Esercizio 903

Calcolare il seguente integrale
$$\int \cosh^2 x dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota formula:

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}\left(\cosh 2x + 1\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \cosh^2 x dx &= \frac{1}{2}\int \left(\cosh 2x + 1\right) dx \\ &= \frac{1}{4}\int \cosh 2x + \frac{1}{2}\int dx \\ &= \frac{1}{4}\cosh 2x + \frac{1}{2}x + C \\ &= \frac{1}{4}\left(\cosh 2x + 2x\right) + C\end{aligned}$$

Esercizio 904

Calcolare il seguente integrale
$$\int \cosh^3 x dx \tag{2}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \cosh^3 x dx = \int \cosh^2 x \cosh x dx \tag{3}$$

Osserviamo che:
$$\cosh x dx = d\left(\sinh x\right)$$

Inoltre, ricordiamo che $\sinh x$ e $\cosh x$ sono legate dalla nota formula:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

da cui:

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

Sostituendo in (3):

$$\begin{aligned}\int \cosh^3 x dx &= \int \left(1+\sinh^2 x\right) d\left(\sinh x\right) \\ &= \int d\left(\sinh x\right) + \int \sinh^2 x d\left(\sinh x\right) \\ &= \sinh x + \frac{1}{3}\sinh^3 x + C\end{aligned}$$

Esercizio 905

Calcolare il seguente integrale

$$\int \sinh^3 x dx \tag{4}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \sinh^3 x dx = \int \sinh^2 x \sinh x dx \tag{5}$$

Osserviamo che:

$$\sinh x dx = d\left(\cosh x\right)$$

Inoltre:

$$\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$$

Sostituendo in (5):

$$\begin{aligned}\int \sinh^3 x dx &= \int \left(\cosh^2 x - 1\right) d\left(\cosh x\right) \\ &= \int \cosh^2 x d\left(\cosh x\right) - \int d\left(\cosh x\right) \\ &= \frac{1}{3}\cosh^3 x - \cosh x + C\end{aligned}$$

Esercizio 906

Calcolare il seguente integrale

$$\int \cosh^4 x dx \tag{6}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota formula:

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}\left(\cosh 2x + 1\right),$$

quindi:

$$\begin{aligned} F(x) &\stackrel{def}{=} \int \cosh^4 x dx = \frac{1}{4}\int \left(\cosh 2x + 1\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\underbrace{\int \cosh^2 2x dx}_{\stackrel{def}{=} F_1(x)} + \sinh 2x + x\right) \end{aligned}$$

Per calcolare $F_1(x)$ poniamo $t = 2x \Longrightarrow F_1(t) = \frac{1}{2}\int \cosh^2 t dt$ che abbiamo già calcolato nell'esercizio 903, risultando $\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{4}\cosh 2t + \frac{t}{2}$, onde:

$$F_1(x) = \frac{\sinh 4x}{8} + \frac{x}{2}$$

Finalmente:

$$\int \cosh^4 x dx = \frac{\sinh 4x}{32} + \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{3}{8}x + C$$

Esercizio 907

Calcolare i seguenti integrali

$$\int \sinh^5 x \cosh x dx \tag{7}$$

$$\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx$$

***

Soluzione
Il primo integrale è immediato:

$$\begin{aligned} \int \sinh^5 x \cosh x dx &= \int \sinh^5 x d\left(\sinh x\right) \\ &= \frac{\sinh^6 x}{6} + C \end{aligned}$$

Per il secondo invece, utilizziamo la nota formula:

$$\sinh x \cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x,$$

onde:

$$\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sinh^2 2x dx$$

Poniamo $t = 2x$:

$$\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx = \frac{1}{8} \int \sinh^2 t dt \tag{8}$$

L'integrale $\int \sinh^2 t dt$ può essere determinato a partire da $\int \cosh^2 t dt$ che abbiamo già calcolato nell'esercizio 903

$$\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{4} \cosh 2t + \frac{t}{2}$$

