

Esercizio 720

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare gli integrali:

1. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

2. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)^2}$

Soluzione

1. L'integrando

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Più precisamente, in fattori lineari distinti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \\ &= \frac{A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + 6A+3B+2C}{(x+1)(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + 6A+3B+2C = 1$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=0 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+3} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \ln|x+2| + \frac{1}{2} \ln|x+3| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+3) - \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

2. L'integrando

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)^2},$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Più precisamente, in fattori lineari ripetuti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(A+B_1)x^2 + (-4A-B_1+B_2)x + 4A - 2B_1 + B_2}{(x+1)(x-2)^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B_1)x^2 + (-4A-B_1+B_2)x + 4A - 2B_1 + B_2 = 1$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B_1 + 0 = 0 \\ -4A - B_1 + B_2 = 0 \\ 4A - 2B_1 + B_2 = 1 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A = \frac{1}{9}, B_1 = -\frac{1}{9}, B_2 = \frac{1}{3}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-2)^2} \\ &= \frac{1}{9} \ln|x+1| - \frac{1}{9} \ln|x-2| - \frac{1}{3(x-2)} + C \\ &= \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| - \frac{1}{3(x-2)} + C \end{aligned}$$

Esercizio 721

Calcolare gli integrali:

1. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x-2)^2(x+4)} dx$

2. $\int \frac{2x^2-x+1}{(x^2-x+5)^2} dx$

Soluzione

1. L'integrando

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x-2)^2(x+4)},$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Più precisamente, in fattori lineari ripetuti:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x-2)^2(x+4)} &= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B}{x+4} \\ &= \frac{(A_1 + B)x^2 + (2A_1 + A_2 - 4B)x + (-8A_1 + 4A_2 + 4B)}{(x-2)^2(x+4)} \end{aligned}$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1 + 0 + B = 3 \\ 2A_1 + A_2 - 4B = 2 \\ -8A_1 + 4A_2 + 4B = 1 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A_1 = \frac{67}{36}, A_2 = \frac{17}{6}, B = \frac{41}{36}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x-2)^2(x+4)} dx &= \frac{67}{36} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{17}{6} \int \frac{dx}{(x-2)^2} + \frac{41}{36} \int \frac{dx}{x+4} \\ &= \frac{67}{36} \ln|x-2| - \frac{17}{6} \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{41}{36} \ln|x+4| + C \end{aligned}$$

2. L'integrando

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 5)^2},$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Siccome $x^2 - x + 5$ non è riducibile in fattori, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 5)^2} &= \frac{Ax + B}{x^2 - x + 5} + \frac{Cx + D}{(x^2 - x + 5)^2} \\ &= \frac{Ax^3 + (-A + B)x^2 + (5A - B + C)x + 5B + D}{(x^2 - x + 5)^2} \end{aligned}$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + 0 + 0 + 0 = 0 \\ -A + B + 0 + 0 = 2 \\ -5A + 5B + 0 + D = -1 \\ 0 + 5B + 0 + D = 1 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A = 0, B = 2, C = 1, D = -9$$

Perciò:

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 5)^2} dx = 2 \int \frac{dx}{x^2 - x + 5} + \int \frac{x - 9}{x^2 - x + 5} dx$$

Gli integrali a secondo membro si calcolano con i metodi visti nella sezione "integrali contenenti un trinomio di secondo grado", ottenendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - x + 5} &= \frac{2}{\sqrt{19}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{19}} + C \\ \int \frac{x - 9}{x^2 - x + 5} dx &= -\frac{17x + 1}{19(x^2 - x + 5)} - \frac{34}{19} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{19}} + C, \end{aligned}$$

cosicché:

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 5)^2} dx = -\frac{17x + 1}{19(x^2 - x + 5)} + \frac{42}{19} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{19}} + C$$

Esercizio 722

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \sqrt{3x^2 + x + 2} dx \quad (1)$$

