Numeri direttori

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Sia r di un piano α (su cui è assegnato un riferimento cartesiano ortogonale $R\,(Oxy)$). I *numeri direttori* di r sono le componenti (in R) di un qualunque vettore non nullo parallelo alla retta. Quindi preso ad arbitrio un vettore $\mathbf{v} = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$, una coppia di numeri direttori è (l_1, l_2).
È evidente che una retta ha infinite coppie di numeri direttori. Infatti, $\forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbf{v}' = k\mathbf{v}$ è ancora un vettore parallelo alla retta assegnata, per cui la totalità dei numeri direttori di r è:

$$l_1' = kl_1,\, l_2' = kl_2 \qquad \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Se ora consideriamo due punti $A\,(x_1, y_1)\,, B\,(x_2, y_2) \in r$, segue che il vettore individuato dal segmento orientato $\overrightarrow{AB}$, ha componenti $x_2 - x_1$,$y_2 - y_1$, onde una coppia di numeri direttori è:

$$l_1 = x_2 - x_1,\;\, l_2 = y_2 - y_1$$

Se la retta è data in rappresentazione ordinaria:

$$ax + by + cz = 0 \tag{1}$$

Le coordinate cartesiane dei detti punti, soddisfano la (1), onde:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 &= 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 &= 0, \end{aligned}$$

da cui:

$$al_1 + bl_2 = 0$$

Cioè:

$$-b = \frac{a}{l_2}l_1,\;\; a = -\frac{b}{l_1}l_2$$

Quindi:

$$(-b, a) = \left(\frac{a}{l_2}l_1, -\frac{b}{l_1}l_2\right)$$

Ma

$$\frac{a}{l_2} = -\frac{b}{l_1}$$

onde:

$$(-b, a) = \frac{a}{l_2}(l_1, l_2)$$

Siccome una coppia ordinata di numeri direttori è definita a meno di un inessenziale fattore moltiplicativo, si conclude che una coppia di numeri direttori di una retta in rappresentazione ordinaria (eq. 1) è data da $(-b, a)$.
Osserviamo che anche la coppia ordinata $(b, -a)$ è una coppia di numeri direttori, in quanto ottenuta dalla precedente moltiplicando per -1.
Se la retta è data in forma esplicita:

$$y = mx + n,$$

una coppia di numeri direttori è $(1, m)$. Infatti, basta riscrivere l'equazione:

$$mx - y + n = 0,$$

che è la rappresentazione ordinaria, per cui i numeri direttori sono $(-b = 1, a = m)$.
Infine, se la retta è in rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases},$$

per quanto detto, i numeri direttori sono $x_2 - x_1, y_2 - y_1$. Tale circostanza suggerisce di riscrivere le equazioni parametriche nella forma:

$$\begin{cases} x = x_1 + tl_1 \\ y = y_1 + tl_2 \end{cases},$$