

Esercizio 797

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare gli integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9}$$
$$\int \frac{dx}{x^2 + 7x + 6}$$

Soluzione

1. L'integrando

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3),$$

quindi:

$$f(x) = \frac{1}{(x - 3)(x + 3)}$$

Perciò decomponiamo in fattori lineari distinti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x - 3)(x + 3)} &= \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3} \\ &= \frac{Ax + 3A + Bx - 3B}{(x - 3)(x + 3)} \\ &= \frac{(A + B)x + 3(A - B)}{(x - 3)(x + 3)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A + B)x + 3(A - B) = 1$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A - 3B = 1 \end{cases},$$

nelle incognite (A, B) . Si tratta di un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6}$$

Perciò:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - 3}{x + 3} \right| + C$$

2. L'integrando

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 7x + 6},$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x + 1)(x + 6)} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 6} \\ &= \frac{Ax + 6A + Bx + B}{(x + 1)(x + 6)} \\ &= \frac{(A + B)x + (6A + B)}{(x + 1)(x + 6)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A + B)x + (6A + B) = 1$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 6A + B = 1 \end{cases} ,$$

nelle incognite (A, B) . Si tratta di un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A = \frac{1}{5}, B = -\frac{1}{5}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x + 1)(x + 6)} dx &= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x + 6} \\ &= \frac{1}{5} \ln|x + 1| - \frac{1}{5} \ln|x + 6| \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x + 1}{x + 6} \right| + C \end{aligned}$$

Esercizio 798

Calcolare gli integrali:

$$\int \frac{xdx}{x^2 - 3x - 4}$$
$$\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} dx$$

Soluzione

1. L'integrando

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 4}$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4),$$

quindi:

$$f(x) = \frac{1}{(x + 1)(x - 4)}$$

Perciò decomponiamo in fattori lineari distinti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x + 1)(x - 4)} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 4} \\ &= \frac{Ax - 4A + Bx + B}{(x + 1)(x - 4)} \\ &= \frac{(A + B)x + (-4A + B)}{(x + 1)(x - 4)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A + B)x + (-4A + B) = 1$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -4A + B = 0 \end{cases},$$

nelle incognite (A, B) . Si tratta di un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A = \frac{1}{5}, B = \frac{4}{5}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x + 1)(x - 4)} &= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x - 4} \\ &= \frac{1}{5} \ln |x + 1| + \frac{4}{5} \ln |x - 4| + C \\ &= \frac{1}{5} \ln [|x + 1| \cdot (x - 4)^4] + C \end{aligned}$$

2. In questo caso il grado del numeratore è pari a quello del denominatore. Procediamo in questo modo:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} dx &= \int \frac{x^2 - 2x - 8 + 5x + 4}{x^2 - 2x - 8} dx \\ &= \int dx + \int \frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8} dx\end{aligned}$$

Calcoliamo $\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8} dx$ per decomposizione in frazioni parziali. Poniamo:

$$f(x) = \frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8},$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\frac{5x + 4}{(x - 4)(x + 2)} &= \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 2} \\ &= \frac{Ax + 2A + Bx - 4B}{(x - 4)(x + 2)} \\ &= \frac{(A + B)x + (2A - 4B)}{(x - 4)(x + 2)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A + B)x + (2A - 4B) = 5x + 4$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ A - 2B = 2 \end{cases},$$

nelle incognite (A, B) . Si tratta di un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A = 4, B = 1$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x + 4}{(x - 4)(x + 2)} dx &= 4 \int \frac{dx}{x - 4} + \int \frac{dx}{x + 2} \\ &= 4 \ln |x - 4| + \ln |x + 2| + C_1\end{aligned}$$

Si conclude che l'integrale proposto vale:

$$\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} dx = x + 4 \ln |x - 4| + \ln |x + 2| + C$$

Esercizio 799

Una grandezza fisica x (resa adimensionale) è legata al tempo t dall'equazione:

$$\int \frac{x^2}{a^4 - x^4} dx = \int \kappa dt, \quad (1)$$

essendo κ una costante positiva con le dimensioni dell'inverso di un tempo, ed a un parametro reale positivo. Esplicitare la dipendenza funzionale $x(t)$.

Soluzione

Siccome κ è una costante, la (1) implica:

$$\kappa t = F(x),$$

essendo $F(x)$ una primitiva di

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{a^4 - x^4} = \frac{x^2}{(a^2 - x^2)(a^2 + x^2)} \\ &= \frac{x^2}{(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)} \end{aligned}$$

$f(x)$ è una funzione razionale propria, per cui possiamo procedere per decomposizione in frazioni parziali. Precisamente, in frazioni parziali distinte:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)} \\ &= \frac{A}{a - x} + \frac{B}{a + x} + \frac{Cx + D}{a^2 + x^2} \\ &= \frac{A(a + x)(a^2 + x^2) + B(a - x)(a^2 + x^2) + (Cx + D)(a^2 - x^2)}{(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)} \\ &= \frac{(A - B - C)x^2 + (aA + aB - D)x^2 + (a^2A - a^2B + a^2C)x + a^3A + a^3B + a^2D}{(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)}, \end{aligned}$$

cioè:

$$(A - B - C)x^2 + (aA + aB - D)x^2 + (a^2A - a^2B + a^2C)x + a^3A + a^3B + a^2D = x^2 \quad (2)$$

Dalla (2) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A - B - C + 0 = 0 \\ aA + aB + 0 - D = 1 \\ A - B + C + 0 = 0 \\ aA + aB + 0 + D = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

nelle incognite (A, B, C, D) .

Le matrici incompleta e incompleta:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ a & a & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante di M :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ a & a & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ a & a & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2a & 2a & 0 \end{vmatrix} \\ &= 8a \end{aligned}$$

Quindi $r(M) = 4$. Inoltre, $r(N) = 4$, per cui $r(M) = r(N) = 4$. Ciò implica che (3) è un sistema di Cramer con caratteristica $p = 4$.

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

essendo

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Quindi:

$$A = \frac{1}{4a} \tag{4}$$

L'incognita B :

$$B = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

essendo:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ a & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Quindi:

$$B = \frac{1}{4a} \quad (5)$$

Le rimanenti incognite C, D possono essere calcolate direttamente, cioè senza ricorrere ai determinanti. Infatti dalla seconda e terza equazione di (3):

$$\begin{aligned} C &= A - B = 0 \\ D &= a(A + B) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$A = \frac{1}{4a}, B = \frac{1}{4a}, C = 0, D = -\frac{1}{2}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{4a} \int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{4a} \int \frac{dx}{a+x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{a^2+x^2} \\ &= -\frac{1}{4a} \ln|a-x| + \frac{1}{4a} \ln|a+x| - \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{4a} \ln|a-x| + \frac{1}{4a} \ln|a+x| - \frac{1}{2a} \arctan \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

Quindi:

$$t(x) = \frac{1}{4a\kappa} \left[\ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| - 2 \arctan \frac{x}{a} \right] + C \quad (6)$$

La dipendenza funzionale della grandezza x in funzione del tempo è data dall'inversa della funzione $t(x)$ espressa dalla (6).