Soluzione

Scriviamo:

$$\begin{aligned} 3x^2 + x + 2 &= 3(x + k)^2 + l = 3x^2 + 6kx + 3k^2 + l \\ \implies \begin{cases} 6k = 1 \\ l + 3k^2 = 2 \end{cases} &\implies \begin{cases} k = \frac{1}{6} \\ l = \frac{23}{12} \end{cases}, \end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned} 3x^2 + x + 2 &= 3 \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{12} \\ \implies \sqrt{3x^2 + x + 2} &= \sqrt{\frac{23}{12}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{6x + 1}{\sqrt{23}}\right)^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$F(x) = \sqrt{\frac{23}{12}} \int \sqrt{1 + \left(\frac{6x + 1}{\sqrt{23}}\right)^2} dx \quad (2)$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \frac{6x + 1}{\sqrt{23}} \implies dx = \frac{23}{6} dt,$$

cosicchè l'integrale (2) diventa:

$$F(t) = \frac{23}{6\sqrt{12}} \int \sqrt{1+t^2} dt \quad (3)$$

Calcoliamo $\int \sqrt{1+t^2} dt$ per parti:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+t^2} dt &= t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2} dt - \ln |t + \sqrt{1+t^2}|, \end{aligned} \quad (4)$$

giacchè:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln |t + \sqrt{1+t^2}| + C$$

Osserviamo che la (4) può essere risolta rispetto a $\int \sqrt{1+t^2} dt$, ottenendo:

$$\int \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1+t^2} + \ln |t + \sqrt{1+t^2}| \right) + C$$

Ripristiniamo la variabile x :

$$\begin{aligned} 1+t^2 &= 1 + \frac{36x^2 + 12x + 1}{23} \\ &= \frac{12}{23} (3x^2 + x + 2) \\ \implies \sqrt{1+t^2} &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}} \sqrt{3x^2 + x + 2} \\ \implies t\sqrt{1+t^2} &= \frac{2\sqrt{3}}{23} (6x+1) \sqrt{3x^2 + x + 2} \end{aligned}$$

Passiamo al logaritmo:

$$\begin{aligned} \ln |t + \sqrt{1+t^2}| &= \ln \left| \frac{6x+1 + 2\sqrt{3}\sqrt{3x^2+x+2}}{\sqrt{23}} \right| \\ &= \ln |6x+1 + 2\sqrt{3}(3x^2+x+2)| - \ln \sqrt{23} \end{aligned}$$

Sostituendo il tutto nella (3), ed incorporando la costante $\frac{23}{24\sqrt{3}} \ln \sqrt{23}$ nella costante di integrazione:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{12} (6x+1) \sqrt{3x^2+x+2} + \frac{23}{24\sqrt{3}} \ln \left| 6x+1 + 2\sqrt{3}\sqrt{3x^2+x+2} \right| + C \\ &= \frac{1}{72} \left[(6x+1) \sqrt{3x^2+x+2} + 2\sqrt{3} \ln \left| 6x+1 + 2\sqrt{3}\sqrt{3x^2+x+2} \right| \right] + C \end{aligned}$$

Esercizio 723

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{25x^2 + 4x + 7} dx$$

Soluzione

Sia:

$$F(x) = \int \sqrt{25x^2 + 4x + 7} dx \quad (5)$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned} 25x^2 + 4x + 7 &= 25(x+k)^2 + l = 25x^2 + 50kx + 25k^2 + l \\ \implies \begin{cases} 50k = 4 \\ l + 25k^2 = 7 \end{cases} &\implies \begin{cases} k = \frac{2}{25} \\ l = \frac{171}{25} \end{cases}, \end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned} 25x^2 + 4x + 7 &= 25 \left(x + \frac{2}{25} \right)^2 + \frac{171}{25} \\ \implies \sqrt{25x^2 + 4x + 7} &= \frac{\sqrt{171}}{5} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{25x+2}{\sqrt{171}} \right)^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$F(x) = \frac{\sqrt{171}}{5} \int \sqrt{1 + \left(\frac{25x+2}{\sqrt{171}} \right)^2} dx \quad (6)$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \frac{25x+2}{\sqrt{171}} \implies dx = \frac{\sqrt{171}}{25} dt,$$

cosicchè l'integrale (6) diventa:

$$F(t) = \frac{171}{25 \cdot 5} \int \sqrt{1+t^2} dt \quad (7)$$

Calcoliamo $\int \sqrt{1+t^2} dt$ per parti:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+t^2} dt &= t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2} dt - \ln |t + \sqrt{1+t^2}|, \end{aligned} \quad (8)$$

giacchè:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln |t + \sqrt{1+t^2}| + C$$

