Funzioni sommabili

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Criterio 1 *Sia $f(x)$ continua in $A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ è illimitato.*

$$\left.\forall x \in A \cap I(\pm\infty),\ |f(x)| \leq \frac{M}{|x|^{\alpha}} \quad (\alpha > 1)\right) \Longrightarrow (f(x) \text{ è sommabile in } A$$

$$\left.\forall x \in A \cap I(\pm\infty),\ |f(x)| \geq \frac{M}{|x|^{\alpha}},\ (\alpha \leq 1)\right) \Longrightarrow (f(x) \text{ non è sommabile in } [a,b],$$

essendo $I(\pm\infty)$ un intorno di $+\infty$ o di $-\infty$.

Dimostrazione. Poniamo $g(x) = \frac{M}{|x|^{\alpha}}$. Quindi se $\alpha > 1$, $g(x)$ è sommabile in $I(\pm\infty)$. Per un noto criterio:

$$|f(x)| \leq |g(x)| \Longrightarrow (f(x) \text{ è sommabile in } I(\pm\infty)) \underset{f \text{ è continua in } A}{\Longrightarrow} (f(x) \text{ è sommabile in } A$$

Se $\alpha \leq 1$, la funzione $g(x)$ non è sommabile in $I(\pm\infty)$

$$|g(x)| \leq |f(x)| \Longrightarrow (f(x) \text{ non è sommabile in } I(\pm\infty) \subset A) \Longrightarrow (f(x) \text{ non è sommabile in } A$$

■

Vediamo ora di tradurre il criterio appena dimostrato in termini della teoria degli infinitesimi. Abbiamo:

Criterio 2 *Sia $f(x)$ continua in $A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ è illimitato. Se per $x \to \pm\infty$, $f(x)$ è infinitesima di ordine α (rispetto all'infinitesimo di riferimento $g(x) = \frac{1}{|x|}$):*

$$\alpha > 1 \Longrightarrow f(x) \text{ è sommabile in } A$$
$$\alpha \leq 1 \Longrightarrow f(x) \text{ non è sommabile in } A$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità consideriamo $x \to +\infty$. Per ipotesi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{[g(x)]^{\alpha}} = l \in (0, +\infty) \Longleftrightarrow \lim_{x \to +\infty} |x|^{\alpha} |f(x)| = l$$

1. $l < +\infty \Longrightarrow \exists M > 0 \mid \forall x \in A \cap I(+\infty), |x|^{\alpha} |f(x)| \leq M \Longrightarrow |f(x)| \leq \frac{M}{|x|^{\alpha}}$, e se $\alpha > 1$, la funzione è sommabile in forza del criterio precedente

   Cioè $|f(x)| \leq \frac{M}{|x-x_0|^{\alpha}}$, e se $0 < \alpha < 1$, $f(x)$ è sommabile in $I_{\delta}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a,b]$, onde $f(x)$ è sommabile in $[a,b]$.

2. $l > 0$

   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in A,\, x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow l - \varepsilon < |x|^\alpha f(x) < l + \varepsilon$

   onde per ogni $\lambda \in (0, l)$, $x \in A$, $x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)| > \frac{\lambda}{|x - x_0|^\alpha}$ e se $\alpha \geq 1$, la funzione non è sommabile in $I(\pm\infty) \subset A \Longrightarrow f(x)$ non è sommabile in A

$\blacksquare$

Osservazione 3 *Nella parte 1 della dimostrazione abbiamo ipotizzato solo $l < +\infty$, quindi la dimostrazione continua a valere se $l = 0$. Precisamente:*

$$\left.\lim_{x \to +\infty} |x|^\alpha |f(x)| = 0, \text{ con } \alpha > 1\right) \Longrightarrow (f(x) \text{ è sommabile in } A$$

Nella parte 2 della dimostrazione abbiamo ipotizzato solo $l > 0$, quindi la dimostrazione continua a valere se $l = +\infty$. Precisamente:

$$\left.\lim_{x \to +\infty} |x|^\alpha |f(x)| = +\infty, \text{ con } a < 1\right) \Longrightarrow (f(x) \text{ non è sommabile in } A$$