Esercizio 800

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

Soluzione

L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$$

Perciò decomponiamo in fattori lineari distinti:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 3x - 1}{x(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A}{x(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A = 1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B+C = 1 \\ A+2B+C = -3 \\ 2A+0+0 = 1 \end{cases},$$

nelle incognite (A, B, C) . Si tratta di un sistema di Cramer. Anzichè risolvere con il metodo dei determinanti, è più semplice risolvere direttamente. Infatti dalla terza equazione otteniamo:

$$A = \frac{1}{2},$$

che sostituita nella prima e seconda:

$$\begin{cases} B+C = \frac{1}{2} \\ 2B-C = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Moltiplicando primo e secondo membro della prima equazione per -2 :

$$\begin{cases} -2B-2C = -1 \\ 2B-C = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Sommando membro a membro:

$$C = \frac{3}{2}$$

Quindi:

$$B = \frac{1}{2} - C = -1$$

Riassumendo, la soluzione del sistema è:

$$A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{3}{2}$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x+2| + C \\ &= \ln \frac{|x|^{1/2} \cdot |x+2|^{3/2}}{|x-1|} + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{x(x+2)^3}}{|x-1|} + C\end{aligned}$$

Esercizio 801

Calcolare gli integrali:

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{(x-2)^2} \\ \int \frac{x^4}{(1-x)^3} dx \\ \text{***}\end{aligned}$$

Soluzione

1. L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Precisamente in fattori lineari ripetuti:

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-2)^2} &= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} \\ &= \frac{A_1 x - 2A_1 + A_2}{x(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$A_1 x - 2A_1 + A_2 = x$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ -2A_1 + A_2 = 0 \end{cases} ,$$

la cui soluzione è immediata:

$$A_1 = 1, A_2 = 2$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{(x-2)^2} &= \int \frac{dx}{x-2} + 2 \int \frac{dx}{(x-2)^2} \\ &= \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C\end{aligned}$$

2. Qui abbiamo una funzione razionale impropria, per cui eseguiamo la divisione tra i due polinomi, ottenendo:

$$\frac{x^4}{(1-x)^3} = -x - 3 + \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{6}{1-x},$$

quindi:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^4}{(1-x)^3} dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \int \frac{d(1-x)}{(1-x)^3} + 4 \int \frac{d(1-x)}{(1-x)^2} - 6 \int \frac{d(1-x)}{1-x} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \underbrace{\frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{4}{1-x}}_{=\frac{1-8(1-x)}{2(1-x)^2} = \frac{8x-7}{2(1-x)^2}} - 6 \ln |1-x| + C \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{8x-7}{(1-x)^2} - x^2 - 3x - 6 \ln |1-x| \right] + C \end{aligned}$$

Esercizio 802

Calcolare gli integrali:

$$\int \frac{dx}{x^3 + x}$$

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} dx$$

Soluzione

1. L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2 + 1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \\ &= \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)x^2 + Cx + A = 1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases},$$

la cui soluzione è immediata:

$$A = 1, B = -1, C = 0$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 + x} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1 + x^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C \\ &= \ln \frac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}} + C \end{aligned}$$

2. Anche qui procediamo per decomposizioni in frazioni parziali:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} &= \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3} \\ &= \frac{(Ax + B)(x^2 + 3) + (x^2 + 1)(Cx + D)}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} \\ &= \frac{(A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (3A + C)x + 3B + D}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} \end{aligned}$$

Deve essere:

$$(A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (3A + C)x + 3B + D = x^3 + x^2 + x + 3,$$

da cui il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} A + 0 + C + 0 = 1 \\ 0 + B + 0 + D = 1 \\ 3A + 0 + C + 0 = 1 \\ 0 + 3B + 0 + D = 3 \end{cases},$$

che è un sistema di Cramer, come si può vedere da un calcolo diretto del rango della matrice incompleta:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$\Delta = \det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$
$$\implies r(M) = 4$$

Evidentemente:

$$r(N) = 4,$$

essendo N la matrice completa:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 0,$$

poichè Δ_1 ha due righe uguali. Possiamo determinare le rimanenti incognite per sostituzione anziché con il metodo dei determinanti

$$A = 0 \implies C = 1$$

Inoltre:

$$\begin{cases} B + D = 1 \\ 3B + D = 3, \end{cases}$$

da cui

$$B = 1, D = 0$$

Riassumendo:

$$A = 0, C = 1, B = 1, D = 0,$$

donde:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} dx = \int \frac{dx}{1 + x^2} + \int \frac{xdx}{x^2 + 3}$$
$$= \arctan x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) + C$$

Esercizio 803

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx$$

Soluzione

Qui abbiamo una funzione razionale impropria, per cui eseguiamo la divisione tra polinomi, ottenendo:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} = \frac{1}{x} + x + \frac{1-x}{x^2 - 2x + 3},$$

onde l'integrale si esprime:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{x-1}{x^2 - 2x + 3} dx,$$

resta quindi da calcolare l'integrale a secondo membro. Quest'ultimo si calcola facilmente, poiché:

$$x - 1 = \frac{1}{2}d(x^2 - 2x + 3)$$

Quindi:

$$\int \frac{x-1}{x^2 - 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 3| + C_1$$

Si conclude che l'integrale proposto è dato da:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} + C$$

Esercizio 808

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - e^x}$$

Soluzione

Poniamo:

$$e^x = t$$

Differenziando:

$$e^x dx = dt \implies dx = \frac{dt}{t}$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{dt}{t(t^2 - t)}$$

L'integrando è una funzione razionale propria,

$$\frac{1}{t^2(t-1)}$$

per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2(t-1)} &= \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{B}{t-1} \\ &= \frac{At(t-1) + A_2(t-1) + Bt^2}{t^2(t-1)} \\ &= \frac{(A_1 + B)t^2 + (-A_1 + A_2)t - A_2}{t^2(t-1)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A_1 + B)t^2 + (-A_1 + A_2)t - A_2 = 1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1 + 0 + B = 0 \\ A_1 - A_2 + 0 = 0 \\ 0 + A_2 + 0 = 1 \end{cases} ,$$

la cui soluzione è immediata:

$$A_1 = -1, A_2 = -1, B = 1$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t(t^2 - t)} &= -\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t-1} \\ &= -\ln|t| + \frac{1}{t} + \ln|t-1| + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - e^x} = -x + e^{-x} + \ln|e^x - 1| + C$$

Esercizio 809

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{\sin x dx}{\cos x (1 + \cos^2 x)}$$

Soluzione

Poniamo:

$$t = \cos x$$

Differenziando:

$$dt = -\sin x dx$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = - \int \frac{dt}{t(t^2 + 1)}$$

L'integrando è una funzione razionale propria,

$$\frac{1}{t(t^2 + 1)}$$

per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(t^2 + 1)} &= \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 1} \\ &= \frac{A(t^2 + 1) + Bt^2 + Ct}{t(t^2 + 1)} \\ &= \frac{(A + B)t^2 + Ct + A}{t(t^2 + 1)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A + B)t^2 + Ct + A = 1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases},$$

la cui soluzione è immediata:

$$A = 1, B = -1, C = 0$$

Perciò:

$$\begin{aligned} F(t) &= - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{tdt}{t^2 + 1} \\ &= -\ln|t| + \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{|t|} + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x (1 + \cos^2 x)} = \ln \frac{\sqrt{1 + \cos^2 x}}{|\cos x|} + C$$

