

# Autovalori ed autovettori di una matrice

Lucia Gastaldi

Dipartimento di Matematica,  
<http://dm.ing.unibs.it/gastaldi/>

Lezione - 25 febbraio 2009

# Indice

- 1 Definizioni di autovalori ed autovettori
  - Autovalori ed autovettori
- 2 Metodo delle potenze
- 3 Calcolo degli autovalori e autovettori in Matlab
- 4 Esercizi

# Autovalori ed autovettori di una matrice

## Definizione

Data una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  si dice **autovalore della matrice**  $A$ , se esiste un vettore  $x \in \mathbb{C}^n$  tale che  $x \neq 0$  e

$$Ax = \lambda x.$$

Il vettore  $x$  si chiama **autovettore della matrice**  $A$  associato all'autovalore  $\lambda$ .

## Osservazione

Gli autovettori di una matrice **non** sono unici: se  $x$  è un autovettore di  $A$  associato a  $\lambda$  anche  $\alpha x$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ , è autovettore di  $A$  associato a  $\lambda$ .

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x)$$

## Polinomio caratteristico

Da  $Ax = \lambda x$ , si ricava  $(A - \lambda I)x = 0$ , essendo  $I$  la matrice identità. Affinché esista  $x \neq 0$  che soddisfa questa relazione, la matrice  $A - \lambda I$  deve essere singolare cioè

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

### Proposizione

Gli autovalori di una matrice sono tutte e sole le radici del **polinomio caratteristico** definito da

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

# Molteplicità di un autovettore

## Molteplicità di un autovalore

$\lambda$  si dice **autovalore semplice** di  $A$  se  $\lambda$  è una radice semplice del polinomio  $p(\lambda)$ .

$\lambda$  ha **molteplicità**  $\nu$  se  $\lambda$  è una radice di molteplicità  $\nu$  di  $p(\lambda)$ .

Per il teorema dell'algebra **esistono esattamente  $n$  autovalori** di una matrice di ordine  $n$  se vengono contati tenendo conto della loro molteplicità.

## Autospazio

Si definisce **autospazio** associato all'autovalore  $\lambda$  lo **spazio lineare**

$$V(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax - \lambda x = 0\}.$$

La dimensione di  $V(\lambda)$  è minore o uguale alla molteplicità  $\nu$  di  $\lambda$ .

# Diagonalizzazione di una matrice

## Matrici simili

Date due matrici  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Se esiste una matrice non singolare  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tale che

$$B = X^{-1}AX$$

allora le matrici  $A$  e  $B$  si dicono **simili**.

Due matrici simili hanno gli stessi autovalori e lo stesso polinomio caratteristico, infatti:

$$B(X^{-1}x) = (X^{-1}AX)(X^{-1}x) = X^{-1}Ax = X^{-1}(\lambda x) = \lambda X^{-1}x.$$

## Diagonalizzazione di $A$

La matrice  $A$  si dice **diagonalizzabile** se esistono una matrice invertibile  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e una matrice diagonale  $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tali che

$$\Lambda = X^{-1}AX.$$

## Diagonalizzazione di una matrice

Se  $A$  è diagonalizzabile allora gli autovettori sono **linearmente indipendenti**. Infatti si ha

$$\Lambda = X^{-1}AX \quad \Rightarrow \quad AX = X\Lambda.$$

Le colonne di  $X$  danno gli autovettori della matrice  $A$ ; siccome  $X$  è non singolare le sue colonne sono linearmente indipendenti.

# Matrici hermitiane

## Matrici hermitiane

La matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  si dice **hermitiana** se  $A = A^H$  essendo  $A^H$  la matrice di elementi:

$$a_{ij}^H = \overline{a_{ji}}$$

( $\bar{a}$  è il **complesso coniugato** di  $a$ ).

**Osservazione** Se  $A$  è una matrice ad elementi reali allora  $A^H = A^T$ .

## Teorema

- Sia  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matrice hermitiana, allora i suoi autovalori sono **reali**.
- Sia  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matrice hermitiana, allora i suoi autovettori sono a due a due **ortogonali**.

# Condizionamento degli autovalori

## Teorema di Bauer-Fike

Sia  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matrice diagonalizzabile, cioè esistono  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  non singolare e  $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diagonale tali che  $\Lambda = X^{-1}AX$ .

Se  $\mu$  è un autovalore della matrice  $A + E \in \mathbb{C}^{n \times n}$  allora

$$\min_{\lambda} |\lambda - \mu| \leq K_p(X) \|E\|_p$$

essendo  $K_p(X)$  il numero di condizionamento di  $X$  nella norma  $\|\cdot\|_p$ .