Osserviamo che la (8) può essere risolta rispetto a $\int \sqrt{1+t^2} dt$, ottenendo:

$$\int \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1+t^2} + \ln |t + \sqrt{1+t^2}| \right) + C$$

Ripristiniamo la variabile x :

$$\begin{aligned} 1+t^2 &= 1 + \frac{625x^2 + 100x + 175}{171} \\ &= \frac{25}{171} (25x^2 + 4x + 7) \\ \implies \sqrt{1+t^2} &= \frac{5}{171} (25x+2) \sqrt{25x^2 + 4x + 7} \\ \implies t\sqrt{1+t^2} &= \frac{5}{171} (25x+2) \sqrt{25x^2 + 4x + 7} \end{aligned}$$

Passiamo al logaritmo:

$$\ln |t + \sqrt{1+t^2}| = \ln |25x+2 + 5\sqrt{25x^2 + 4x + 7}| - \ln \sqrt{171}$$

Sostituendo il tutto nella (7), ed incorporando la costante $-\frac{171}{50\sqrt{25}} \ln \sqrt{171}$ nella costante di integrazione:

$$F(x) = 250 \left[5(25x+2) \sqrt{25x^2 + 4x + 7} + 171 \ln |25x+2 + 5\sqrt{25x^2 + 4x + 7}| \right] + C$$

Esercizio 721

Calcolare gli integrali:

$$1. \int \frac{3x^2+2x+1}{(x-2)^2(x+4)} dx$$

$$2. \int \frac{2x^2-x+1}{(x^2-x+5)^2} dx$$

Soluzione

1. L'integrando

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x - 2)^2 (x + 4)},$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Più precisamente, in fattori lineari ripetuti:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x - 2)^2 (x + 4)} &= \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{(x - 2)^2} + \frac{B}{x + 4} \\ &= \frac{(A_1 + B)x^2 + (2A_1 + A_2 - 4B)x + (-8A_1 + 4A_2 + 4B)}{(x - 2)^2 (x + 4)} \end{aligned}$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A_1 + 0 + B = 3 \\ 2A_1 + A_2 - 4B = 2 \\ -8A_1 + 4A_2 + 4B = 1 \end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A_1 = \frac{67}{36}, A_2 = \frac{17}{6}, B = \frac{41}{36}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x - 2)^2 (x + 4)} dx &= \frac{67}{36} \int \frac{dx}{x - 2} + \frac{17}{6} \int \frac{dx}{(x - 2)^2} + \frac{41}{36} \int \frac{dx}{x + 4} \\ &= \frac{67}{36} \ln|x - 2| - \frac{17}{6} \frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{41}{36} \ln|x + 4| + C \end{aligned}$$

2. L'integrando

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 5)^2},$$

è una funzione razionale propria, per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali. Siccome $x^2 - x + 5$ non è riducibile in fattori, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 5)^2} &= \frac{Ax + B}{x^2 - x + 5} + \frac{Cx + D}{(x^2 - x + 5)^2} \\ &= \frac{Ax^3 + (-A + B)x^2 + (5A - B + C)x + 5B + D}{(x^2 - x + 5)^2} \end{aligned}$$

Da ciò ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + 0 + 0 + 0 = 0 \\ -A + B + 0 + 0 = 2 \\ -5A + 5B_1 + 0 + D = -1 \\ 0 + 5B + 0 + D = 1 \end{cases} ,$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A = 0, B = 2, C = 1, D = -9$$

Perciò:

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 5)^2} dx = 2 \int \frac{dx}{x^2 - x + 5} + \int \frac{x - 9}{x^2 - x + 5} dx$$