Esercizio 811

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{(2 + \tan^2 x) dx}{\cos^2 x (1 + \tan^3 x)}$$

Soluzione

Poniamo:

$$\tan x = t$$

Differenziando:

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = \int \frac{2 + t^2}{1 + t^3} dt$$

L'integrando è una funzione razionale propria,

$$\frac{t^2 + 2}{t^3 + 1} = \frac{t^2 + 2}{(t + 1)(t^2 - t + 1)}$$

per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned} \frac{t^2 + 2}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} &= \frac{A}{t + 1} + \frac{Bt + C}{t^2 - t + 1} \\ &= \frac{At^2 - At + A + Bt^2 + (B + C)t + C}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} \\ &= \frac{(A + B)t^2 + (-A + B + C)t + A + C}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A + B)t^2 + (-A + B + C)t + A + C = t^2 + 2$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B + 0 = 1 \\ A - B - C = 0 \\ A + 0 + C = 2 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer. Infatti:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\Delta = \det M = -3 \neq 0 \implies r(M) = 3$$

D'altro canto:

$$r(N) = 3$$

Quindi $r(M) = r(N) = 3$.

La soluzione è:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 1$$
$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 0$$
$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = 1$$

Perciò:

$$F(t) = \int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{dt}{t^2 - t + 1} \quad (7)$$
$$= \ln |t+1| + F_1(t),$$

essendo

$$F_1(t) \stackrel{def}{=} \int \frac{dt}{t^2 - t + 1}$$

Quest'ultimo appartiene alla classe degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado, e come tale si risolve nel seguente modo:

$$\begin{aligned} t^2 - t + 1 &= (t+k)^2 + l \\ &= t^2 + 2kt + k^2 + l \\ \implies \begin{cases} 2k = -1 \\ l + k^2 = 1 \end{cases} &\implies \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ l = \frac{3}{4} \end{cases}, \end{aligned}$$

da ciò segue:

$$\begin{aligned} t^2 - t + 1 &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \frac{3}{4} \left[\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \right], \end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{4}{3} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C_1 \end{aligned}$$

Finalmente possiamo scrivere l'integrale (7):

$$F(t) = \ln|t+1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{(2 + \tan^2 x) dx}{\cos^2 x (1 + \tan^3 x)} = \ln|\tan x + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2 \tan x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Esercizio 812

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$$

Soluzione

L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ &= \frac{(A_1+B)x^3 + (-A_1+A_2-2B+C)x^2 + (A_1+B-2C)x - A_1+A_2+C}{(x-1)^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} (A_1+B)x^3 + (-A_1+A_2-2B+C)x^2 + (A_1+B-2C)x - A_1+A_2+C \\ = x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1 + 0 + B + 0 = 0 \\ -A_1 + A_2 - 2B + C = 1 \\ A_1 + 0 + B - 2C = -2 \\ -A_1 + A_2 + 0 + C = 3 \end{cases}$$

Scriviamo le due matrici, incompleta e completa:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$r(M) = r(N) = 4$$

Abbiamo cioè un sistema di Cramer. Risolvendolo otteniamo:

$$A_1 = -1, A_2 = 1, B = 1, C = 1$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} dx &= - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx \\ &= -\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln\sqrt{x^2+1} + \arctan x + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} + \arctan x - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

Esercizio 813

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

Soluzione

L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Osserviamo che:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} \cdot [(A_1+B)x^3 + (A_1+A_2-B_1+B_2)x^2 \\ &\quad + (-A_1+2A_2-B_1-2B_2)x - A_1+A_2+B_1+B_2] \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A_1 + B)x^3 + (A_1 + A_2 - B_1 + B_2)x^2 + (-A_1 + 2A_2 - B_1 - 2B_2)x - A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1 + 0 + B_1 + 0 = 0 \\ A_1 + A_2 - B_1 + B_2 = 0 \\ -A_1 + 2A_2 - B_1 - 2B_2 = 0 \\ -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 3 \end{cases}$$

Scriviamo le due matrici, incompleta e completa:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$r(M) = r(N) = 4$$

Abbiamo cioè un sistema di Cramer. Risolvendolo otteniamo:

$$A_1 = -\frac{1}{4}, A_2 = \frac{1}{4}, B_1 = \frac{1}{4}, B_2 = \frac{1}{4}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1} &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= -\ln|x-1| - \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1} \right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 814

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

Soluzione

L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \\ &= \frac{Ax - A + Bx}{x(x-1)} \\ &= \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)x - A = 1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

La cui soluzione è immediata

$$A = -1, B = 1$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x-1)} &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} \\ &= -\ln|x| - \ln|x-1| + C \\ &= \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C\end{aligned}$$

Esercizio 815

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)(x^3 + 1)} dx$$

Soluzione

L'integrando è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Innanzitutto osserviamo che:

$$(x^2 + x)(x^3 + 1) = x(x+1)^2(x^2 - x + 1)$$

Quindi la riduzione in frazioni parziali si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x + 1}{x(x+1)^2(x^2-x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{x(x+1)^2(x^2-x+1)} [A(x+1)^2(x^2-x+1) \\ &\quad + B_1x(x+1)(x^2-x+1) + B_2x(x^2-x+1) + x(Cx+D)(x+1)^2] \\ &= \frac{1}{x(x+1)^2(x^2-x+1)} [(A+B_1+C)x^4 + (A+B_2+2C+D)x^3 \\ &\quad + (-B_2+C+2D)x^2 + (A+B_1+B_2+D)x + A] \end{aligned}$$

Deve essere:

$$+ (-B_2 + C + 2D)x^2 + (A + B_1 + B_2 + D)x + A] = x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x + 1$$

Per il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B_1 + 0 + C + 0 = 1 \\ A + 0 + B_2 + 2C + D = 8 \\ 0 + 0 - B_2 + C + 2D = -1 \\ A + B_1 + B_2 + 0 + D = 2 \\ A + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 \end{cases} \quad (8)$$

Dall'ultima equazione si ottiene $A = 1$, per cui il sistema (11) equivale al seguente:

$$\begin{cases} B_1 + 0 + C + 0 = 0 \\ 0 + B_2 + 2C + D = 7 \\ 0 - B_2 + C + 2D = -1 \\ B_1 + B_2 + 0 + D = 1 \end{cases} \quad (9)$$

che risulta essere un sistema di Cramer. Risolvendolo con l'omonima regola, si ottiene: $B_1 = -2, B_2 = 3, C = 2, D = 0$.

