

Esercizio 135

[file scaricato da <http://www.extrabyte.info>]

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right)$$

Soluzione

La differenza si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) = \infty - \infty$$

Tale forma indeterminata può essere rimossa applicando la regola di De L'Hospital, dopo aver ricondotto la forma $\infty - \infty$ alla $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = & (1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} \\ &= \frac{0}{1 + 1} = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 136

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln |\tan x|}{\ln |\pi - 2x|}$$

Soluzione

La differenza si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln |\tan x|}{\ln |\pi - 2x|} = \frac{\infty}{\infty},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln |\tan x|}{\ln |\pi - 2x|} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln \tan x}{\ln (\pi - 2x)} \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{\pi - 2x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x - \pi}{\sin 2x} = \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = 2x - \pi \implies \sin 2x = \sin(t + \pi) = -\sin t$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x - \pi}{\sin 2x} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = -1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln |\tan x|}{\ln |\pi - 2x|} = -1$$

Esercizio 137

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$$

Soluzione

La differenza si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) = \infty - \infty,$$

Per poter applicare la regola di De L'Hospital, riconduciamo la forma $\infty - \infty$ alla forma $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 \cot^2 x}{x^2} = \frac{0}{0} \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \cot^2 x + 2x^2 \cot x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x \cos x}{\sin^3 x} \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2} \sin 2x}{\sin^3 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2} \sin 2x}{\sin^3 x} \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3 \sin^2 x \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2}}{3 \frac{\sin^2 x}{x^2} \cos x} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Si conclude che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) = \frac{2}{3}$$

Esercizio 139

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

Soluzione

La differenza si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right) = \infty - \infty,$$

Per poter applicare la regola di De L'Hospital, riconduciamo la forma $\infty - \infty$ alla forma $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2 \cos x}{x^2 (1 - \cos x)} = \frac{0}{0} \\
&\stackrel{H}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x - 2x \cos x + x^2 \sin x} = \frac{0}{0} \\
&\stackrel{H}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 - 2 \cos x + 4x \sin x + x^2 \cos x} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x^2}}{2 \frac{1 - \cos x}{x^2} + 4 \frac{\sin x}{x} + \cos x} \\
&= 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Si conclude che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right) = \frac{1}{6}$$

Esercizio 140

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\sin x}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata 0^0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\sin x} = 0^0,$$

Scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln |x|^{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln |x|^{\sin x}}$$

Quindi calcoliamo a parte il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln |x|^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln |x|$$

Distinguiamo i casi: $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln |x|^{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = 0 \cdot \infty \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \\
&\stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin^2 x}{x} \frac{1}{\cos x} \right) \\
&= 0^-
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^{\sin x} = e^{0^-} = 1^- \quad (2)$$

Per $x \rightarrow 0^-$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln |x|^{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x \ln(-x) = 0 \cdot \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(-x)}{\frac{1}{\sin x}} \\ &\stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin^2 x}{x} \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= 0^+ \end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|^{\sin x} = e^{0^+} = 1^+ \quad (3)$$

Dalle (2)-(3) segue:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\sin x} = 1$$

Esercizio 141

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty},$$

Eseguiamo il cambio di variabile $y = e^x$, per cui:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$$

Alternativamente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{e^x-1}) = e^{+\infty} = +\infty$$

Esercizio 142

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\pi - 2 \arctan x}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\pi - 2 \arctan x} = \frac{0}{0},$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\pi - 2 \arctan x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 143

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - ax}{\sin(bx) - bx}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - ax}{\sin(bx) - bx} = \frac{0}{0},$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - ax}{\sin(bx) - bx} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos(ax) - a}{b \cos(bx) - b} \\ &= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin(ax)}{b^2 \sin(bx)} = \frac{a^3}{b^3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(ax)}{ax}}{\frac{\sin(bx)}{bx}} = \frac{a^3}{b^3} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - ax}{\sin(bx) - bx} = \frac{a^3}{b^3}$$

Esercizio 144

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \frac{0}{0},$$

Dividiamo numeratore e denominatore per x^2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{1 - \cos x}{x^2}}$$

Calcoliamo separatamente i due limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = 2$$

Esercizio 145

[file scaricato da <http://www.extrabyte.info>]

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{0},$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{\sqrt{1-x^2}} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right) = 0\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$