Ma

$$\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1,$$

per cui:

$$\begin{aligned}\int \sinh^2 t dt &= \frac{1}{4} \cosh 2t + \frac{t}{2} - t \\ &= \frac{1}{4} \cosh 2t - \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Sostituendo tale risultato nella (8):

$$\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx = \frac{\cosh 4x}{32} - \frac{x}{16} + C$$

Esercizio 909

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sinh x \cosh^2 x} \tag{9}$$

***

Soluzione

Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sinh x \cosh^2 x} &= \int \frac{1}{\sinh x} d(\tanh x) \\ &= \frac{1}{\cosh x} - \int \tanh \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sinh x} \right) dx \\ &= \frac{1}{\cosh x} + \int \frac{dx}{\sinh x}\end{aligned} \tag{10}$$

$\int \frac{dx}{\sinh x}$ è un integrale notevole (v. esercizio 908):

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right|$$

Sostutendo nella (10):

$$\int \frac{dx}{\sinh x \cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh x} + \ln \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C$$

Esercizio 910

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} \tag{11}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota formula

$$\sinh x \cosh x = \frac{1}{2} \sinh 2x,$$

onde:

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} = 4 \int \frac{dx}{\sinh^2 (2x)}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = 2x$

$$4 \int \frac{dx}{\sinh^2 (2x)} = 2 \int \frac{dt}{\sinh^2 t} = -2 \coth t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} = -2 \coth 2x + C$$

Esercizio 911

Calcolare il seguente integrale

$$\int \tanh^3 x dx \tag{12}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \tanh^3 x dx = \int \tanh^2 x \tanh x dx \tag{13}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cosh^2 x} &= \frac{\overbrace{\cosh^2 x - \sinh^2 x}^{=1}}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \\ &\Longrightarrow \tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x},\end{aligned}$$

che sostituita nella (13) porge:

$$\begin{aligned}\int \tanh^3 x dx &= \int \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 x}\right) \tanh x dx \\ &= \int \tanh x dx - \int \tanh d\left(\tanh x\right) \\ &= \int \frac{d\left(\cosh x\right)}{\cosh x} - \frac{1}{2}\tanh^2 x \\ &= \ln\left(\cosh x\right) - \frac{1}{2}\tanh^2 x + C\end{aligned}$$

Esercizio 912

Calcolare il seguente integrale

$$\int \coth^4 x dx \tag{14}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \coth^4 x dx = \int \coth^2 x \coth^2 x dx \tag{15}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sinh^2 x} &= \frac{\overbrace{\cosh^2 x - \sinh^2 x}^{=1}}{\sinh^2 x} = \coth^2 x - 1 \\ &\Longrightarrow \coth^2 x = \frac{1}{\sinh^2 x} + 1,\end{aligned}$$

che sostituita nella (15) porge:

$$\begin{aligned}\int \coth^4 x dx &= \int \left(\frac{1}{\sinh^2 x}+1\right)\coth^2 x dx \\ &= -\int \coth^2 x d\left(\coth x\right)+\int \coth^2 x dx \\ &= -\frac{1}{3}\coth^3 x+\int \coth^2 x dx\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:

$$\begin{aligned}\int \coth^2 x dx &= \int \left(\frac{1}{\sinh^2 x}+1\right)dx \\ &= \int \frac{dx}{\sinh x}+\int dx \\ &= -\int d\left(\coth x\right)+x \\ &= -\coth x+x\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \coth^4 x dx = x-\frac{1}{3}\coth^3 x-\coth x+C$$

Esercizio 913

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x+\cosh^2 x} \tag{16}$$

***

Soluzione

Mettiamo in evidenza a denominatore $\cosh^2 x$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sinh^2 x+\cosh^2 x} &= \int \frac{dx}{\cosh^2 x\left(\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}+1\right)} \\ &= \int \frac{1}{\tanh^2 x+1}\frac{dx}{\cosh^2 x} \\ &= \int \frac{1}{\tanh^2 x+1}d\left(\tanh x\right) \\ &= \arctan\left(\tanh x\right)+C\end{aligned}$$

