Matrici e determinanti (parte 2)
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Operazioni elementari sulle matrici

1.1 Somma e differenza di matrici

Sian $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ con $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ...n$. Si definisce **somma** di A e B, la matrice $m \times n$:

$$A + B = (c_{ij}), \tag{1}$$

essendo:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{2}$$

La **differenza** $A - B$ è la somma $A + (-B)$, essendo $-B = (-b_{ij})$. Quindi:

$$A - B = (d_{ij}),$$

con

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -9 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A - B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -2 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

Consideriamo le matrici $A\,(m \times n)$ e $B\,(n \times p)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1mn} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix} \tag{3}$$

che possono essere indicate con la notazione compatta:

$$A = (a_{ij}), \ i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2, ..., n$$
$$B = (b_{ij}), \ i = 1, 2, ...n; \ j = 1, 2, ..., p$$

1.2 Prodotto di matrici

Si definisce **matrice prodotto righe per colonne** e si indica con AB, la matrice $m \times p$:

$$AB = (c_{ij}) \, , \, i = 1, 2, ...m; \; j = 1, 2, ..., p \tag{4}$$

essendo:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{5}$$

Esplicitando:

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1n}b_{n1} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + ... + a_{1n}b_{n2} \\ &... \end{aligned}$$

Esempio 1. Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice AB.

Soluzione 2. Abbiamo $A(3 \times 3)$, $B(3 \times 4)$, quindi $AB(3 \times 4)$. Applicando la (5):

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ciò premesso, sussiste il

Teorema 3. Siano $A(m \times n)$ e $B(n \times p)$. Risulta:

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{6}$$

Proof. Poniamo:

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}) \text{ con } i = 1, ..., m; \; j = 1, ..., n \\ B &= (b_{ij}) \text{ con } i = 1, ..., n; \; j = 1, ..., p \end{aligned}$$

Indichiamo con un apice gli elementi di matrice delle rispettive trasposte:

$$\begin{aligned} A^T &= \left(a'_{ij}\right) \text{ con } a'_{ij} = a_{ji} \\ B^T &= \left(b'_{ij}\right) \text{ con } b'_{ij} = b_{ji} \end{aligned} \tag{7}$$

Il prodotto di A e B:

$$AB = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{8}$$

la cui trasposta è

$$(AB)^T = \left(c'_{ij}\right) \text{ con } c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} \tag{9}$$

Il prodotto di B^T e A^T:

$$B^T A^T = \left(c''_{ij}\right) \text{ con } c''_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj} \tag{10}$$

Per le (7):

$$c''_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = c'_{ij} \Longrightarrow B^T A^T = (AB)^T,$$

donde l'asserto. □

Teorema 4. Se A è una matrice quadrata di ordine n, la matrice $A + A^T$ è simmetrica.

Proof. Poniamo $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, 2, ..., n$. Quindi, $A^T = (a_{ji})$; la somma è:

$$A + A^T = (\alpha_{ij}),$$

essendo:

$$\alpha_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$$

Risulta:

$$\alpha_{ji} = \alpha_{ij}, \forall i, j = 1, 2, ..., n$$

donde la simmetria di $A + A^T$. □

Teorema 5. Se A è una matrice quadrata di ordine n, la matrice $A - A^T$ è antisimmetrica.

Proof. Poniamo $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, 2, ..., n$. Quindi, $A^T = (a_{ji})$; la differenza è:

$$A - A^T = (\beta_{ij}),$$

essendo:

$$\beta_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$$

Risulta:

$$\beta_{ji} = -\beta_{ij}, \forall i, j = 1, 2, ..., n$$

donde l'antisimmetria di $A - A^T$. □

Corollario 6. Ogni matrice quadrata si esprime come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

Proof. Sia $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, 2, ..., n$. Il generico elemento di matrice può scriversi:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij} + \frac{1}{2}a_{ji} - \frac{1}{2}a_{ji} \\ &= \frac{1}{2}a_{ij} + \frac{1}{2}a_{ij} + \frac{1}{2}a_{ji} - \frac{1}{2}a_{ji} \\ &= \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \end{aligned} \tag{11}$$

La (11) implica:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)}_{\text{simmetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)}_{\text{antisimmetrica}},$$

donde l'asserto. □

Definizione. Se A è una matrice quadrata, diremo che A è ***ortogonale*** se:

$$AA^T = A^T A = I, \tag{12}$$

essendo A^T la matrice trasposta di A. In altri termini, la matrice A è ortogonale se l'inversa coincide con la trasposta:

$$A^{-1} = A^T \tag{13}$$

Definizione. Se A è una matrice quadrata di ordine n e se $p \in \mathbb{N}$, la potenza p-esima di A è:

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{p \text{ volte}}$$

Definizione. Se A è una matrice quadrata di ordine n si dice che A è ***idempotente***, se:

$$A^2 = A$$

Definizione. Se A è una matrice quadrata di ordine n e se $p \in \mathbb{N}$, si dice che A è ***nilpotente di ordine*** p, se:

$$A^p = 0$$

Teorema 7. Se A è nilpotente di ordine p, ogni intero $p' > p$ è ordine di nilpotenza per A.

Proof.

$$\forall p' > p, \quad A^{p'} = A^p A^{p'-p} = 0 \cdot A^{p'-p} = 0$$

□

Teorema 8. *A è nilpotente di ordine $p = 2) \Longrightarrow (\forall s \in \mathbb{N},\ A\left(I \pm A\right)^{s} = A$*

Proof. La dimostrazione segue per calcolo diretto:

$$\begin{aligned}
&s = 1 \Longrightarrow A\left(I \pm A\right) = A \pm A^2 = A \\
&s = 2 \Longrightarrow A\left(I \pm A\right)^2 = A \pm 2A^2 + A^3 = A \\
&\ \ ... \\
&s = s \Longrightarrow A\left(I \pm A\right)^s = A
\end{aligned}$$

$\square$

***

Assegnate due matrici quadrate dello stesso ordine $A\,(n \times n)$, $B\,(n \times n)$, si osservi che in generale il prodotto righe per colonne non è commutativo, cioè:

$$AB \neq BA$$

Se risulta:

$$AB = BA$$

si dice che A e B **commutano** o che il prodotto AB è **commutativo.**
Se risulta:

$$AB = -BA$$

si dice che A e B **anticommutano** o che il prodotto AB è **anticommutativo.**
Possiamo poi considerare la potenza *k-sima* di una matrice quadrata:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k \text{ volte}}$$

Si consideri ad esempio, la matrice quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
A^3 = A^2 \cdot A &= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Verifichiamo che il prodotto $A^2 \cdot A$ è commutativo:

$$
\begin{aligned}
A \cdot A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} = A^2 \cdot A
\end{aligned}
$$

Determiniamo A^5:

$$
\begin{aligned}
A^5 = A^2 A^3 &= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 39 & -41 & -21 \\ 62 & -33 & 20 \\ 41 & -31 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Si osservi che $A^2 A^3$ è commutativo:

$$
\begin{aligned}
A^3 A^2 &= \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 39 & -41 & -21 \\ 62 & -33 & 20 \\ 41 & -31 & -2 \end{pmatrix} = A^2 A^3
\end{aligned}
$$