# Localizzazione degli autovalori

## Teorema di Gershgorin

Data la matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , costruiamo i seguenti cerchi del piano complesso:

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\} \quad i = 1, \dots, n$$

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|\} \quad i = 1, \dots, n$$

Allora gli autovalori della matrice  $A$  sono contenuti sia nell'unione dei dischi  $C_i$  che dei dischi  $D_i$ , ossia

$$\lambda \in (\cup_{i=1}^n C_i) \cap (\cup_{i=1}^n D_i).$$

Inoltre, se  $p$  dischi  $C_i$  sono disgiunti dai rimanenti, si ha che esattamente  $p$  autovalori di  $A$  cadono nell'unione di questi dischi.

## Localizzazione degli autovalori

La function `gershgorin.m` disegna i cerchi di Gershgorin di una assegnata matrice  $A$ . Si deve usare il seguente comando

```
gershgorin(A)
```

In **blu** sono disegnati i cerchi  $C_i$  costruiti per righe;  
in **rosso** sono disegnati i cerchi  $D_i$  costruiti per colonne.

# Metodo delle potenze

## Metodo delle potenze

Data una matrice **diagonalizzabile**  $A$  con autovalori che soddisfano:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Il **metodo delle potenze** permette di calcolare l'**autovettore** associato all'**autovalore di modulo massimo**.

Usando il **rapporto di Rayleigh** si ottiene anche un'approssimazione dell'autovalore di modulo massimo.

## Algoritmo delle potenze

- Dati  $A$ ,  $x_0$  tale che  $\|x_0\| = 1$ ;
- per  $k = 1, 2, \dots$  fino a convergenza
  - ▶ calcola  $y_k = Ax_{k-1}$ ;
  - ▶ normalizza  $x_k = y_k / \|y_k\|$ ;
  - ▶ valuta l'autovalore  $\lambda_k = x_k^T Ax_k$ .

## Test d'arresto

- residuo:  $\|Ax_k - \lambda_k x_k\| \leq tol$ ;
- differenza fra le ultime iterate:  $|\lambda_k - \lambda_{k-1}| \leq tol |\lambda_k|$ .

# Metodo delle potenze inverse

Il metodo delle potenze inverse permette di calcolare l'autovettore associato all'autovalore di modulo minimo (purché diverso da zero) della matrice  $A$ .

Basta applicare il metodo delle potenze alla matrice  $A^{-1}$ .

## Algoritmo delle potenze inverse

- Dati  $A$ ,  $x_0$  tale che  $\|x_0\| = 1$ ;
- calcola la fattorizzazione di  $PA = LU$
- per  $k = 1, 2, \dots$  fino a convergenza
  - ▶ risolve  $Ay_k = x_{k-1}$  usando la fattorizzazione di  $A$ ;
  - ▶ normalizza  $x_k = y_k / \|y_k\|$ ;
  - ▶ valuta l'autovalore  $\lambda_k = x_k^T A x_k$ .

## Metodo delle potenze inverse con shift

Per calcolare l'autovettore associato all'autovalore più vicino ad un certo valore  $\mu$  si applica uno **shift** alla matrice  $A$  come segue:

$$(A - \mu I)x = (\lambda - \mu)x.$$

L'autovalore più vicino a  $\mu$  è quindi tale che  $|\lambda - \mu|$  sia minimo, quindi si applica il **metodo delle potenze inverse** alla matrice  $A - \mu I$ .

### Algoritmo delle potenze inverse con shift

- Dati  $A$ ,  $\mu$ ,  $x_0$  tale che  $\|x_0\| = 1$ ;
- calcola la fattorizzazione di  $P(A - \mu I) = LU$
- per  $k = 1, 2, \dots$  fino a convergenza
  - ▶ risolve  $(A - \mu I)y_k = x_{k-1}$  usando la fattorizzazione di  $A - \mu I$ ;
  - ▶ normalizza  $x_k = y_k / \|y_k\|$ ;
  - ▶ valuta l'autovalore  $\lambda_k = x_k^T A x_k$ .

# Metodo delle potenze per sottospazi

Si può generalizzare il metodo delle potenze in modo di calcolare **autospazi** di dimensione arbitraria  $p$ .

## Algoritmo delle potenze per sottospazi

- Dati  $A, \mu, Q_0 \in \mathbb{C}^{n \times p}$  tale che  $Q^H Q = I_p$ ;
- per  $k = 1, 2, \dots$  fino a convergenza
  - ▶  $Z_k = A Q_{k-1}$  prodotto per  $A$ ;
  - ▶  $Q_k R_k = Z_k$  fattorizzazione QR.

# Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

## eig

La function `eig` calcola tutti gli autovalori e gli autovettori della matrice  $A$  mediante il metodo QR.

- `e=eig(A)` fornisce un vettore contenente gli autovalori di  $A$ .
- `[V,D]=eig(A)` fornisce la matrice diagonale  $D$ , contenente gli autovalori sulla diagonale, e la matrice  $V$ , contenente gli autovettori (colonna per colonna) tali che  $A * V = V * D$ .

