Funzioni sommabili

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Negli appunti precedenti abbiamo visto che assegnata una funzione $f(x)$ generalmente continua in $A \subseteq \mathbb{R}$, e di segno arbitraio, possono presentarsi i seguenti casi:

1. $f(x)$ è integrabile;
2. $f(x)$ non è integrabile

Nel caso 1 l'integrale può essere finito o uguale a $+\infty$ o a $-\infty$. Il caso che più interessa è quello in cui l'integrale assume un valore finito. Più precisamente, la funzione generalmente continua $f(x)$ si dice *sommabile* in $A \subseteq \mathbb{R}$ se è ivi integrabile e $\left|\int_A f(x)\right| < +\infty$.

Da alcuni esempi visti in precedenza, risulta che

- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ è sommabile in $[-1, 1]$
- $\frac{1}{e^x-1}$ è integrabile in $[0, 1]$ ma non è ivi sommabile, avendosi

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} = +\infty$$

- $\frac{1}{1+x^2}$ è sommabile in $(-\infty, +\infty)$.
- $\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$ (con $\alpha > 0$) è integrabile in $[x_0 - h, x_0 + h]$. Se $\alpha < 1$ la funzione è sommabile.
- $\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$ (con $\alpha > 0$) è integrabile in $(-\infty, x_0 - h] \cup [x_0 + h, +\infty)$. Se $\alpha > 1$ la funzione è sommabile.

Ciò premesso, sussiste il teorema (di cui omettiamo la dimostrazione):

Teorema 1 *Sia $f(x)$ generalmente continua in $A \subseteq \mathbb{R}$*

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \ \textit{è sommabile} \\ \textit{in } A \end{array}\right) \Longleftrightarrow (|f(x)| \ \textit{è sommabile in } A$$

Si osservi che $|f(x)|$ è comunque integrabile in A.

Stabiliamo ora alcuni criteri sufficienti di sommabilità.

Criterio 2 *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni generalmente continue in $A \subseteq \mathbb{R}$, tali che $|f(x)| \leq |g(x)|$.*

$$\left.\begin{array}{c} g(x)\ \text{ è sommabile} \\ \text{in } A \end{array}\right) \Longrightarrow (f(x)\ \text{ è sommabile in } A$$

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ \text{ non è sommabile} \\ \text{in } A \end{array}\right) \Longrightarrow (g(x)\ \text{ non è sommabile in } A$$

Criterio 3 *Sia $f(x)$ generalmente continua in $A \subset \mathbb{R} \mid A$ è un intervallo limitato o l'unione di intervalli limitati.*

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ \text{ è limitata} \\ \text{in } A \end{array}\right) \Longrightarrow (f(x)\ \text{ è sommabile in } A$$

Criterio 4 *Sia $f(x)$ generalmente continua in $A \subseteq \mathbb{R}$*

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ \text{ è sommabile} \\ \text{in } A \end{array}\right) \Longrightarrow (\forall B \subset A,\ \ f(x)\ \text{ è sommabile in } B$$

$$\left.\begin{array}{c} \exists B \subset A \mid f(x)\ \text{ non è sommabile} \\ \text{in } B \end{array}\right) \Longrightarrow (f(x)\ \text{ non è sommabile in } A$$

Criterio 5 *Sia $f(x)$ generalmente continua in $A = [a, b]$. Inoltre $f(x)$ ha un solo punto di discontinuità $x_0 \in [a, b]$*

$$\left.\begin{array}{c} \forall x \in [a, b] - \{x_0\},\ \ |f(x)| \leq \frac{M}{|x - x_0|^{\alpha}} \\ \text{con } 0 < \alpha < 1 \end{array}\right) \Longrightarrow (f(x)\ \text{ è sommabile in } [a, b]$$

$$\left.\begin{array}{c} \forall x \in [a, b] - \{x_0\},\ \ |f(x)| \geq \frac{M}{|x - x_0|^{\alpha}} \\ \text{con } \alpha \geq 1 \end{array}\right) \Longrightarrow (f(x)\ \text{ non è sommabile in } [a, b]$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$g(x) = \frac{M}{|x - x_0|^{\alpha}} \Longrightarrow |g(x)| = g(x)$$

Senza perdita di generalità, supponiamo che il punto di discontinuità sia interno ad $[a, b]$: $x_0 \in (a, b)$. Assegnato ad arbitrio $\delta > 0$, consideriamo l'intervallo chiuso

$A_\delta(x_0) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, quindi:

$$\forall x \in A_\delta(x_0) - \{x_0\},\ |f(x)| \leq |g(x)|) \Longrightarrow \begin{array}{c} g(x) \text{ è} \\ \text{sommabile in } A \supset A_\delta(x_0) \end{array}$$

$$\Longrightarrow (f(x) \text{ è sommabile in } A_\delta(x_0),$$

e per l'arbitrarietà di δ, segue che f è sommabile in A.
In maniera simile si dimostra l'altra implicazione. ■