Gli integrali a secondo membro si calcolano con i metodi visti nella sezione "integrali contenenti un trinomio di secondo grado", ottenendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - x + 5} &= \frac{2}{\sqrt{19}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{19}} + C \\ \int \frac{x - 9}{x^2 - x + 5} dx &= -\frac{17x + 1}{19(x^2 - x + 5)} - \frac{34}{19} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{19}} + C, \end{aligned}$$

cosicché:

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 5)^2} dx = -\frac{17x + 1}{19(x^2 - x + 5)} + \frac{42}{19} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{19}} + C$$

Esercizio 722

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \sqrt{3x^2 + x + 2} dx \quad (9)$$

Soluzione

Scriviamo:

$$\begin{aligned} 3x^2 + x + 2 &= 3(x + k)^2 + l = 3x^2 + 6kx + 3k^2 + l \\ \implies \begin{cases} 6k = 1 \\ l + 3k^2 = 2 \end{cases} &\implies \begin{cases} k = \frac{1}{6} \\ l = \frac{23}{12} \end{cases} , \end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned} 3x^2 + x + 2 &= 3 \left(x + \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{23}{12} \\ \implies \sqrt{3x^2 + x + 2} &= \sqrt{\frac{23}{12}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{6x + 1}{\sqrt{23}} \right)^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$F(x) = \sqrt{\frac{23}{12}} \int \sqrt{1 + \left(\frac{6x+1}{\sqrt{23}}\right)^2} dx \quad (10)$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \frac{6x+1}{\sqrt{23}} \implies dx = \frac{23}{6} dt,$$

cosicché l'integrale (10) diventa:

$$F(t) = \frac{23}{6\sqrt{12}} \int \sqrt{1+t^2} dt \quad (11)$$

Calcoliamo $\int \sqrt{1+t^2} dt$ per parti:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+t^2} dt &= t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2} dt - \ln|t + \sqrt{1+t^2}|, \end{aligned} \quad (12)$$

giacchè:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln|t + \sqrt{1+t^2}| + C$$

Osserviamo che la (12) può essere risolta rispetto a $\int \sqrt{1+t^2} dt$, ottenendo:

$$\int \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1+t^2} + \ln|t + \sqrt{1+t^2}| \right) + C$$

Ripristiniamo la variabile x :

$$\begin{aligned} 1+t^2 &= 1 + \frac{36x^2 + 12x + 1}{23} \\ &= \frac{12}{23} (3x^2 + x + 2) \\ \implies \sqrt{1+t^2} &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}} \sqrt{3x^2 + x + 2} \\ \implies t\sqrt{1+t^2} &= \frac{2\sqrt{3}}{23} (6x+1) \sqrt{3x^2 + x + 2} \end{aligned}$$

Passiamo al logaritmo:

$$\begin{aligned}\ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| &= \ln \left| \frac{6x+1+2\sqrt{3}\sqrt{3x^2+x+2}}{\sqrt{23}} \right| \\ &= \ln \left| 6x+1+2\sqrt{3}(3x^2+x+2) \right| - \ln \sqrt{23}\end{aligned}$$

Sostituendo il tutto nella (11), ed incorporando la costante $\frac{23}{24\sqrt{3}} \ln \sqrt{23}$ nella costante di integrazione:

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{1}{12} (6x+1) \sqrt{3x^2+x+2} + \frac{23}{24\sqrt{3}} \ln \left| 6x+1+2\sqrt{3}\sqrt{3x^2+x+2} \right| + C \\ &= \frac{1}{72} \left[(6x+1) \sqrt{3x^2+x+2} + 2\sqrt{3} \ln \left| 6x+1+2\sqrt{3}\sqrt{3x^2+x+2} \right| \right] + C\end{aligned}$$

Esercizio 723

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{25x^2+4x+7} dx$$

Soluzione

Sia:

$$F(x) = \int \sqrt{25x^2+4x+7} dx \quad (13)$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned}25x^2+4x+7 &= 25(x+k)^2+l = 25x^2+50kx+25k^2+l \\ \implies \begin{cases} 50k=4 \\ l+25k^2=7 \end{cases} &\implies \begin{cases} k=\frac{2}{25} \\ l=\frac{171}{25} \end{cases},\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}25x^2+4x+7 &= 25 \left(x + \frac{2}{25} \right)^2 + \frac{171}{25} \\ \implies \sqrt{25x^2+4x+7} &= \frac{\sqrt{171}}{5} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{25x+2}{\sqrt{171}} \right)^2}\end{aligned}$$

