

Esercizio 35

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{2x} \right)$$

Soluzione

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{2x} \right) = \infty - \infty$$

La forma indeterminata può essere rimossa determinando un “fattore razionalizzante”. In generale, se

$$f(x) = \sqrt[N]{p(x)} \pm \sqrt[N]{q(x)},$$

il fattore razionalizzante è:

$$r(x) = \sum_{k=1}^N (\mp 1)^{k+1} \sqrt[N]{p(x)^{N-k} q(x)^{k-1}}$$

Per $f(x) = \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{2x}$

$$\begin{aligned} r(x) &= \sum_{k=1}^3 (+1)^{k+1} \sqrt[3]{(x-1)^{3-k} (2x)^{k-1}} \\ &= \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{4x^2} \end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{2x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{2x}) \left[\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{4x^2} \right]}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{4x^2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{2x(x-1)} + \sqrt[3]{4x^2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^2} + \sqrt[3]{2 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{4}} \\ &= - \frac{(+\infty) \cdot (1 + 0^+)}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} \\ &= - (+\infty) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Esercizio 37

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt[4]{x^4 + 1} \right)$$

Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt[4]{x^4 + 1} \right) = -\infty + \infty, \quad (1)$$

cioè il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. In questo caso l'indeterminazione si rimuove moltiplicando e dividendo per un fattore razionalizzante $r(x)$, che in generale si scrive:

$$r(x) = \sum_{k=1}^N (\mp 1)^{k+1} \sqrt[N]{p(x)^{N-k} q(x)^{k-1}}, \text{ per } f(x) = \sqrt[N]{p(x)} \pm \sqrt[N]{q(x)} \quad (2)$$

Per poter applicare la (2), scriviamo nella (1) $x = -\sqrt[4]{x^4}$ (prendiamo la radice con il segno $-$ poichè nel calcolo del limite è $x \rightarrow -\infty$). Quindi:

$$f(x) = x + \sqrt[4]{x^4 + 1} = \sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{x^4} \quad (3)$$

Con la $f(x)$ scritta come in (3) possiamo applicare la (2) per ottenere $r(x)$:

$$r(x) = \sqrt[4]{(x^4 + 1)^3} + \sqrt[4]{x^4(x^4 + 1)^2} + \sqrt[4]{x^8(x^4 + 1)} + \sqrt[4]{x^{12}} \quad (4)$$

Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)r(x)}{r(x)} \quad (5)$$

Sviluppiamo $f(x)r(x)$:

$$\begin{aligned} f(x)r(x) &= \left(\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{x^4} \right) \left[\sqrt[4]{(x^4 + 1)^3} + \sqrt[4]{x^4(x^4 + 1)^2} + \sqrt[4]{x^8(x^4 + 1)} + \sqrt[4]{x^{12}} \right] \\ &= \sqrt[4]{(x^4 + 1)^4} - \sqrt[4]{x^{16}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{(x^4 + 1)^4} - \sqrt[4]{x^{16}}}{r(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1 - x^4}{r(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{r(x)} \end{aligned} \quad (6)$$

Ma

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = +\infty,$$

per cui:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{r(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \quad (7)$$

Esercizio 43

Determinare l'ordine dei seguenti infinitesimi (per $x \rightarrow 0$):

1. $f(x) = \frac{10^4 x}{x+1}$
2. $f(x) = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$ (per $x \rightarrow 0^+$)
3. $f(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$ (per $x \rightarrow 0^+$)
4. $f(x) = \sin x - \tan x$

Soluzione

1. Assumiamo in tutti gli esercizi, la funzione $u(x) = x$ come infinitesimo di riferimento.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = 10^4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1-\alpha}}{x+1} \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 1$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = 1$.

2. $f(x) = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{\frac{x + \sqrt[n]{x}}{x^{\alpha n}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x^{1-\alpha n} + \sqrt[n]{x^{1-\alpha n^2}}} \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = \frac{1}{n^2}$.

Alternativamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + x^{1/n})^{1/n}}{x^\alpha} \quad (8)$$

Ma nella (8) x è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x^{1/n}$, per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + x^{1/n})^{1/n}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{1/n^2}}{x^\alpha} \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = \frac{1}{n^2} \quad (9)$$

Inoltre gli infinitesimi $\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$ e $\sqrt[n^2]{x}$ sono equivalenti, giacchè il limite (9) vale 1:

$$\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}} \sim \sqrt[n^2]{x} \quad (10)$$

$$3. f(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt[n]{x^{2-\alpha n}} - \sqrt[n]{x^{3-\alpha n}} \right) \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = \frac{2}{n}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = \frac{2}{n}$.

Alternativamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2/n} - x^{3/n}}{x^\alpha} \quad (11)$$

Ma $x^{3/n}$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x^{2/n}$, per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2/n} - x^{3/n}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2/n}}{x^\alpha} \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = \frac{2}{n}$$

Inoltre gli infinitesimi $\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$ e $\sqrt[n]{x^2}$ sono equivalenti, giacchè il limite vale 1:

$$\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3} \sim \sqrt[n]{x^2} \quad (12)$$

$$4. f(x) = \sin x - \tan x$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^\alpha \cos x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^{\alpha-1}} \right) \\ &\in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha - 1 = 2 \iff \alpha = 3 \end{aligned}$$

Esercizio 107

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$$

Soluzione

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{(x-1)^2} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \sin \pi x}{2(x-1)} \\ &= -\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} \\ &= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} -\frac{\pi^2}{x} \lim_{x \rightarrow 1} \cos \pi x \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 108

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\begin{aligned} \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^2} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 1^∞ alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} (-\sin x)}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = -\frac{1}{2}$$

Perciò:

$$\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \right] = -\frac{1}{2}$$

Si conclude che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Esercizio 110

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan x^2}{\arcsin x - x}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan x^2}{\arcsin x - x} = \frac{0}{0}$$

Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan x^2}{\arcsin x - x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{2x}{1+x^4}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^4} \cdot \frac{x(1+x^4) - x}{1 - \sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \sqrt{1-x^2}}{1+x^4} = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 111

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \infty - \infty$$

Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x \sin^2 x + x^2 \sin 2x} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{H}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{2 \sin^2 x + 4x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \left[\frac{1 - \cos 2x}{(2x^2)} \right]}{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) + 2 \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) + \cos 2x} \\ &= \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{1 + 2 + 2 + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 115

Studiare il comportamento della funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan x + \tan^2 x} (1 - e^{\pi-2x}), \quad (13)$$

in un intorno del punto $x = \frac{\pi}{2}$.

Soluzione

Determiniamo il limite sinistro e destro in tale punto.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= 0 \cdot \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 - e^{\pi-2x}}{(1 + \tan x + \tan^2 x)^{-1/2}} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2e^{\pi-2x}}{-\frac{1}{2} (1 + \tan x + \tan^2 x)^{-3/2} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} \right)} \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi-2x} \cos^3 x (1 + \tan x + \tan^2 x)^{3/2}}{\cos x + 2 \sin x} \\ &= -4 \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi-2x}}{\cos x + 2 \sin x} \right) \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x (1 + \tan x + \tan^2 x)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i due limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi-2x}}{\cos x + 2 \sin x} = \frac{1}{2} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x (1 + \tan x + \tan^2 x)^{3/2} \quad (15)$$

$$= 0 \cdot \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x \left(\frac{\frac{1}{2} \sin 2x + 1}{\cos^2 x} \right)^{3/2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos^3 x}{|\cos^3 x|} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + 1 \right)^{3/2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (-1) \left(\frac{1}{2} \sin 2x + 1 \right)^{3/2}$$

$$= -1$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 2 \quad (16)$$

Passiamo al limite per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0 \cdot \infty$$