Esercizio 914

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x} \tag{17}$$

***

Soluzione
Qui conviene esplicitare $\sinh x$ e $\cosh x$:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x} &= \int \frac{dx}{e^x - e^{-x} + \frac{3}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)} \\
&= 2\int \frac{dx}{5e^x + e^{-x}} \\
&= 2\int \frac{e^{-x}dx}{5 + e^{-2x}}
\end{aligned}$$

Poniamo $t = e^{-x}$

$$\begin{aligned}
2\int \frac{e^{-x}dx}{5 + e^{-2x}} &= -2\int \frac{dt}{5 + t^2} \\
&= -\frac{2}{5}\int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{5}}\right) + C$$

È possibile mettere il risultato in una forma più elegante procedendo in questo modo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x} &= \int \frac{dx}{e^x - e^{-x} + \frac{3}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)} \\
&= 2\int \frac{dx}{5e^x + e^{-x}} \\
&= 2\int \frac{e^{x}dx}{1 + 5e^{2x}}
\end{aligned}$$

Poniamo $t = e^x$

$$\begin{aligned} 2\int \frac{e^x dx}{1+5e^{2x}} &= 2\int \frac{dt}{1+5t^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \int \frac{d\left(\sqrt{5}t\right)}{1+\left(\sqrt{5}t\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan\left(\sqrt{5}t\right) + C \end{aligned}$$

Cioè:

$$\int \frac{dx}{2\sinh x + 3\cosh x} = \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan\left(e^x \sqrt{5}\right) + C$$

Esercizio 915

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\tanh x - 1} \tag{18}$$

***

Soluzione

Applichiamo la nota relazione:

$$-\frac{1}{\sinh x - \cosh x} = \sinh x + \cosh x$$

Quindi l'integrale si scrive:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\tanh x - 1} &= -\int \cosh x \left(\sinh x + \cosh x\right) dx \\ &= -\int \sinh x \cosh x dx - \int \cosh^2 x dx \end{aligned}$$

Il primo integrale a secondo membro si calcola facilmente:

$$\int \sinh x \cosh x dx = \frac{1}{2} \int \sinh 2x dx = \frac{1}{4} \cosh 2x$$

Il secondo integrale è già stato calcolato in un esercizio precedente, risultando:

$$\int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4} \sinh 2x + \frac{1}{2} x$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\tanh x - 1} = -\frac{1}{4} \cosh 2x - \frac{1}{4} \sinh 2x - \frac{x}{2} + C$$

Possiamo esprimere il risultato in una forma più elegante, esplicitando il $\cosh 2x$:

$$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$$

Sostituendo nell'equazione precedente e incorporando il termine $1/4$ nella costante di integrazione:

$$\int \frac{dx}{\tanh x - 1} = -\frac{1}{4}\left(2\sinh^2 x + \sinh 2x + 2x\right) + C$$

Esercizio 916

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}} dx \tag{19}$$

***

Soluzione

Applichiamo la nota relazione:

$$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$$

Quindi l'integrale si scrive:

$$\int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}} dx = \int \frac{\sinh x}{\sqrt{2\cosh^2 x - 1}} dx$$

Poniamo:

$$t = \sqrt{2}\cosh x,$$

per cui:

$$dt = \sqrt{2}\sinh x dx$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sinh x}{\sqrt{2\cosh^2 x - 1}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|t + \sqrt{t^2 - 1}\right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}\cosh x + \sqrt{2\cosh^2 x - 1}\right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}\cosh x + \sqrt{\cosh 2x}\right| + C
\end{aligned}$$

Esercizio 917

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\cosh^4 x} \tag{20}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \tag{21}$$

Quindi l'integrale diventa:

$$\int \frac{dx}{\cosh^4 x} = \int \frac{1}{\cosh^2 x} \underbrace{\frac{dx}{\cosh^2 x}}_{=d(\tan x)}$$

Tenendo conto della (21):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cosh^4 x} &= \int \left(1 - \tanh^2 x\right) d\left(\tan x\right) \\ &= \tanh x - \frac{1}{3} \tanh^3 x + C \end{aligned}$$