Quindi:

$$F(x) = \frac{\sqrt{171}}{5} \int \sqrt{1 + \left(\frac{25x+2}{\sqrt{171}} \right)^2} dx \quad (14)$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \frac{25x + 2}{\sqrt{171}} \implies dx = \frac{\sqrt{171}}{25} dt,$$

cosicché l'integrale (14) diventa:

$$F(t) = \frac{171}{25 \cdot 5} \int \sqrt{1+t^2} dt \quad (15)$$

Calcoliamo $\int \sqrt{1+t^2} dt$ per parti:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+t^2} dt &= t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2} dt - \ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right|, \end{aligned} \quad (16)$$

giacchè:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| + C$$

Osserviamo che la (16) può essere risolta rispetto a $\int \sqrt{1+t^2} dt$, ottenendo:

$$\int \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1+t^2} + \ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| \right) + C$$

Ripristiniamo la variabile x :

$$\begin{aligned} 1+t^2 &= 1 + \frac{625x^2 + 100x + 175}{171} \\ &= \frac{25}{171} (25x^2 + 4x + 7) \\ \implies \sqrt{1+t^2} &= \frac{5}{171} (25x+2) \sqrt{25x^2 + 4x + 7} \\ \implies t\sqrt{1+t^2} &= \frac{5}{171} (25x+2) \sqrt{25x^2 + 4x + 7} \end{aligned}$$

Passiamo al logaritmo:

$$\ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| = \ln \left| 25x + 2 + 5\sqrt{25x^2 + 4x + 7} \right| - \ln \sqrt{171}$$

Sostituendo il tutto nella (15), ed incorporando la costante $-\frac{171}{50\sqrt{25}} \ln \sqrt{171}$ nella costante di integrazione:

$$F(x) = 250 \left[5(25x+2) \sqrt{25x^2 + 4x + 7} + 171 \ln \left| 25x + 2 + 5\sqrt{25x^2 + 4x + 7} \right| \right] + C$$

Esercizio 724

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{-x^2 - 2x + 1} dx$$

Soluzione

Sia:

$$F(x) = \int \sqrt{-x^2 - 2x + 1} dx \quad (17)$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x + 1 &= -(x^2 - 2x + 1 - 2) = -(x + 1)^2 + 2 \\ &= 2 \left[1 - \left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$F(x) = \sqrt{2} \int \sqrt{1 - \left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right)^2} dx \quad (18)$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \frac{x + 1}{\sqrt{2}} \implies dx = \sqrt{2} dt,$$

cosicché l'integrale (18) diventa:

$$F(t) = 2 \int \sqrt{1 - t^2} dt \quad (19)$$

Calcoliamo $\int \sqrt{1 - t^2} dt$ per parti:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - t^2} dt &= t\sqrt{1 - t^2} + \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - t^2}} \\ &= t\sqrt{1 - t^2} - \int \frac{1 - t^2 - 1}{\sqrt{1 - t^2}} dt \\ &= t\sqrt{1 - t^2} - \int \sqrt{1 - t^2} dt + \arcsin t, \end{aligned} \quad (20)$$

Osserviamo che questa può essere risolta rispetto a $\int \sqrt{1 - t^2} dt$, ottenendo:

$$\int \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t \right) + C$$

Ripristiniamo la variabile x :

$$\begin{aligned}1 - t^2 &= 1 - \frac{x^2 + 2x + 1}{2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 1}{2} \\ \implies t\sqrt{1 - t^2} &= \frac{x + 1}{2}\sqrt{-x^2 - 2x + 1}\end{aligned}$$

Da ciò otteniamo:

$$F(x) = \frac{x + 1}{2}\sqrt{-x^2 - 2x + 1} + \arcsin\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + C$$