1 Problema del matrimonio

Supponiamo che A sia un insieme di ragazzi e B un insieme di ragazze. Ci si chiede a quali condizioni debba soddisfare la relazione di conoscenza affinchè sia possibile che ogni ragazzo possa sposare una ragazza di sua conoscenza, ciò però, nell'ipotesi che tutti i ragazzi si devono sposare ed ogni ragazzo può sposare una ed una sola ragazza.

Il problema si può riformulare così:

Sia $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un insieme (di ragazzi), $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ un insieme (di ragazze), $R : A \to B$ una relazione (di conoscenza). A quali condizioni deve sottostare R affinchè sia possibile associare ad ogni elemento $a_i \in A$ uno ed un solo elemento $b_j \in B$, tale che $(a_i, b_j) \in R$?

Si può anche dire: A quali condizioni deve soddisfare R affinchè esista $F \subseteq R$ che sia il grafico di un'applicazione biiettiva di A in B?

Quest'ultima formulazione del problema suggerisce la seguente definizione:

Definizione 1 *Sia $R : A \to B$ una relazione. Si dice* ***matching*** *per la relazione R una relazione $F \subseteq R$ che sia il grafico di una applicazione biiettiva di A in B.*

2 Teorema del matrimonio

Teorema 2 *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una relazione $R : A \to B$ abbia un matching è che:*

$$\forall C \subseteq A,\ \nu(C) \leq \nu(R(C))$$

Cioè, per ogni intero positivo k, ogni sottoinsieme di A di ordine k, k-sottoinsieme, deve avere in R l'immagine di almeno k elementi.

Proof. Necessità della condizione

Infatti, se $\exists$ un metching F per R, essendo F iniettiva, si ha:

$$\nu(C) = \nu(F(c));$$

ed essendo $F \subseteq R$, risulta $F(C) \subseteq R(C)$, da cui è:

$$(C) \leq \nu(R(C))$$

Sufficienza della condizione

Segue dal teorema di Dilworth ■