Riassumendo, la soluzione di (11) è:

$$A = 1, B_1 = -2, B_2 = 3, C = 2, D = 0$$

Perciò:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x+1} + 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + 2 \int \frac{xdx}{x^2-x+1} \\ &= \ln|x| + 2 \ln|x+1| + 2F_1(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$F_1(x) = \int \frac{xdx}{x^2-x+1}, \quad (10)$$

che si calcola con il metodo noto dell'integrazioni di funzioni contenenti un trinomio di secondo grado. Precisamente:

$$x = a \frac{d}{dx} (x^2 - x + 1) + b,$$

essendo a, b coefficienti indeterminati:

$$x = 2ax - a + b \implies \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro. A tale scopo scriviamo:

$$x^2 - x + 1 = (x + k)^2 + l \implies \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ l = \frac{3}{4} \end{cases},$$

per cui: $x^2 - x + 1 = \frac{3}{4} \left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right]$, donde:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

dove abbiamo omissa la costante di integrazione.

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Finalmente otteniamo l'integrale proposto:

$$F(x) = \ln \frac{|x|(x^2 - x + 1)}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Esercizio 816

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

Soluzione

Abbiamo:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} &= \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \\ &= \frac{1}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} [(A + C)x^3 \\ &\quad + (-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D)x^2 + (A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D)x \\ &\quad + B + D = 1] \end{aligned}$$

Deve essere:

$$\begin{aligned} (A + C)x^3 + (-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D)x^2 + (A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D)x \\ + B + D = 1 \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + 0 + C + 0 + 1 \\ -\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 0 \\ A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0 \\ 0 + B + 0 + D = 1 \end{cases} \quad (11)$$

che risulta essere un sistema di Cramer. Risolvendolo con l'omonima regola, si ottiene

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, D = \frac{1}{2}$$

Perciò:

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx - \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \right) \quad (12)$$

I due integrali a secondo membro si calcolano il metodo di integrazione delle funzioni contenenti un trinomio di secondo grado, ottenendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx &= \arctan(\sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \\ \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) - \arctan(\sqrt{2}x - 1) \end{aligned}$$

Quindi:

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}x + 1) + \arctan(\sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right]$$

Esercizio 817

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$$

Soluzione

Abbiamo:

$$\begin{aligned} F(x) &= 5 \int \frac{x^3 + \frac{2}{5}}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx \\ &= 5 \int \frac{x^3 - 5x^2 + 4x + 5x^2 - 4x + \frac{2}{5}}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx \\ &= 5 \left(\int dx + \frac{1}{5} \int \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx \right) \\ &= 5x + F_1(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$F_1(x) = \int \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx,$$

che si calcola per riduzione in frazioni semplici. In ogni caso, questo procedimento è troppo laborioso per cui è conveniente eseguire la divisione tra polinomi dell'integrando di $F(x)$:

$$\frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} = \frac{1}{2x} - \frac{7}{3(x-1)} + \frac{161}{6(x-4)} + 5,$$

donde:

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + \frac{161}{6} \ln|x-4| + 5x + C$$

Metodo di Ostrogradskij

Si applica ad integrali del tipo:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx, \tag{13}$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi, con $q(x)$ di grado superiore a quello di $p(x)$ (quindi l'integrando è una funzione razionale propria).

Inoltre il denominatore è del tipo:

$$q(x) = \left(\sum_{k=0}^n b_k x^k \right)^\nu$$

In tal caso si dimostra che:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)} dx \quad (14)$$

Nella (14) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati di grado sono inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.

Sviluppiamo un esempio preso dal Demidovic (Esercizi e problemi di Analisi Matematica), confrontando il metodo di Ostrogradskij con il metodo per decomposizione in frazioni semplici.

$$\int \frac{1}{(x^3 - 1)^2} \quad (15)$$

Metodo di Ostrogradskij

Qui è

$$q(x) = (x^3 - 1)^2 \quad (16)$$

Quindi:

$$q'(x) = 3x^2(x^3 - 1)$$

Pertanto:

$$q_1(x) = x^3 - 1$$

ciò implica:

$$q_2(x) = \frac{(x^3 - 1)^2}{x^3 - 1} = x^3 - 1$$

q_1 e q_2 sono di terzo grado, onde X e Y sono entrambi di secondo grado, con coefficienti indeterminati.

La (14) si scrive:

$$\int \frac{1}{(x^3 - 1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 - 1} + \int \frac{Dx^2 + Ex + F}{x^3 - 1}$$

Derivando ambo i membri:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^3 - 1)^2} &= \frac{(2Ax + B)(x^3 - 1) - 3x^2(Ax^2 + Bx + C)}{(x^3 - 1)^2} \\
&+ \frac{Dx + Ex + F}{x^3 - 1} \\
&= \frac{1}{(x^3 - 1)} \cdot [Dx^5 + (E - 3A)x^4 + (F + 2A - 3B)x^3 \\
&+ (D - 3C)x^2 + (-E - 2A)x + (-F - B)]
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
1 &= Dx^5 + (E - 3A)x^4 + (F + 2A - 3B)x^3 \\
&+ (D - 3C)x^2 + (-E - 2A)x + (-F - B)
\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\left\{ \begin{array}{l} D = 0 \\ -3A + E = 0 \\ 2A - 2B + F = 0 \\ -3C + D = 0 \\ -2A - E = 0 \\ -B - F = 1 \end{array} \right. \quad (17)$$

Ricaviamo:

$$D = 0, C = 0$$

Quindi il sistema (17) equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} 3A - E = 0 \\ 2A - 2B + F = 0 \\ 2A - E = 0 \\ B + F = -1 \end{array} \right. \quad (18)$$

La prima e la terza equazione implicano:

$$A = E = 0,$$

onde otteniamo il sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2B - F = 0 \\ B + F = 0 \end{array} \right. ,$$

da cui:

$$B = -\frac{1}{3}, F = -\frac{2}{3}$$

Raccogliendo la soluzione, si ottiene:

$$\int \frac{1}{(x^3 - 1)^2} = -\frac{x}{3(x^3 - 1)} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3 - 1} \quad (19)$$

L'integrale $\int \frac{dx}{x^3 - 1}$ si calcola per decomposizione in frazioni semplici.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \\ &= \frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{(x-1)(x^2+x+1)}, \end{aligned}$$

cioè:

$$(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c) = 1$$

Per il principio di identità dei polinomi otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=0 \\ a+0-c=1 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = -\frac{2}{3}$$

Perciò:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx \quad (20)$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro. Si tratta di un integrale contenente un trinomio di secondo grado, per cui applichiamo il noto procedimento di calcolo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \end{aligned} \quad (21)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= (x+k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\ \implies \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ l = \frac{3}{4} \end{cases} \\ \implies x^2 + x + 1 &= \frac{3}{4} \left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right], \end{aligned}$$

quindi:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),$$

che sostituito in (21):

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

L'integrale (20):

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

E finalmente l'integrale proposto (19):

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{1}{9} \ln \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} - \frac{x}{3(x^2-1)} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Metodo della decomposizione in frazioni semplici

