Esercizio 1022

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Una grandezza[1] q cresce in funzione del tempo con una velocità proporzionale alla grandezza medesima. All'istante $t = 0$ è $q(0) = q_0$, mentre all'istante $t_1 > 0$ è $q(t_1) = q_1$. Si determini q a tutti i tempi.

***

Soluzione
Asserire che q cresce in funzione del tempo con una velocità proporzionale alla grandezza medesima, significa che:

$$\frac{dq}{dt} = kq, \tag{1}$$

essendo $k > 0$ una costante. Infatti la velocità di crescita di $q(t)$ altro non è che la sua derivata prima.
La (1) è un'equazione differenziale che si integra per separazione di variabili:

$$\frac{dq}{q} = kdt$$

Integrando ambo i membri:

$$\int \frac{dq}{q} = k \int dt \Longrightarrow \ln q = kt + C$$

Passando dai logaritmi ai numeri:

$$q(t) = e^C e^{kt}$$

La condizione iniziale è:

$$q(0) = e^C = q_0$$

Quindi:

$$q(t) = q_0 e^{kt}$$

Per conoscere la costante k, sfruttiamo l'altro dato del problema, cioè $q(t_1 > 0) = q_1$:

$$q_1 = q_0 e^{kt} \Longrightarrow k = \frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{q_1}{q_0}\right)$$

Perciò, l'espressione di $q(t)$ a tutti i tempi:

$$q(t) = q_0 \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{t/t_1}$$

[1]Potrebbe rappresentare il numero di unità di una popolazione batterica.

Esercizio 1023

Una sostanza ξ si trasforma in un'altra sostanza con una velocità proporzionale alla quantità non ancora trasformata. Sia Q l'ammontare originario. Si determini la quantità trasformata a tutti i tempi.

***

Soluzione
Indichiamo con $\eta(t)$ la sostanza trasformata al tempo t. La velocità di trasformazione è proporzionale a $Q - \eta$, per cui:

$$\frac{d\eta}{dt} = k(Q - \eta), \tag{2}$$

essendo $k > 0$ una costante.
La (2) è un'equazione differenziale che si integra per separazione di variabili:

$$\frac{d\eta}{Q - \eta} = kdt$$

Integrando ambo i membri:

$$\int \frac{d\eta}{Q - \eta} = k \int dt \Longrightarrow -\ln(Q - \eta) = kt + C$$

Passando dai logaritmi ai numeri:

$$Q - \eta(t) = e^{-C}e^{-kt},$$

da cui:

$$\eta(t) = Q - e^{-C}e^{-kt}$$

La condizione iniziale è:

$$\eta(0) = 0,$$

onde:

$$Q = e^{-C}$$

Quindi:

$$\eta(t) = Q\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Per conoscere la costante k, sfruttiamo l'altro dato del problema, cioè $q(t_1 > 0) = q_1$:

$$q_1 = q_0 e^{kt} \Longrightarrow k = \frac{1}{t_1}\ln\left(\frac{q_1}{q_0}\right)$$

Perciò, l'espressione di $q(t)$ a tutti i tempi:

$$q(t) = q_0\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{t/t_1}$$

Esercizio 1028

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Indichiamo con y il numero di individui infettati al tempo t dal virus HIV. In un modello di crescita esponenziale, la funzione $y(t)$ è un'integrale particolare dell'equazione differenziale:

$$\dot{y} = ry \tag{3}$$

Qui il punto indica la derivata rispetto al tempo: $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, mentre r è una costante positiva adimensionale. Per il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale:

$$y_0 \in (0, +\infty) \Longrightarrow \exists! y(t) =| \ \dot{y} = ry, \ y(0) = y_0$$

In altri termini, la soluzione della (3) è univocamente determinata dalla condizione iniziale:

$$y(0) = y_0, \tag{4}$$

che rappresenta il numero di individui infetti all'istante iniziale $t = 0$.
La soluzione dell'equazione (3) è la funzione esponenziale:

$$y(t) = y_0 e^{rt} \tag{5}$$

Tale modello è tuttavia irrealistico, in quanto divergente all'infinito. Per contro, è più realistico il modello rappresentato dall'equazione differenziale:

$$\dot{y} = ry(t)\left[1 - \frac{y(t)}{y_{\max}}\right] \tag{6}$$

Esaminiamo il comportamento delle soluzioni della (6):

$$\begin{aligned} y(t) \ll y_{\max} &\Longrightarrow \dot{y} \simeq ry \Longrightarrow y(t) \simeq y_0 e^{rt} \\ y(t) \simeq y_{\max} &\Longrightarrow \dot{y} \simeq 0 \Longrightarrow y(t) \simeq y_{\max} \end{aligned} \tag{7}$$