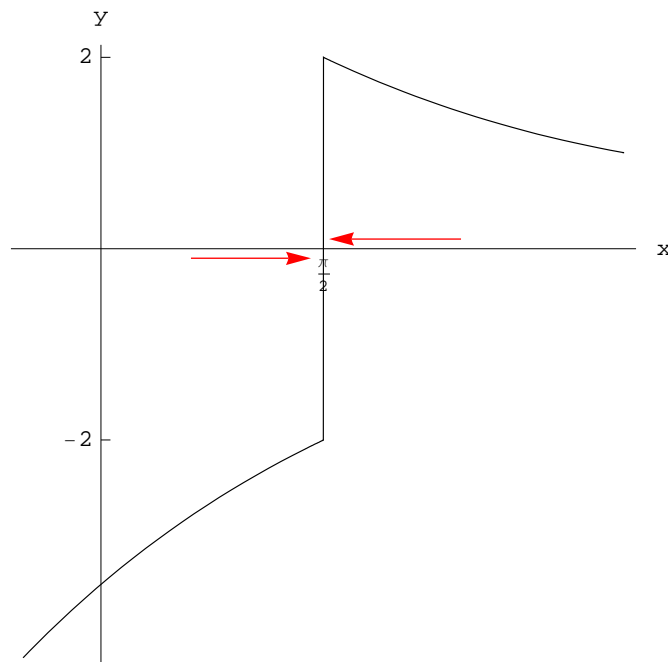
Eseguiamo il cambio di variabile: $y = \tan x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{1+y+y^2} (1 - e^{\pi-2 \arctan x}) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{\pi-2 \arctan x}}{(1+y+y^2)^{-1/2}} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{1+y^2} e^{\pi-2 \arctan x}}{-\frac{1}{2} (1+y+y^2)^{-3/2} (1+2y)} \\ &= -4 \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\pi-2 \arctan x} \right) \left[\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(1+y+y^2)^{-3/2}}{(1+y^2)(1+2y)} \right] \\ &= -4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (17)$$

cioè:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -2 \quad (18)$$

Si conclude che $x = \frac{\pi}{2}$ è un punto di discontinuità di prima specie della funzione $f(x)$.



Esercizio 116

Verificare l'inapplicabilità della regola di De L'Hospital nel calcolo del limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

Se applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

ci ritroviamo con il calcolo del limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x},$$

che ovviamente non esiste, per cui in tal caso la regola è inapplicabile. Tuttavia, il limite esiste. Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0,$$

poichè è $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Esercizio 117

Verificare l'inapplicabilità della regola di De L'Hospital nel calcolo del limite:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

Soluzione

Osserviamo che $\nexists \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sin x$, nè tantomeno è possibile applicare la regola di De L'Hospital, in quanto produrrebbe funzioni trigonometriche a numeratore e denominatore e come tali non regolari all'infinito.

Tuttavia, il limite esiste. Infatti:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1,$$

poichè è $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Esercizio 118

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \tan x}{\sin x + \tan^2 x},$$

senza applicare la regola di De L'Hospital.

Soluzione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \tan x}{\sin x + \tan^2 x} = \frac{0}{0} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x}x} = \frac{3 + 1}{1 + 1 \cdot 0} = 4,$$

Esercizio 119

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x (1 - \sin x)}{3 \cos^2 x},$$

senza applicare la regola di De L'Hospital.

Soluzione

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x (1 - \sin x)}{3 \cos^2 x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x (1 - \sin x)}{3 \cos^2 x} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 120

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + \pi - 4 \arctan x)}{\sin(1 - x)},$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + \pi - 4 \arctan x)}{\sin(1 - x)} = \frac{0}{0}$$

Applicando la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + \pi - 4 \arctan x)}{\sin(1 - x)} &\stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1 + \pi - 4 \arctan x} \cdot (-4) \cdot \frac{1}{1 + x^2}}{\cos(1 - x)} \\ &= 4 \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \pi - 4 \arctan x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1 + x^2) \cos(1 - x)} \\ &= 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

Esercizio 121

Determinare le singolarità della funzione:

$$f(x) = \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}, \quad (19)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$.