Siccome $(x^3-1)^2 = (x-1)^2(x^2+x+1)^2$, la decomposizione in frazioni semplici è:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^3-1)^2} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} [(A_1+B_1)x^5 + (A_1+A_2-B_1+C_1)x^4 + \\ &\quad + (A_1+2A_2+B_2-C_1)x^3 + (-A_1+3A_2-B_1-2B_2+C_2)x + \\ &\quad + (-A_1+2A_2+B_1+B_2-C_1-2C_2) + (-A_1+A_2+C_1+C_2)], \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} 1 &= (A_1+B_1)x^5 + (A_1+A_2-B_1+C_1)x^4 + \\ &\quad + (A_1+2A_2+B_2-C_1)x^3 + (-A_1+3A_2-B_1-2B_2+C_2)x + \\ &\quad + (-A_1+2A_2+B_1+B_2-C_1-2C_2) + (-A_1+A_2+C_1+C_2) \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema di equazioni lineari di sei equazioni in sei incognite:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + 0 + B_1 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ A_1 + A_2 - B_1 + C_1 + 0 + 0 = 0 \\ A_1 + 2A_2 + 0 - C_1 + B_2 + C_2 = 0 \\ -A_1 + 3A_2 - B_1 + 0 - 2B_2 + C_2 = 0 \\ -A_1 + 2A_2 + B_1 - C_1 + B_2 - 2C_2 = 0 \\ -A_1 + A_2 + 0 + C_1 + 0 + C_2 = 0 \end{array} \right. ,$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A_1 = -\frac{2}{9}, A_2 = \frac{1}{9}, B_1 = \frac{2}{9}, C_1 = \frac{1}{3}, B_2 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{1}{3},$$

donde:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^3 - 1)^2} &= -\frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{9} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{9} \int \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx \\ &= -\frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{9(x-1)} + \frac{1}{9} \int \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx \end{aligned}$$

È evidente che il metodo di Ostrogradskij è, in questo caso, più vantaggioso, poiché con il metodo della decomposizione in frazioni semplici, innanzitutto occorre risolvere un sistema di sei equazioni in sei incognite, dopodiché escono altri due integrali con trinomi di secondo grado, mentre con Ostrogradskij abbiamo un solo integrale.

Esercizio 823

Calcolare il seguente integrale utilizzando il metodo di Ostrogradskij

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^4 - 1)^2} \quad (22)$$

Soluzione

Ricordiamo la formula di riduzione di Ostrogradskij:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)} dx \quad (23)$$

Nella (23) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.

Nel nostro caso è:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x^4 - 1)^2 \\ q'(x) &= 8x^3(x^4 - 1) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} q_1(x) = x^4 - 1 &\implies X(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\ q_2(x) = x^4 - 1 &\implies Y(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H \end{aligned}$$

La (23) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x^4 - 1)^2} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{x^4 - 1} + \int \frac{Ex^3 + Fx^2 + Gx + H}{x^4 - 1} \quad (24)$$

Derivando primo e secondo membro della (24):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^4 - 1)^2} &= \frac{(3Ax^2 + 2Bx + C)(x^4 - 1) - 4x^3(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)}{(x^4 - 1)^2} + \\ &+ \frac{Ex^3 + Fx^2 + Gx + H}{x^4 - 1} \\ &= \frac{p_1(x)}{(x^4 - 1)^2} + \frac{Ex^3 + Fx^2 + Gx + H}{x^4 - 1} \\ &= \frac{p_1(x) + Ex^7 + Fx^6 + Gx^5 + Hx^4 - Ex^3 - Fx^2 - Gx - H}{(x^4 - 1)^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

essendo:

$$\begin{aligned} p_1(x) &\stackrel{def}{=} (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^4 - 1) - 4x^3(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \\ &= 3Ax^6 + 2Bx^5 + Cx^4 - 3Ax^2 - 2Bx - C - 4Ax^6 - 4Bx^5 - 4Cx^4 - 4Dx^3 \\ &= -Ax^6 - 2Bx^5 - 3Cx^4 - 4Dx^3 - 3Ax^2 - 2Bx - C, \end{aligned}$$

che sostituita in (25) fornisce:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^4 - 1)^2} &= Ex^7 + (-A + F)x^6 + (-2B + G)x^5 + \\ &+ (-3C + H)x^4 + (-4D - E)x^3 + (-3A - F)x^2 + (-2B - G)x + (-C - H), \end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned} 1 &= Ex^7 + (-A + F)x^6 + (-2B + G)x^5 + \\ &+ (-3C + H)x^4 + (-4D - E)x^3 + (-3A - F)x^2 + (-2B - G)x + (-C - H) \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = 0 \\ A = F \\ G = 2B \\ H = 3C \\ E = -4D \\ 3A = -F \\ 2B = -G \\ C + H = -1 \end{array} \right.$$

da cui otteniamo:

$$A = F = E = D = B = G = 0$$

$$\begin{cases} H = 3C \\ C + H = -1 \end{cases} \implies C = -\frac{1}{4}, H = -\frac{3}{4}$$

Sostituendo nella (24) i valori dei coefficienti così trovati:

$$\int \frac{dx}{(x^4 - 1)^2} = -\frac{x}{4(x^4 - 1)} + \int \frac{dx}{x^4 - 1} \quad (26)$$

Dobbiamo perciò calcolare

$$\int \frac{dx}{x^4 - 1}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4 - 1} &= \frac{1}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1} \\ &= \frac{a(x + 1)(x^2 + 1) + b(x - 1)(x^2 + 1) + (cx + d)(x^2 - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(a + b + c)x^3 + (a - b + d)x^2 + (a + b - c)x + (a - b - d)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Cioè:

$$1 = (a + b + c)x^3 + (a - b + d)x^2 + (a + b - c)x + (a - b - d)$$

Per il principio di identità dei polinomi, i coefficienti a, b, c, d devono soddisfare il sistema lineare:

$$\begin{cases} a + b + c + 0 = 0 \\ a - b + 0 + d = 0 \\ a + b - c + 0 = 0 \\ a - b + 0 - d = 1 \end{cases} ,$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}, c = 0, d = -\frac{1}{2}$$

Quindi (omettiamo la costante di integrazione)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 - 1} &= \frac{1}{4} \ln|x - 1| - \frac{1}{4} \ln|x + 1| - \frac{1}{2} \arctan x \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x, \end{aligned}$$

che sostituita nella (26) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{(x^4 - 1)^2} = \frac{3}{8} \arctan x - \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{x}{4(x^4 - 1)} + C$$

Esercizio 824

Calcolare il seguente integrale utilizzando il metodo di Ostrogradskij

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} \quad (27)$$

Soluzione

Ricordiamo la formula di riduzione di Ostrogradskij:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)} dx \quad (28)$$

Nella (34) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.

Nel nostro caso è:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x^2 - 1)^2 \\ q'(x) &= 2x(x^2 - 1) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} q_1(x) = x^2 - 1 &\implies X(x) = Ax + B \\ q_2(x) = x^2 - 1 &\implies Y(x) = Cx + D \end{aligned}$$

La (34) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 - 1} dx \quad (29)$$

Derivando primo e secondo membro della (35):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^2 - 1)^2} &= \frac{A(x^2 - 1) - 2x(Ax + B)}{(x^2 - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 1} \\
&= \frac{Ax^2 - A - 2Ax^2 - 2Bx + (Cx + D)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} \\
&= \frac{Cx^3 + (-A + D)x^2 + (-2B - C)x + (-A - D)}{(x^2 - 1)^2}
\end{aligned} \tag{30}$$

cioè:

$$1 = Cx^3 + (-A + D)x^2 + (-2B - C)x + (-A - D)$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = 0 \\ A = D \\ 2B = -C \\ A + D = -1 \end{array} \right.$$

Sostituendo nella (35) i valori dei coefficienti così trovati:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 1} \tag{31}$$

L'integrale a secondo membro è un integrale fondamentale, quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right|$$

che sostituita nella (37) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| + C \tag{32}$$

Esercizio 824

Calcolare il seguente integrale utilizzando il metodo di Ostrogradskij

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} \tag{33}$$

Soluzione

Ricordiamo la formula di riduzione di Ostrogradskij:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)} dx \tag{34}$$

Nella (34) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.

