{array}{c} (x_0 y_0) \text{ è l'unica soluzione} \\ \text{del sistema (1)} \end{array} \right)$$

Riscriviamo il sistema nella forma:

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \end{cases}$$

La matrice incompleta è:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

La matrice completa:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix}$$

Il sistema è compatibile e determinato se e solo se $R(A) = R(B)$, cioè se le due matrici hanno lo stesso rango. Osserviamo inoltre che $R(B) = R(B')$ ,essendo

$$B' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Evidentemente:

$$R(A),\, R(B') \in \{1, 2\}$$

Possono verificarsi i seguenti casi:

1. $R(A) = 21$, $R(B') = 2$. Il sistema è compatibile e determinato. Quindi le due rette si intersecano nel punto di coordinate $(x_0, y_0)$ che si determina applicando la regola di Cramer.

2. $R(A) = 1$, $R(B') = 2$. Il sistema è incompatibile. Ciò implica che le due rette sono propriamente parallele.

3. $R(A) = 1$, $R(B') = 1$. Il sistema è compatibile e indeterminato. Più precisamente, ammette $\infty^1$ soluzioni. Quindi le due rette sono coincidenti, o ciò che è lo stesso, sono impropriamente parallele.