Determiniamo il limite sinistro e destro in $x_0 = 0$:

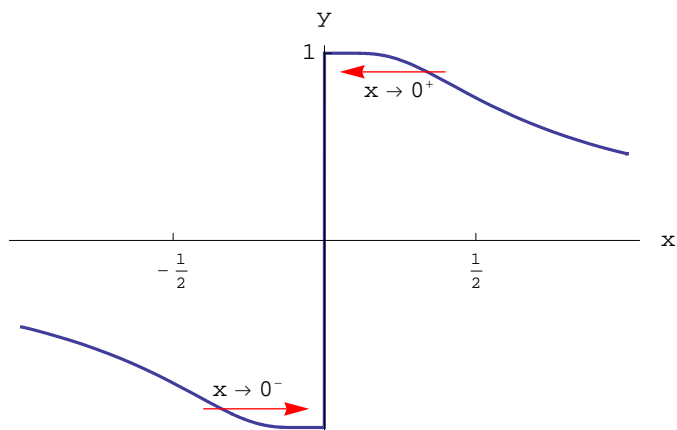
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{+\infty} - 1}{e^{+\infty} + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-1/x}}{1 + e^{-1/x}} = \frac{1 - e^{-\infty}}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1 \end{aligned} \quad (20)$$

Si conclude che x_0 è un punto di discontinuità di prima specie della funzione $f(x)$.

Esercizio 130

Studiare il comportamento per $x \rightarrow 0$ della funzione:

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad (21)$$



Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, ed è manifestamente dispari: $f(-\frac{1}{x}) = -f(\frac{1}{x})$. Inoltre è limitata su tutto \mathbb{R} : $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$.

Gli zeri sono:

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{x} = k\pi \iff x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots, \frac{1}{k\pi}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre:

$$f(x) = 1 \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{2}{\pi}, \frac{1}{5\pi}, \frac{1}{9\pi}, \dots, \frac{2}{\pi + 4k\pi}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = -1 \iff \frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \dots, \frac{2}{3\pi + 4k\pi}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Osserviamo che i punti $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $x'_k = \frac{2}{\pi + 4k\pi}$, $x''_k = \frac{2}{3\pi + 4k\pi}$ si addensano intorno a $x = 0$ (al crescere indefinito di k), per cui in ogni intorno di $x = 0$, la funzione assume i valori $0, -1, 1$. Pertanto non può essere verificata la definizione di limite, che in questo caso è:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < |x| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - l| < \varepsilon \quad (22)$$

In altri termini, $\nexists l$ tale che lo scarto $|f(x) - l|$ può essere reso arbitrariamente piccolo. Si conclude che la funzione (21) non è regolare in $x = 0$. Per quanto riguarda il diagramma cartesiano, osserviamo che in ogni intorno di $x = 0$, la funzione compie infinite oscillazioni, per cui non è possibile completare il grafico intorno a $x = 0$, come mostrato in fig.1 .

Osserviamo infine che all'infinito la funzione è infinitesima, avendosi:

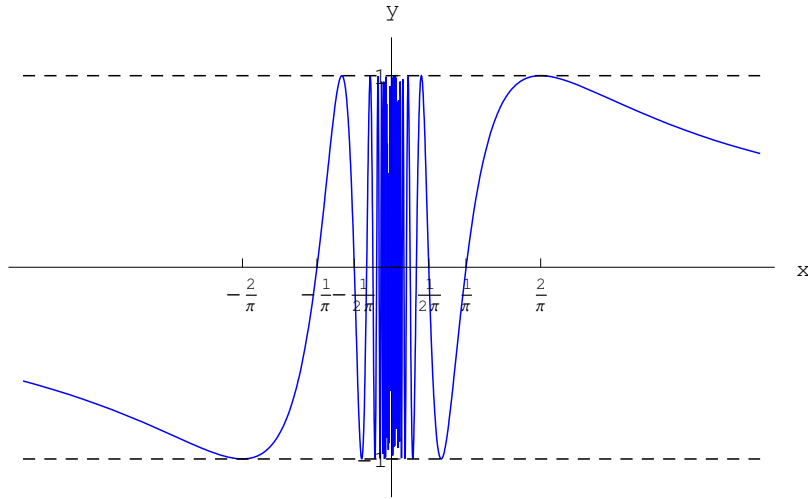


Figure 1: Grafico di $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sin t = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \sin t = 0^-$$

Esercizio 131

Studiare il comportamento per $x \rightarrow 0$ della funzione:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (23)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, ed è manifestamente pari: $f(-\frac{1}{x}) = f(\frac{1}{x})$. Inoltre :

$$\forall x \in X, \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \quad (24)$$