Nel nostro caso è:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x^2 - 1)^2 \\ q'(x) &= 2x(x^2 - 1) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} q_1(x) = x^2 - 1 &\implies X(x) = Ax + B \\ q_2(x) = x^2 - 1 &\implies Y(x) = Cx + D \end{aligned}$$

La (34) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 - 1} dx \quad (35)$$

Derivando primo e secondo membro della (35):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 - 1)^2} &= \frac{A(x^2 - 1) - 2x(Ax + B)}{(x^2 - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 1} \\ &= \frac{Ax^2 - A - 2Ax^2 - 2Bx + (Cx + D)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{Cx^3 + (-A + D)x^2 + (-2B - C)x + (-A - D)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned} \quad (36)$$

cioè:

$$1 = Cx^3 + (-A + D)x^2 + (-2B - C)x + (-A - D)$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} C = 0 \\ A = D \\ 2B = -C \\ A + D = -1 \end{cases}$$

Sostituendo nella (35) i valori dei coefficienti così trovati:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 1} \quad (37)$$

L'integrale a secondo membro è un integrale fondamentale, quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

che sostituita nella (37) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C \quad (38)$$

Esercizio 825

Calcolare il seguente integrale utilizzando separatamente il metodo di Ostrogradskij e il metodo della riduzione in frazioni semplici (coefficienti indeterminati).

$$F(x) = \int \frac{dx}{x(x+1)^2} \quad (39)$$

Soluzione

Metodo di Ostrogradskij

Ricordiamo la formula di riduzione di Ostrogradskij:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)} dx \quad (40)$$

Nella (40) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.

Nel nostro caso è:

$$\begin{aligned} q(x) &= x(x+1)^2 \\ q'(x) &= (x+1)^2 + 2x(x+1) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} q_1(x) = x+1 &\implies X(x) = A \\ q_2(x) = x(x+1) &\implies Y(x) = Bx + C \end{aligned}$$

La (40) si scrive:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \int \frac{Bx+C}{x(x+1)} dx \quad (41)$$

Derivando primo e secondo membro della (41):

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)^2} &= -\frac{A}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x(x+1)} \\ &= \frac{-Ax + (Bx+C)(x+1)}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{Bx^2 + (-A+B+C)x + C}{x(x+1)^2} \end{aligned} \quad (42)$$

cioè:

$$1 = Bx^2 + (-A+B+C)x + C$$

Il principio di identità dei polinomi genera il seguente sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite A, B, C :

$$\begin{cases} B = 0 \\ C = 1 \\ A - B - C = 0 \end{cases},$$

la cui soluzione è immediata:

$$A = 1, B = 0, C = 1 \quad (43)$$

Sostituendo nella (41) la soluzione (43), si ha:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \int \frac{dx}{x(x+1)} \quad (44)$$

Ci resta da calcolare l'integrale a secondo membro $\int \frac{dx}{x(x+1)}$; possiamo procedere per riduzione in frazioni parziali:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \\ &= \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}, \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \implies a=1, b=-1,$$

cosicchè (omettiamo la costante di integrazione, per poi inserirla nel risultato finale):

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right|,$$

che sostituito nella (44) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C \quad (45)$$

Riduzione in frazioni parziali

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A(x+1)^2 + B_1x(x+1) + B_2x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(A+B_1)x^2 + (2A+B_1+B_2)x + A}{x(x+1)^2}, \end{aligned}$$

cioè:

$$(A+B_1)x^2 + (2A+B_1+B_2)x + A = 1$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B_1=0 \\ 2A+B_1+B_2=0 \\ A=1 \end{cases}$$

Tale sistema si risolve facilmente per sostituzione, ottenendo:

$$A=1, B_1=-1, B_2=-1$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x+1)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \\ &= \frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

Confrontando i due metodi, vediamo che in questo caso specifico il metodo di Ostrogradskij è più laborioso, per cui è preferibile applicare quest'ultimo solo nei casi di un $q(x)$ "più complicato". Ad esempio, per $q(x) = (x^3 - 1)^4$, la riduzione in frazioni semplici conduce ad un sistema di 12 equazioni lineari in 12 incognite.

Esercizio 826

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} \quad (46)$$

Soluzione

Conviene applicare il metodo di Ostrogradskij:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)} dx \quad (47)$$

Nella (47) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.

Nel nostro caso è:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x+1)^2(x^2+1)^2 \\ q'(x) &= 2(x+1)(x^2+1)^2 + 4x(x+1)^2(x^2+1) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= (x+1)(x^2+1) \implies X(x) = Ax^2 + Bx + C \\ q_2(x) &= (x+1)(x^2+1) \implies Y(x) = Dx^2 + Ex + F \end{aligned}$$

La (47) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x+1)(x^2+1)} + \int \frac{Dx^2 + Ex + F}{(x+1)(x^2+1)} dx \quad (48)$$

Derivando primo e secondo membro della (48):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} &= \frac{1}{(x^3+x^2+x+1)^2} [(2Ax+B)(x^3+x^2+x+1) - \\ &\quad - (Ax^2+Bx+C)(3x^2+2x+1)] + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+x^2+x+1} \\ &= \frac{p_1(x) + (Dx^2+Ex+F)(x^3+x^2+x+1)}{(x^3+x^2+x+1)^2}, \end{aligned}$$

essendo:

$$p_1(x) = -Ax^4 - 2Bx^3 + (A - B - 3C)x^2 + (2A - 2C)x + B - C$$

Quindi:

$$\begin{aligned} & Dx^5 + (-A + D + E)x^4 + (-2B + D + E + F)x^3 \\ & + (A - B - 3C + D + E + F)x^2 + \\ & + (2A - 2C + E + F)x + (B - C + F) = 1 \end{aligned}$$

Il principio di identità dei polinomi genera il seguente sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite A, B, C :

$$\begin{cases} 0 + 0 + 0 + D + 0 + 0 = 0 \\ -A + 0 + 0 + D + E + 0 = 0 \\ 0 - 2B + 0 + D + E + F = 0 \\ A - B - 3C + D + E + F = 0 \\ 2A + 0 - 2C + 0 + E + F = 0 \\ 0 + B - C + 0 + 0 + F = 1 \end{cases} \quad (49)$$

Risolvendo tale sistema (di Cramer):

$$A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}, C = 0, D = 0, E = -\frac{1}{4}, F = \frac{3}{4} \quad (50)$$

Sostituendo nella (48) la soluzione (50), si ha:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{x-x^2}{4(x+1)(x^2+1)} - \frac{1}{4} \int \frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)} dx \quad (51)$$

Ci resta da calcolare l'integrale a secondo membro $\int \frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)} dx$; procediamo per riduzione in frazioni parziali:

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (b+c)x + a+c}{(x+1)(x^2+1)}, \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{cases} a+b+0=0 \\ 0+b+c=1 \\ a+0+c=-3 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, con soluzione:

$$a = -2, b = 2, c = 1,$$

cosicché:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)(x^2+1)} dx = -2 \ln|x+1| + \ln(x^2+1) + \arctan x,$$

che sostituito nella (51) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{x-x^2}{4(x+1)(x^2+1)} - \frac{1}{4} \arctan x + \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C \quad (52)$$

Esercizio 827

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^4} \quad (53)$$

Soluzione

Conviene applicare il metodo di Ostrogradskij. Scriviamo la formula di riduzione:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)} dx \quad (54)$$

Nella (54) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.

