Infinitesimi ed infiniti - Lezione n. 3

http://www.extrabyte.info

1 Applicazioni

In n. 2 abbiamo introdotto le nozioni di ordine infinitamente grande e di ordine infininitamente piccolo, relativamente ad un infinito o ad un infinitesimo assegnati. Rammentiamo velocemente tali nozioni. A tale scopo consideriamo una funzione f che sia infinitesima in x_0. Se $u(x)$ è l'infinitesimo di riferimento:

$$\left. \begin{array}{c} f(x) \text{ è } \textit{un infinitesimo} \\ \textit{di ordine infinitamente grande} \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\forall \alpha \in (0, +\infty), \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = 0 \right.$$

$$\left. \begin{array}{c} f(x) \text{ è } \textit{un infinitesimo} \\ \textit{di ordine infinitamente piccolo} \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\forall \alpha \in (0, +\infty), \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \pm\infty \right.$$

Se invece f è infinita in x_0, e se $v(x)$ è l'infinito di riferimento:

$$\left. \begin{array}{c} f(x) \text{ è } \textit{un infinito} \\ \textit{di ordine infinitamente grande} \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\forall \alpha \in (0, +\infty), \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} = \pm\infty \right.$$

$$\left. \begin{array}{c} f(x) \text{ è } \textit{un infinitesimo} \\ \textit{di ordine infinitamente piccolo} \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\forall \alpha \in (0, +\infty), \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} = 0 \right.$$

Ciò premesso, dimostriamo i seguenti teoremi.

Teorema 1 *Se a è una costante reale positiva, la funzione e^{ax} è, per $x \to +\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande. Mentre la funzione e^{-ax} è, per $x \to +\infty$, un infinitesimo di ordine infinitamente grande.*

Dimostrazione. Assumiamo come infinito di riferimento, l'infinito $v(x) = x$. Quindi:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{v(x)^n} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \frac{a}{n} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} \\ &= \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \frac{a^2}{n(n-1)} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^{n-2}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} ... = \frac{a^n}{n!} \lim_{x \to +\infty} e^{ax} = +\infty \end{aligned}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo applicato n volte la regola di De L'Hospital, ottenendo $+\infty$. Quindi e^{ax} è un infinito di ordine infinitamente grande.

Passiamo alla funzione e^{-ax}, che è manifestamente infinitesima per $x \to +\infty$. Assumiamo come infinitesimo di riferimento, l'infinitesimo $u(x) = \frac{1}{x}$, donde:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-ax}}{u(x)^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-ax}}{x^{-n}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} ... = \frac{n!}{a^n} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{ax}} = 0, \tag{1}$$

da cui l'asserto. ■

Teorema 2 *Se a è una costante reale positiva, la funzione e^{ax} è, per $x \to -\infty$, un infinitesimo di ordine infinitamente grande. Mentre la funzione e^{-ax} è, per $x \to -\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande.*

Dimostrazione. Assumiamo come infinitesimo di riferimento, l'infinitesimo $u(x) = x^{-1}$. Quindi, eseguendo il cambio di variabile $t = -x$, perveniamo al seguente risultato:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{ax}}{u(x)^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{ax}}{x^{-n}} = 0, \tag{2}$$

da cui l'asserto.

Passiamo alla funzione e^{-ax}, che è manifestamente infinita per $x \to -\infty$. Assumiamo come infinito di riferimento, l'infinito $v(x) = x$, donde (eseguendo il cambio di variabile $t = -x$):

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-ax}}{v(x)^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-ax}}{x^n} = +\infty \tag{3}$$

■

Teorema 3 *Agli estremi del suo insieme di definizione, $\ln x$ è un infinito di ordine infinitamente piccolo.*

Dimostrazione. Come è noto, la funzione $\ln x$ è definita in $(0, +\infty)$, ed è manifestamente infinita agli estremi:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Per $x \to 0^+$ assumiamo come infinito di riferimento l'infinito $v(x) = x^{-1}$, donde:

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{v(x)^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}}} = -\alpha \lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0,$$

cioè in $x=0$, $\ln x$ è un infinito di ordine infinitamente piccolo. Passiamo al comportamento per $x \to +\infty$, assumendo come infinito di riferimento l'infinito $v(x)=x$.

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{v(x)^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} = 0, \tag{4}$$

da cui l'asserto. ■

Teorema 4 *Per $x \to 0$, la funzione $x\ln x$ è un infinitesimo non dotato di ordine. Più specificatamente, è di ordine minore di 1, ma maggiore di α, per ogni $\alpha \in (0,1)$.*

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del teorema precedente segue che la funzione è infinitesima per $x \to 0$:

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$$

Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x)=x$.

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{x} = -\infty,$$

cioè in $x=0$, $x\ln x$ è di ordine minore di 1.
Per ogni $\alpha \in (0,1)$:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to0^+} x^{1-\alpha}\ln x \underset{\beta=1-\alpha>0}{=} \lim_{x\to0^+} x^{\beta}\ln x = 0, \tag{5}$$

da cui l'asserto. ■

Teorema 5 *Per $x \to +\infty$, la funzione $x\ln x$ è un infinito non dotato di ordine. Più specificatamente, è di ordine maggiore di 1, ma minore di α, per ogni $\alpha > 1$.*

Dimostrazione. Assumiamo come infinito di riferimento la funzione $v(x)=x$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x} = +\infty,$$

cioè $x\ln x$ è di ordine maggiore di 1.
Per ogni $\alpha > 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x^{\alpha}} \underset{\beta=\alpha-1>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\beta}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\beta+1}} = 0, \tag{6}$$

da cui l'asserto. ■

Dalla funzione $x \ln x$ è possibile costruire tramite un procedimento iterativo la successione di funzioni:

$$x \cdot \ln x,\ \ x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x,\ x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x,.. \tag{7}$$

Per $x \to +\infty$, ogni funzione della successione (7) è manifestamente un infinito. Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}{x \cdot \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \ln \ln x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \ln \ln \ln x = +\infty$$
$$...$$

Quindi la successione (7) fornisce una scala di infiniti di ordine crescente, giacché ciascuno è di ordine superiore al precedente.

Ciascun infinito della successione (7) non è dotato di ordine. Più specificatamente, è di ordine maggiore di 1, ma minore di α, per ogni $\alpha > 1$. Ad esempio, applicando la regola di De L'Hospital:

$$\forall \alpha > 1,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x}{x^{\alpha}} = 0$$