Cioè a tempi brevi[2] le soluzioni della (6) si comportano come quelle della (3), quindi abbiamo inizialmente una crescita esponenziale. A tempi lunghi invece, abbiamo un comportamento asintotico.
La (6) è un'equazione differenziale non lineare, e in essa riconosciamo l'equazione di Bernoulli. Infatti, la (6) può essere scritta nella forma:

$$\dot{y} + A(t)\,y = B(t)\,y^2 \tag{8}$$

E nel nostro caso i coefficienti sono costanti:

$$A(t) = -r, \ B(t) = -\frac{r}{y_{\max}}$$

Per integrare la (8) dividiamo primo e secondo membro per y^2:

[2] Precisamente per $t \ll r^{-1}$

$$y^{-2}\dot{y} + A(t)\,y^{-1} = B(t) \tag{9}$$

poniamo:

$$\eta = y^{-1} \tag{10}$$

per cui:

$$\dot{\eta} = -y^{-2}\dot{y}$$

Con tale posizione la (9) diventa:

$$\dot{\eta} - A(t)\,\eta = -B(t)\,, \tag{11}$$

che sappiamo integrare. L'integrale generale è infatti:

$$\eta(t) = e^{\int A(t)dt} \cdot \left[-\int B(t)\,e^{-\int A(t)dt}dt + C \right] \tag{12}$$

Ripristinando la $y = \eta^{-1}$:

$$y(t) = \frac{e^{-\int A(t)dt}}{C - \int B(t)\,e^{-\int A(t)dt}dt}$$

Risulta:

$$e^{-\int A(t)dt} = e^{rt}$$

$$\int B(t)\,e^{-\int A(t)dt}dt = -\frac{r}{y_{\max}} \int e^{rt}dt = -\frac{e^{rt}}{y_{\max}}$$

Quindi l'integrale generale è:

$$y(t) = \frac{y_{\max}}{y_{\max}Ce^{-rt} + 1} \tag{13}$$

Determiniamo il comportamento asintotico:

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_{\max}$$

Cioè proprio quello che ci si aspettava.
Determiniamo l'integrale particolare che verifica la condizione iniziale $y(0) = y_0$

$$C = \frac{1}{y_{\max}} \left(-1 + \frac{y_{\max}}{y_0} \right)$$

Finalmente:

$$y(t) = \frac{y_{\max}y_0}{y_0 + e^{-rt}\,(y_{\max} - y_0)}$$

In figura (1):

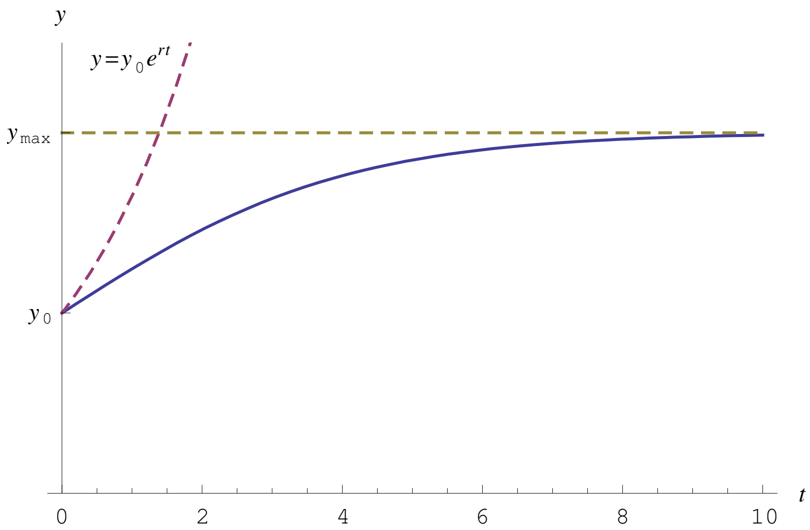

Figure 1: La curva continua è il grafico della soluzione dell'equazione differenziale (6), mentre la curva in tratteggio è la crescita esponenziale.

Dal grafico vediamo che inizialmente si ha una proliferazione esponenziale, che poi si "allontana" per tendere ad un valore di equilibrio. Questo risultato è valido per un valore assegnato di y_0. Sarebbe interessante conoscere gli andamenti al variare di y_0. Infatti, poichè il processo descritto è non lineare (tale è l'equazione (6)) ci si aspetta un comportamento caotico (caos deterministico), a differenza del processo di proliferazione descritto dall'equazione differenziale (3) che è appunto lineare.