Nel nostro caso è:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x^2+1)^4 \\ q'(x) &= 8x(x^2+1)^3 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} q_1(x) = (x^2+1)^3 &\implies X(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F \\ q_2(x) = x^2+1 &\implies Y(x) = Gx + H \end{aligned}$$

La (54) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F}{(x^2+1)^3} + \int \frac{Gx + H}{x^2+1} dx \quad (55)$$

Derivando primo e secondo membro della (55):

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^4} = \frac{1}{(x^2 + 1)^6} [(5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E)(x^2 + 1)^3 - 6x(x^2 + 1)^2(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F)] + \frac{Gx + F}{x^2 + 1}$$

Sviluppando i prodotti e ordinando i vari termini, otteniamo

$$1 = Gx^7 + (-A + H)x^6 + (-2B + 3G)x^5 + (5A - 3C + 3H)x^4 + (4B - 4D + 3G)x^3 + (3C - 5E + 3H)x^2 + (2D - 6F + G)x + E + H$$

Il principio di identità dei polinomi genera il seguente sistema di otto equazioni lineari nelle otto incognite (A, B, C, D, E, F, G, H) :

$$\begin{cases} G = 0 \\ A = H \\ 2B = 3G \\ 5A - 3C + 3H = 0 \\ 4B - 4D + 3G = 0 \\ 3C - 5E + 3H = 0 \\ 2D - 6F + G = 0 \\ E + H = 1 \end{cases} \quad (56)$$

Dalla prima, dalla seconda e dalla terza equazione si ricava:

$$G = 0, B = 0, A = H \quad (57)$$

Quindi il sistema (56) si riduce a:

$$\begin{cases} 8A - 3C = 0 \\ D = 0 \\ 3C - 5E + 3A = 0 \\ F = 0 \\ E + A = 1 \end{cases} \quad (58)$$

perciò $D = F = 0$:

$$\begin{cases} 8A - 3C + 0 = 0 \\ 3A + 3C - 5E = 0 \\ A + 0 + E = 1 \end{cases} ,$$

che si risolve facilmente con la regola di Cramer: $A = \frac{5}{16}, C = \frac{5}{6}, E = \frac{11}{16}$. Riassumendo, la soluzione del sistema lineare (56) è:

$$A = \frac{5}{16}, B = 0, C = \frac{5}{6}, D = 0, E = \frac{11}{16}, F = 0, G = 0, H = \frac{5}{16} \quad (59)$$

Sostituendo la soluzione trovata in (55):

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{\frac{5}{16}x^5 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{11}{16}x}{(x^2+1)^3} + \frac{5}{16} \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+1}}_{=\arctan x}$$

$$= \frac{x(15x^3 + 40x + 33) + 15(x^2+1)^3 \arctan x}{48(x^2+1)^3} + C$$

Esercizio 828

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx \quad (60)$$

Soluzione

Eseguiamo la divisione tra il polinomio a numeratore e il polinomio a denominatore:

$$\frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} = \frac{1}{x} - \frac{9}{8(2x+1)} - \frac{7}{8(2x-1)} + \frac{1}{4}$$

Quindi:

$$\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{9}{8} \int \frac{dx}{2x+1} - \frac{7}{8} \int \frac{dx}{2x-1} + \frac{1}{4} \int dx$$

$$= \ln|x| - \frac{9}{16} \ln|2x+1| - \frac{7}{16} \ln|2x-1| + \frac{x}{4} + C$$

Esercizio 828

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx \quad (61)$$

Soluzione

Eseguiamo la divisione tra il polinomio a numeratore e il polinomio a denominatore:

$$\frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} = \frac{1}{x} - \frac{9}{8(2x+1)} - \frac{7}{8(2x-1)} + \frac{1}{4}$$

Quindi:

$$\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{9}{8} \int \frac{dx}{2x+1} - \frac{7}{8} \int \frac{dx}{2x-1} + \frac{1}{4} \int dx$$

$$= \ln|x| - \frac{9}{16} \ln|2x+1| - \frac{7}{16} \ln|2x-1| + \frac{x}{4} + C$$

Esercizio 830

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx \quad (62)$$

Soluzione

Procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2} &= \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x-3)^2(x+1)^2} [A_1(x-3)(x+1)^2 + A_2(x+1)^2 \\ &\quad + B_1(x-3)^2(x+1) + B_2(x-3)^2] \\ &= \frac{1}{(x-3)^2(x+1)^2} [(A_1 + B_1)x^3 + (-A_1 + A_2 - 5B_1 + B_2)x^2 \\ &\quad + (-5A_1 + 2A_2 + 3B_1 - 6B_2)x + (-3A_1 + A_2 + 9B_1 + 9B_2)] \end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} 5x^2 + 6x + 9 &= (A_1 + B_1)x^3 + (-A_1 + A_2 - 5B_1 + B_2)x^2 + \\ &\quad + (-5A_1 + 2A_2 + 3B_1 - 6B_2)x + (-3A_1 + A_2 + 9B_1 + 9B_2) \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A_1 + 0 + B_1 + 0 = 0 \\ -A_1 + A_2 - 5B_1 + B_2 = 5 \\ -5A_1 + 2A_2 + 3B_1 - 6B_2 = 6 \\ -3A_1 + A_2 + 9B_1 + 9B_2 = 9 \end{cases} \quad (63)$$

Il sistema (63) è di Cramer. Risolvendo otteniamo:

$$A_1 = 0, A_2 = \frac{9}{2}, B_1 = 0, B_2 = \frac{1}{2}$$

Pertanto la riduzione in frazioni semplici è:

$$\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{9}{2(x-3)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx &= \frac{9}{2} \int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\
&= -\frac{9}{2} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + C \\
&= \frac{5x+3}{-x^2+2x+3} + C
\end{aligned}$$

