Integrali impropri

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Per definire un integrale improprio, partiamo da alcuni esempi. Nell'es. 1131 abbiamo visto che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

non è integrabile nell'intervallo $A = [0, +\infty)$.
Infatti abbiamo le due funzioni:

$$f_{1,2}(x) = \frac{|f(x)| \pm f(x)}{2} \tag{2}$$

Quindi:

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A f_1(x)\,dx - \int_A f_2(x)\,dx \tag{3}$$

Dopodichè abbiamo introdotto i corrispondenti rettangoloidi generalizzati:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A,\ 0 \leq y \leq f_1(x)\right\} \\ U_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A,\ -f_2(x) \leq y \leq 0\right\} \end{aligned}$$

Ciò è illustrato in fig. (1).
Perciò:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{mis} U_1 - \operatorname{mis} U_2$$

e tale scrittura ha un senso se e solo se almeno uno dei due rettangoloidi ha misura finita. Abbiamo quindi dimostrato che $\operatorname{mis} U_1 = \operatorname{mis} U_2 = +\infty$, onde:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \infty - \infty,$$

da cui la non integrabilità della funzione assegnata. Però è possibile rimuovere la forma indeterminata $\infty - \infty$ con una scelta opportuna della successione $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per il calcolo del limite:

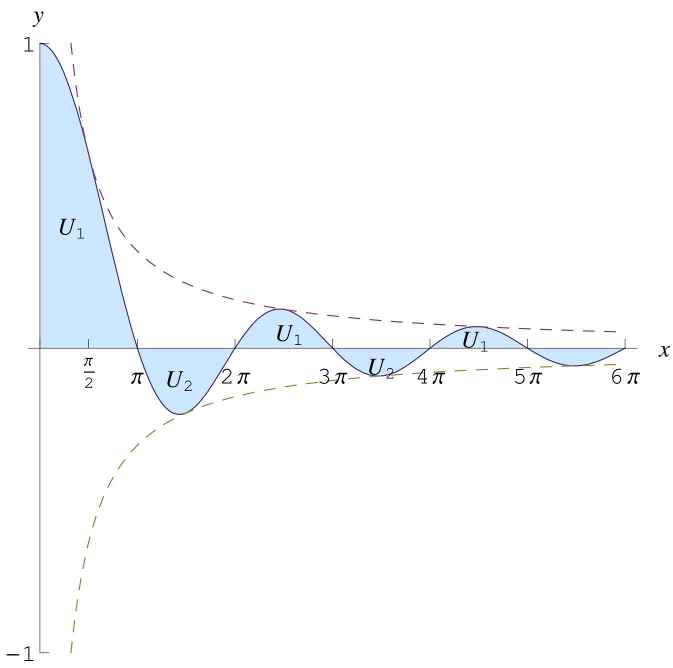

Figure 1: Andamento del grafico della funzione 1.

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int\limits_{D_n} f\left(x\right)dx$$

Nel caso in esame, assumiamo $D_n = [0, n]$, per cui:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int\limits_{0}^{n}\frac{\sin x}{x}dx$$

Poniamo:

$$I_n \stackrel{def}{=} \int\limits_{0}^{n}\frac{\sin x}{x}dx$$

Integriamo per parti:

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^n \frac{1}{x} d\left(1-\cos x\right) \\
&= \left.\frac{1-\cos x}{x}\right|_0^n + \int_0^n \frac{1-\cos x}{x^2} dx \\
&= \frac{1-\cos n}{n} - \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^n \frac{1-\cos x}{x^2} dx \\
&= \frac{1-\cos n}{n} + J_n,
\end{aligned}
$$

poiché $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$, mentre:

$$
J_n \stackrel{def}{=} \int_0^n \frac{1-\cos x}{x^2} dx
$$

Poniamo:

$$
g\left(x\right) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{array} \right. ,
$$

funzione manifestamente continua in $\mathbb{R}$. Poiché $g\left(x\right)$ ha segno costante in A, risulta ivi integrabile. Più precisamente, è sommabile:

$$
\forall x \in A, \quad \left|\frac{1-\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{2}{x^2}\right) \Longrightarrow g\left(x\right) \text{ è sommabile in } A
$$