Dalla (24) applicando la definizione di limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad (25)$$

per cui la funzione è convergente in $x = 0$. Sempre per la (24) si ha che il diagramma cartesiano è contenuto nella regione del piano xy :

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty, -x < y < x\}$$

Il diagramma cartesiano interseca infinite volte le rette $y = x$ e $y = -x$. Infatti:

$$f(x) = x \iff x_k = \frac{2}{\pi(1+4k)}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = -x \iff x_k = \frac{2}{\pi(3+4k)}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Gli zeri sono:

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{x} = k\pi \iff x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots, \frac{1}{k\pi}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Come nel caso di $\sin \frac{1}{x}$ anche qui la funzione compie infinite oscillazioni intorno al punto $x = 0$, con la differenza che le oscillazioni si smorzano per $x \rightarrow 0$.

Il diagramma è riportato in fig.2 .

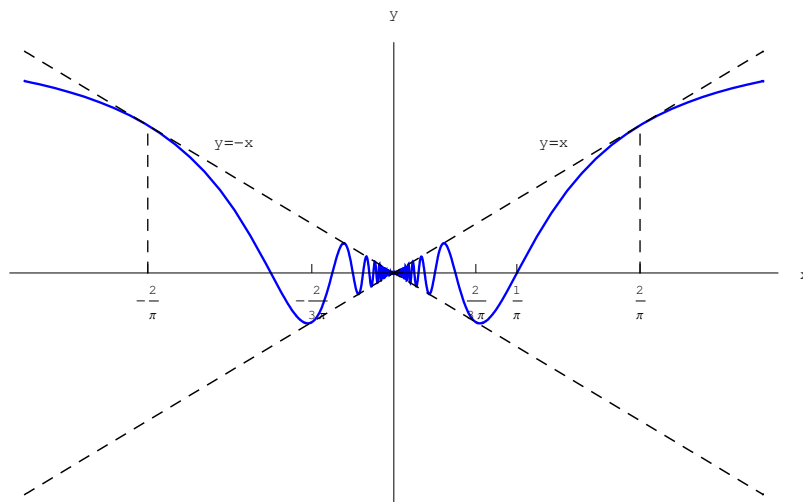


Figure 2: Diagramma cartesiano di $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Osserviamo infine che all'infinito la funzione converge a 1, avendosi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin t}{t} = 1^-$$

Esercizio 132

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} \quad (26)$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} = \frac{0}{0},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} \quad (27)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cot^2 x}{1-x} \cdot \frac{e^x(1-x) - 1}{1 - \cos^2 x} \right] = 0 \cdot \infty \quad (28)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - 1}{\tan^2 x} \quad (29)$$

Calcoliamo a parte il secondo limite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - 1}{\tan^2 x} &= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - e^x}{2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x e^x}{\tan x \cos^2 x} \right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dall'equazione precedente si ricava:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 133

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} \quad (30)$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} = \frac{0}{0},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} \quad (31)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cot^2 x}{1-x} \cdot \frac{e^x(1-x) - 1}{1 - \cos^2 x} \right] = 0 \cdot \infty \quad (32)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - 1}{\tan^2 x} \quad (33)$$

Calcoliamo a parte il secondo limite:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - 1}{\tan^2 x} &= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-x) - e^x}{2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x e^x}{\tan x} \cos^2 x \right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dall'equazione precedente si ricava:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 133

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}} \quad (34)$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\infty}{\infty},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2e^x}{1+2e^x}}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{e^{-x} + 2} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1\end{aligned} \quad (35)$$

Esercizio 134

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arcsin x \cdot \ln x \quad (36)$$

Soluzione

Il prodotto si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arcsin x \cdot \ln x = 0 \cdot \infty$$

Per applicare la regola di De L'Hospital dobbiamo ricondurre la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ a una delle due forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arcsin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(\arcsin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{- (\arcsin x)^{-2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad (37)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{1-x^2} \frac{\arcsin x}{x} \cdot \arcsin x \right) \quad (38)$$

$$= -1 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \quad (39)$$