

Matrici e determinanti (parte 3)

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

1 Rango di una matrice

Se $A(m \times n) \neq 0$ per cui esistono minori di ordine $p = 1, 2, \dots, \min\{m, n\}$.

Definizione. Dicesi *rango* o *caratteristica* di A , l'intero naturale:

$$R(A) \stackrel{def}{=} p_>$$

essendo $p_> = \max\{p\}$: i minori di ordine $p_>$ sono non nulli.

Da tale definizione segue che se $R(A) = p_>$, significa:

1. Esiste almeno un minore di ordine $p_>$ non nullo;
2. se $p_> < \min\{m, n\}$, i minori di ordine $p_> + 1, p_> + 2, \dots$, sono tutti nulli.

Esempi

Assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

il rango è $R(A) = 2$

Assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

il rango è $R(A) = 2$, in quanto:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \implies r(A) < n = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \implies p_> = 2$$

Assegnata la matrice quadrata di ordine $n = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix},$$

vediamo che:

$$\det A = 0 \implies p_{>} < n$$

Inoltre i minori del terzo ordine sono tutti nulli:

$$\begin{aligned} a_{123,123} &= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 18 \\ 10 & 18 & 40 \end{vmatrix} = 0 \\ a_{134,123} &= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 10 & 18 & 40 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ma:

$$a_{12,12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$$

Quindi $p_{>} = 2 \implies R(A) = 2$.

Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix},$$

vediamo che:

$$\det A = 0 \implies p_{>} < n = 4$$

Inoltre sono tutti nulli i minori del terzo ordine:

$$a_{123,123} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 4 \\ 11 & 4 & 56 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{134,123} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 11 & 4 & 56 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

...

Ma

$$a_{12,12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies R(A) = 2$$

Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix},$$

abbiamo $\{m, n\} = \{4, 5\}$, per cui $p_{>} \leq 4$. Calcoliamo i minori del quart'ordine:

$$\begin{aligned}
a_{1234,1234} &= \begin{vmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 \\ 6 & 104 & 21 & 9 \\ 7 & 6 & 3 & 4 \\ 35 & 30 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 0 \\
a_{1234,1235} &= \begin{vmatrix} 14 & 12 & 6 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 0 \\
a_{1234,1245} &= \begin{vmatrix} 14 & 12 & 2 & 8 \\ 6 & 104 & 17 & 9 \\ 7 & 6 & 1 & 4 \\ 35 & 30 & 5 & 20 \end{vmatrix} = 0 \\
a_{1234,1345} &= \begin{vmatrix} 14 & 2 & 6 & 8 \\ 6 & 17 & 21 & 9 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ 35 & 5 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 0 \\
a_{1234,2345} &= \begin{vmatrix} 2 & 12 & 6 & 8 \\ 17 & 104 & 21 & 9 \\ 7 & 6 & 3 & 4 \\ 6 & 30 & 15 & 20 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Da ciò segue che $p_> < 4$. Passiamo ai minori di ordine 3:

$$\begin{aligned}
a_{123,123} &= \begin{vmatrix} 14 & 12 & 6 \\ 6 & 106 & 21 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix} \\
a_{134,123} &= \begin{vmatrix} 14 & 12 & 6 \\ 7 & 6 & 3 \\ 35 & 30 & 15 \end{vmatrix} = 0 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Cioè i minori di ordine 3 sono tutti nulli. D'altro canto:

$$a_{12,13} = \begin{vmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} \neq 0 \implies R(A) = 2$$

Assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$$

abbiamo:

$$\det A = 0 \implies p > n = 5$$

I minori di ordine 4 sono tutti nulli:

$$a_{1234,1234} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{1234,1235} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 32 \end{vmatrix} = 0$$

...

Ma

$$a_{123,123} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

donde $R(A) = 3$.