Matrici e determinanti (parte 1)
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Una **matrice** è un array (aggregato) di $m \times n$ elementi disposti per m righe e n colonne. Scriviamo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

A volte si utilizza la seguente notazione simbolica:

$$A = (a_{ij}) \quad \text{con } i = 1, ..., m; \, j = 1, ..., n$$

Gli elementi a_{ij} sono elementi di un campo K.
Se $m = n$ si dice che A è una matrice quadrata di ordine n. Ad es.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A è una matrice quadrata di ordine 2.

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cosh t & -5e^t \\ 2\sin t & e^{-2t} \\ -\sqrt{2}\sinh t & 10\sin t \end{pmatrix}$$

B è una matrice 3×2 i cui elementi sono funzioni reali della variabile reale t.

1 Classificazione delle matrici

Consideriamo una matrice $A\,(m \times n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Si definisce **matrice trasposta** di A e si indica con A^T la matrice $(n \times m)$ ottenuta da A scambiando le righe per le colonne:

$$A^T = \left(a'_{ij}\right),$$

essendo per definizione:

$$a'_{ij} = a_{ji}$$

donde:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ad esempio, la trasposta della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

è:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

***

Consideriamo la matrice quadrata di ordine n:

$$A = (a_{ij}), \text{ con } i, j = 1, 2, ..., n$$

Abbiamo la seguente definizione:

$$\forall i > j, \ \ a_{ij} = 0) \overset{def}{\Longrightarrow} (A \text{ è una matrice } \textbf{triangolare alta} \tag{3}$$

Risulta:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Viceversa:

$$\forall i < j, \ \ a_{ij} = 0) \overset{def}{\Longrightarrow} (A \text{ è una matrice } \textbf{triangolare bassa} \tag{5}$$

Risulta:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Nel caso speciale in cui la matrice quadrata di ordine n, $A = (a_{ij})$ è simultaneamente alta e bassa, si ha:

$$\forall i \neq j, \;\; a_{ij} = 0) \overset{def}{\Longrightarrow} (A \text{ è una matrice } \textbf{diagonale} \tag{7}$$

La (7) implica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

e viene indicata con la notazione simbolica:

$$A = diag\,(a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}) \tag{9}$$

Se $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = k$, la matrice si dice **scalare**, e per $k = 1$, la (9) è la matrice **identità di ordine** n:

$$\begin{aligned} I_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 \end{pmatrix} \\ &= diag\,(1, 1, 1, ..., 1) \end{aligned} \tag{10}$$

Quando non è rilevante l'ordine n della matrice, la matrice identità si indica semplicemente con I.

***

Sia A una matrice quadrata di ordine n.

$$\begin{aligned} A = A^T &\overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{simmetrica} \\ A = -A^T &\overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{antisimmetrica} \end{aligned} \tag{11}$$

Cioè, rispettivamente:

$$\begin{aligned} &\forall i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}, \;\; a_{ij} = a_{ji} \\ &\forall i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}, \;\; a_{ij} = -a_{ji} \end{aligned} \tag{12}$$

Esempi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \tag{13}$$

La (13) è simmetrica:

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

La (14) è antisimmetrica:

$$\begin{aligned} B^T &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -B \end{aligned}$$

***

Sia A una matrice quadrata di ordine n sul campo complesso $\mathbb{C}$, cioè $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Si definisce **matrice coniugata di** A, la matrice quadrata di ordine n i cui elementi sono i complessi coniugati degli elementi di A:

$$A^* \stackrel{def}{=} \left(a_{ij}^*\right)$$

Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4+5i & -3i \\ 2 & 2-\sqrt{3}i \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 4-5i & 3i \\ 2 & 2+\sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

Evidentemente:

$$(A^*)^* = A$$

***

Sia A una matrice quadrata di ordine n sul campo complesso $\mathbb{C}$. Abbiamo le seguenti definizioni:

$$\begin{aligned}(A^*)^T &= A \overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{hermitiana} \\ (A^*)^T &= -A \overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{antihermitiana}\end{aligned} \tag{15}$$

Cioè, rispettivamente:

$$\forall i,j \in \{1,2,...,n\}\,,\ a^*_{ji} = a_{ij}) \overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{hermitiana}$$
$$\forall i,j \in \{1,2,...,n\}\,,\ a^*_{ji} = -a_{ij}) \overset{def}{\Longrightarrow} A \text{ è } \textbf{antihermitiana}$$

Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

Passando alla trasposta della coniugata:

$$\begin{aligned}(A^*)^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= A,\end{aligned}$$

donde A è hermitiana.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Passando alla trasposta della coniugata:

$$\begin{aligned}(B^*)^T &= \begin{pmatrix} 1 & -1+i & -2 \\ 1+i & -3i & -i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= -B,\end{aligned}$$

donde B è antihermitiana.