Cioè:

$$
\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \int_0^n \frac{1-\cos x}{x^2} dx < +\infty
$$

Un calcolo diretto porge:

$$
\lim_{n\longrightarrow +\infty} \int_0^n \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}
$$

Quindi:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1-\cos n}{n}}_{=0} + \underbrace{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int\limits_0^n \frac{1-\cos x}{x^2} dx}_{=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Si conclude che assumendo la particolare successione di domini $D_n = [0, n]$, risulta $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Si osservi che tale valore è legato alla particolare scelta di D_n, nel senso che cambiando successione l'integrale potrebbe non avere senso (o convergere ad un valore diverso).

Ora consideriamo la questione dell'integrabilità della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

nell'intervallo $A = [-a, b]$, con $a, b > 0$. Tale funzione in $x_0 = 0$ è un infinito di ordine 1. Inoltre non ha segno costante in A, per cui introduciamo le funzioni 2, che in tal caso si scrivono:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, b] \\ 0, & x \in [-a, 0) \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x \in [-a, 0) \\ 0, & x \in (0, b] \end{cases}$$

Quindi:

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \int\limits_A f_1(x)\, dx - \int\limits_A f_2(x)\, dx$$

Qui è:

$$\int\limits_A f_1(x)\, dx = \int\limits_0^b \frac{dx}{x} = +\infty$$

$$\int\limits_A f_2(x)\, dx = -\int\limits_{-a}^0 \frac{dx}{x} = +\infty$$

Perciò:

$$\int_A f(x)\,dx = \infty - \infty$$

Anche in questo caso possiamo tentare di rimuovere l'indeterminazione con una scelta opportuna della successione di domini $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Precisamente, assumiamo:

$$D_n = \left[-a, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, b\right]$$

Per $n \to +\infty$, tale successione converge all'intervallo $[-a, b]$, come illustrato in fig. 2.

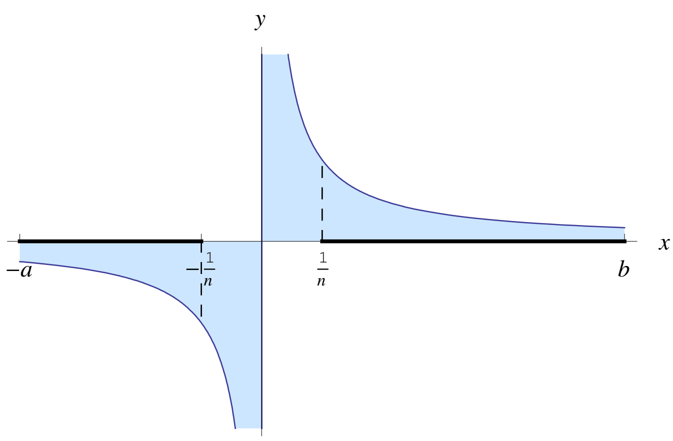

Figure 2: È evidenziato il dominio $D_n = \left[-a, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, b\right]$.

Da ciò segue:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x} &= \lim_{n\to+\infty}\int_{D_n}\frac{dx}{x} = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{-a}^{1/n}\frac{dx}{x}+\int_{1/n}^{b}\frac{dx}{x}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{n}\right)-\ln a+\ln b-\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\\ &= \ln\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

Questo particolare valore dell'integrale si chiama *parte principale di Cauchy,* o *integrale principale di Cauchy*, e si indica con il simbolo:

$$^{*}\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{-a}^{1/n}\frac{dx}{x}+\int_{1/n}^{b}\frac{dx}{x}\right)$$

Tale definizione può essere generalizzata come segue. Sia $f(x)$ una funzione non integrabile in $[a,b]$. Supponiamo che $\xi\in(a,b)$ sia una discontinuità di seconda specie tale che:

$$\lim_{x\to\xi^+}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\xi^-}f(x)=+\infty$$

Fissiamo quindi la successione di domini:

$$D_n=\left[a,\xi-\frac{1}{n}\right]\cup\left[\xi+\frac{1}{n},b\right]$$

La parte principale di Cauchy è:

$$^{*}\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{n\to+\infty}\int_{D_n}f(x)\,dx$$