# Function di Matlab per il calcolo di autovalori ed autovettori

## eigs

La function `eigs` calcola gli autovalori di modulo più grande e gli autovettori associati di una **matrice in formato sparse** applicando il **metodo di Arnoldi**.

- `e=eigs(A)` calcola i **sei** autovalori più grandi in modulo.
- `[V,D]=eigs(A)` calcola la matrice diagonale  $D$  contenente i sei autovalori più grandi in modulo e la matrice  $V$  le cui colonne sono i corrispondenti autovettori.
- `eisg(A,k)` calcola i **k** autovalori di  $A$  più grandi in modulo.
- `eigs(A,k,sigma)` calcola **k** autovalori con i seguenti criteri:
  - `sigma` scalare    **k** autovalori più vicini a `sigma`
  - `sigma='lm'`      **k** autovalori più grandi
  - `sigma='sm'`      **k** autovalori più piccoli
  - `sigma='be'`      **k** autovalori più grandi e più piccoli

# Esercizi

## Esercizio 1

Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 - 7i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & i & 0 & 1 - i \\ 3 + 2i & 1 & 2 & 4i \\ 0 & 0 & i & -7 \end{pmatrix}$$

- Usare la function `gershgorin` per localizzare gli autovalori delle due matrici.
- Calcolare autovalori ed autovettori delle due matrici mediante la function `eig`.
- Usare il metodo delle potenze `potenze` e delle potenze inverse con shift `shiftinv` per calcolare gli autovalori di modulo massimo, minimo e quelli più vicini a  $\mu = 1$ .

## La function potenze

potenze.m

```
[lambda,x,iter]=potenze(A,x0,toll,nmax)
```

lambda	autovalore calcolato;
x	autovettore calcolato;
iter	numero di iterazioni per arrivare a convergenza;
A	matrice;
x0	vettore iniziale;
toll	tolleranza;
nmax	numero massimo di iterazioni

La function produce una tabella contenente il numero dell'iterata, il valore di  $\lambda$ , il residuo  $\|Ax_k - \lambda_k x_k\|$  e la differenza fra le ultime iterate  $|\lambda_k - \lambda_{k-1}|/|\lambda_k|$ .

## Le function `shiftinv`

```
shiftinv.m
```

```
[lambda,x,iter]=shiftinv(A,mu,x0,toll,nmax)
```

<code>lambda</code>	autovalore calcolato;
<code>x</code>	autovettore calcolato;
<code>iter</code>	numero di iterazioni per arrivare a convergenza;
<code>A</code>	matrice;
<code>mu</code>	shift;
<code>x0</code>	vettore iniziale;
<code>toll</code>	tolleranza;
<code>nmax</code>	numero massimo di iterazioni

La function produce una tabella contenente il numero dell'iterata, il valore di  $\lambda$ , il residuo  $\|Ax_k - \lambda_k x_k\|$  e la differenza fra le ultime iterate  $|\lambda_k - \lambda_{k-1}|/|\lambda_k|$ .

# Esercizio

## Esercizio 2

Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Usare la function `gershgorin` per localizzare gli autovalori.
- Calcolare gli autovalori con la function `eig`.
- Usare la function `potenze` per calcolare l'autovalore di modulo massimo.
- Usare la function `shiftinv` con shift  $\mu = 0$  per calcolare l'autovalore di modulo minimo.
- Osservato che `shiftinv` con shift  $\mu = 0$  non converge e che gli autovalori di modulo minimo sono complessi coniugati, trovare degli shift che permettano di calcolarli.

# Esercizio

## Esercizio 3

Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & 10 & 12 \\ 6 & -6 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

- Calcolare gli autovalori e gli autovettori usando il comando `eig`;
- calcolare l'autovalore di modulo massimo e l'autovettore associato mediante la function `potenze`, usando come vettore iniziale  $x_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 1]'$  e  $x_0 = [0 \ 0 \ 1 \ -1]'$ ;
- verificare che uno dei due vettori iniziali risulta ortogonale all'autovettore calcolato (usare `tol=1.e-10`).

# Esercizio

## Esercizio 4

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3.5 + i/3 & -2.5 + i/3 & -2.5 + i & 4 \\ 1.5 + i/6 & 1.5 + i/6 & -3.5 + i/2 & 2 \\ i/6 & -2 + i/6 & 3 + i/2 & 2 \\ -0.5 + i/3 & 2.5 - 2i/3 & -1.5 & -1 + i \end{pmatrix}$$

- Calcolare gli autovalori e gli autovettori usando il comando `eig`;
- calcolare l'autovalore di modulo massimo e l'autovettore associato mediante la function `potenze`, usando come vettore iniziale  $x_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 1]'$  e  $x_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 1]'$ ;
- verificare che uno dei due vettori iniziali risulta ortogonale all'autovettore calcolato.