Esercizio 831

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2} dx \quad (64)$$

Soluzione

Osserviamo che $(x^2 - 3x - 10)^2 = (x-5)^2(x+2)^2$, quindi procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - 8x + 7}{(x-5)^2(x+2)^2} &= \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{(x-5)^2} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} \\
&= \frac{1}{(x-5)^2(x+2)} [A_1(x-5)(x+2)^2 + A_2(x+2)^2 \\
&\quad + B_1(x-5)^2(x+2) + B_2(x-5)^2] \\
&= \frac{1}{(x-5)^2(x+2)} [(A_1+B_1)x^3 + (-A_1+A_2-8B_1+B_2)x^2 \\
&\quad + (-16A_1+4A_2+5B_1-10B_2)x + (-20A_1+4A_2+50B_1+25B_2)]
\end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned}
x^2 - 8x + 7 &= (A_1 + B_1)x^3 + (-A_1 + A_2 - 8B_1 + B_2)x^2 + \\
&\quad + (-16A_1 + 4A_2 + 5B_1 - 10B_2)x + (-20A_1 + 4A_2 + 50B_1 + 25B_2)
\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A_1 + 0 + B_1 + 0 = 0 \\ -A_1 + A_2 - 8B_1 + B_2 = 1 \\ -16A_1 + 4A_2 + 5B_1 - 10B_2 = -8 \\ -20A_1 + 4A_2 + 50B_1 + 25B_2 = 7 \end{cases} \quad (65)$$

Il sistema (65) è di Cramer. Risolvendo otteniamo:

$$A_1 = \frac{30}{343}, A_2 = -\frac{8}{49}, B_1 = -\frac{30}{343}, B_2 = \frac{27}{49}$$

Pertanto la riduzione in frazioni semplici è:

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2} = \frac{30}{343} \frac{1}{x - 5} - \frac{8}{49} \frac{1}{(x - 5)^2} - \frac{30}{343} \frac{1}{x + 2} + \frac{25}{49} \frac{1}{(x + 2)^2}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x - 3)^2 (x + 1)^2} dx &= \frac{30}{343} \int \frac{dx}{x - 5} - \frac{8}{49} \int \frac{dx}{(x - 5)^2} \\ &\quad - \frac{30}{343} \int \frac{dx}{x + 2} + \frac{25}{49} \int \frac{dx}{(x + 2)^2} \\ &= \frac{30}{343} \ln|x - 5| + \frac{8}{49} \frac{1}{x - 5} - \frac{30}{343} \ln|x + 2| - \frac{25}{49} \frac{1}{x + 2} + C \\ &= \frac{30}{343} \ln \left| \frac{x - 5}{x + 2} \right| + \frac{151 - 19x}{49(x^2 - 3x - 10)} + C \end{aligned}$$

Esercizio 832

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^3} dx \quad (66)$$

Soluzione

Osserviamo che $(x^2 - 3x + 2)^3 = (x - 1)^3 (x - 2)^3$, quindi procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned} \frac{2x - 3}{(x - 1)^3 (x - 2)^3} &= \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{(x - 1)^3} + \frac{B_1}{x - 2} + \frac{B_2}{(x - 2)^2} + \frac{B_3}{(x - 2)^3} \\ &= \frac{1}{(x - 1)^2 (x + 2)} [(A_1 + B_1)x^5 + (-7A_1 + A_2 - 8B_1 + B_2)x^4 \\ &\quad + (-25A_1 + 9A_2 - 3A_3 - 38B_1 + 18B_2 - 6B_3)x^2 \\ &\quad + (16A_1 - 7A_2 + 3A_3 + 28B_1 - 20B_2 + 12B_3)x \\ &\quad + (-4A_1 + 2A_2 - A_3 - 8B_1 + 8B_2 - 8B_3)] \end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= (A_1 + B_1)x^5 + (-7A_1 + A_2 - 8B_1 + B_2)x^4 \\ &\quad + (-25A_1 + 9A_2 - 3A_3 - 38B_1 + 18B_2 - 6B_3)x^2 \\ &\quad + (16A_1 - 7A_2 + 3A_3 + 28B_1 - 20B_2 + 12B_3)x \\ &\quad + (-4A_1 + 2A_2 - A_3 - 8B_1 + 8B_2 - 8B_3) \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A_1 + 0 + 0 + B_1 + 0 + 0 = 0 \\ -7A_1 + A_2 + 0 - 8B_1 + B_2 + 0 = 0 \\ 19A_1 - 5A_2 + A_3 + 25B_1 - 7B_2 + B_3 = 0 \\ -25A_1 + 9A_2 - 3A_3 - 38B_1 + 18B_2 - 6B_3 = 0 \\ 16A_1 - 7A_2 + 3A_3 + 28B_1 - 20B_2 + 12B_3 = 2 \\ -4A_1 + 2A_2 - A_3 - 8B_1 + 8B_2 - 8B_3 = -3 \end{cases} \quad (67)$$

Il sistema (67) è di Cramer. Risolvendo otteniamo:

$$A_1 = 0, A_2 = -1, A_3 = 1, B_1 = 0, B_2 = 1, B_3 = 1$$

Pertanto la riduzione in frazioni semplici è:

$$\frac{2x - 3}{(x - 1)^3 (x - 2)^3} = \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{(x - 1)^3} - \frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{1}{(x - 2)^3}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 3}{(x - 1)^3 (x - 2)^3} dx &= \int \frac{dx}{(x - 1)^2} - \int \frac{dx}{(x - 1)^3} - \int \frac{dx}{(x - 2)^2} + \int \frac{dx}{(x - 2)^3} \\ &= -\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2(x - 1)^2} + \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{2(x - 2)^2} + C \\ &= -\frac{1}{2(x^2 - 3x + 2)^2} + C \end{aligned}$$

Esercizio 833

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{xdx}{x^2 - x - 2} \quad (68)$$

Soluzione

Siccome l'integrale contiene un trinomio di secondo grado, applichiamo il procedimento standard per questi tipi di integrali. Precisamente, "forziamo" il numeratore dell'integrando ad assumere la forma del differenziale del denominatore in modo da far risultare un logaritmo come risultato dell'integrazione:

$$\begin{aligned} xdx &= ad(x^2 - x - 2) + bdx \\ \iff x &= a(2x - 1) + b \implies a = b = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

cosicché l'integrale proposto può scriversi:

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{x^2 - x - 2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - x - 2)}{x^2 - x - 2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x - 2} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 2| + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}\end{aligned}\tag{69}$$

Calcoliamo a parte l'integrale $\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$. A tale scopo cerchiamo di far comparire un quadrato perfetto a denominatore:

$$\begin{aligned}x^2 - x - 2 &= (x + k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\ \implies k &= -\frac{1}{2}, \quad l = -\frac{9}{4} \\ \implies x^2 - x - 2 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\ &= \frac{9}{4} \left[\left(\frac{2x - 1}{3}\right)^2 - 1 \right]\end{aligned}$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{4}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 - 1}\tag{70}$$

Poniamo:

$$t = \frac{2x - 1}{3}$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

L'integrale a secondo membro è un integrale noto:

$$\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right|$$

onde:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right|,$$

che sostituita nella (69):

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{x^2 - x - 2} &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 2| + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |(x - 2)(x + 1)| + \frac{1}{6} \ln |x + 2| - \frac{1}{6} \ln |x + 1| \\ &= \frac{1}{2} \ln |x - 2| + \frac{1}{2} \ln |x + 1| + \frac{1}{6} \ln |x + 2| - \frac{1}{6} \ln |x + 1| \\ &= \frac{1}{3} \ln |x + 1| + \frac{2}{3} \ln |x - 2|\end{aligned}$$