Esercizio 918

Calcolare il seguente integrale

$$\int e^x \cosh x dx \tag{22}$$

***

Soluzione
Esplicitiamo il $\cosh x$:

$$\begin{aligned} \int e^x \cosh x dx &= \int e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(e^{2x} + 1\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + x\right) + C \\ &= \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

Esercizio 919

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int x \sinh x dx \tag{23}$$

$$\int x \cosh x dx$$

***

Soluzione
Entrambi gli integrali si calcolano per parti. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int x \sinh x dx &= \int x d(\cosh x) \\
&= x \cosh x - \int \cosh x dx \\
&= x \cosh x - \sinh x + C
\end{aligned}$$

Il secondo integrale:

$$\begin{aligned}
\int x \cosh x dx &= \int x d(\sinh x) \\
&= x \sinh x - \int \sinh x dx \\
&= x \sinh x - \cosh x + C
\end{aligned}$$

Esercizio 920

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^2 \sinh x dx \tag{24}$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sinh x dx &= \int x^2 d(\cosh x) \\
&= x^2 \cosh x - 2 \int x \cosh x dx
\end{aligned} \tag{25}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro. Anche qui integriamo per parti:

$$
\begin{aligned}
\int x\cosh x dx &= \int x d\left(\sinh x\right) \\
&= x\sinh x - \int \sinh x dx \\
&= x\sinh x - \cosh x + C_1
\end{aligned}
$$

Sostituendo tale risultato nella (25):

$$
\begin{aligned}
\int x^2\sinh x dx &= x^2\cosh x - 2x\sinh x + 2\cosh x + C \\
&= \left(x^2+2\right)\cosh x - 2x\sinh x + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 924

Calcolare l'integrale:

$$
\int \sinh x \ln\left(\cosh^2 x\right) dx
$$

***

Soluzione
L'integrale può essere scritto:

$$
\int \sinh x \ln\left(\cosh^2 x\right) dx = 2\int \sinh x \ln\left(\cosh x\right) dx
$$

Integriamo per parti:

$$
\begin{aligned}
2\int \sinh x \ln\left(\cosh x\right) dx &= 2\int \ln\left(\cosh x\right) d\left(\cosh x\right) \\
&= 2\ln\left(\cosh x\right)\cosh x - 2\int \cosh x \frac{\sinh x}{\cosh x} dx \\
&= 2\ln\left(\cosh x\right)\cosh x - 2\int \sinh x dx \\
&= 2\ln\left(\cosh x\right)\cosh x - 2\cosh x + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 925

Calcolare l'integrale:

$$
\int e^{2x}\cosh x dx
$$

***

Soluzione
Conviene esplicitare il $\cosh x$:

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cosh x dx &= \int e^{2x}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx\\ &= \frac{1}{2}\int\left(e^{3x}+e^x\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}e^{3x}+e^x\right)+C\\ &= \frac{e^{3x}}{6}+\frac{e^x}{2}+C\end{aligned}$$

Esercizio 926

Calcolare l'integrale:

$$\int \sinh^5 x\cosh^2 x dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \sinh^5 x\cosh^2 x dx = \int \sinh^4 x\cosh^2 x d\left(\cosh x\right)$$

Quindi:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Longrightarrow \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$$

perciò:

$$\int \sinh^4 x\cosh^2 x d\left(\cosh x\right) = \int \left(\cosh^2 x - 1\right)^2 \cosh^2 x d\left(\cosh x\right)$$

Poniamo $t = \cosh x$

$$\begin{aligned}\int \left(\cosh^2 x - 1\right)^2 \cosh^2 x d\left(\cosh x\right) &= \int t^2\left(t^4-2t^2+1\right)dt\\ &= \int\left(t^6-2t^4+t^2\right)dt\\ &= \frac{1}{7}t^7-\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \sinh^5 x\cosh^2 x dx = \frac{\cosh^7 x}{7} - \frac{2\cosh^5 x}{5} + \frac{\cosh^3 x}{3} + C$$