Integrali generalizzati

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

La nozione ordinaria di integrale definito contempla l'integrale di una funzione continua esteso ad intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Ci si può chiedere se tale nozione possa essere estesa al caso di una funzione che abbia punti di discontinuità e/o che sia definita in un intervallo illimitato. Sotto opportune ipotesi, la risposta è affermativa. Per rendere operativa tale estensione della nozione di integrale, ricordiamo la seguente

Definizione. Una funzione reale di variabile reale $f(x)$ definita in un intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice ***generalmente continua***, se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è al più numerabile. Ciò implica che in ogni intervallo limitato $A' \subseteq A$ cade al più un numero finito di punti di discontinuità.

In questa sezione ci occuperemo del caso in cui $f(x)$ è generalmente continua e non negativa nell'intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$. È facile rendersi conto che è comunque possibile costruire una successione finita di intervalli:

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]$$

tali che:

$$\begin{aligned} &[a_k, b_k] \subset A, \text{ con } k = 1, 2, ..., n \\ &[a_k, b_k] \cap [a_{k'}, b_{k'}] = \emptyset, \forall k \neq k' \\ &\forall k, \ f(x) \text{ è continua in } [a_k, b_k] \end{aligned}$$

Si osservi che tale proprietà continua a valere anche se A è illimitato. Ad esempio se $A = [a, +\infty)$, fissiamo $A' = [a, b] \subset A$ e ripetiamo il procedimento per l'intervallo A'.

Poniamo per definizione:

$$D \stackrel{def}{=} \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k] \tag{1}$$

Chiamiamo l'insieme (1) **dominio limitato e misurabile di continuità per** $f(x)$.

Osservazione. Assegnato l'intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$, esistono infiniti domini (1).

Esempio 1. Consideriamo la seguente funzione non negativa in $A = [0, 3]$:

$$\begin{aligned} &f(x) = \frac{1}{x} + (x-2)^2 \quad \text{se } x \in [0, 1) \\ &f(x) = -x^2 + 4x \quad \text{se } x \in [1, 3] \end{aligned} \tag{2}$$

L'insieme delle discontinuità di $f(x)$ è:

$$S = \{\xi_0 = 0, \xi_1 = 1\},$$

donde $f(x)$ è generalmente continua. Costruiamo gli intervalli:

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2]$$

essendo $a_1 = 0.2$, $b_1 = 0.8$, $a_2 = 1.2$, $b_2 = 3$ (figura 1).

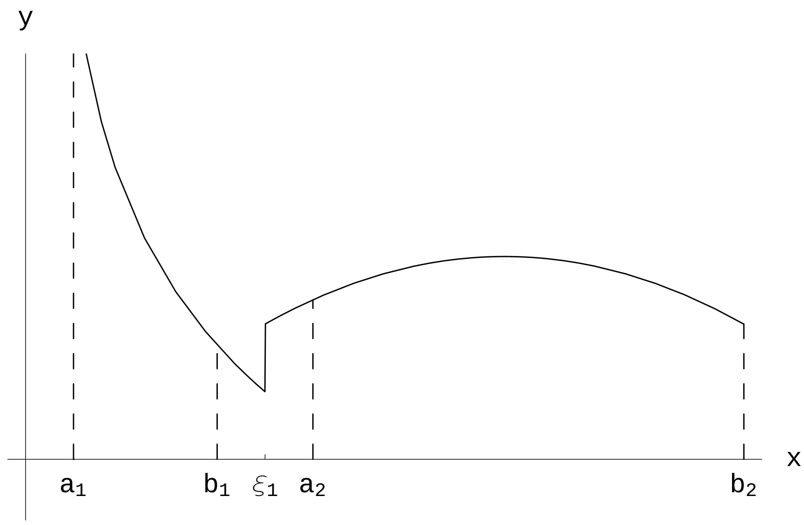


Figure 1: Grafico della funzione (2)

Si conclude che un dominio limitato di continuità per $f(x)$ è $D = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$.

***

Costruiamo quindi la famiglia:

$$\mathcal{F} = \{D \mid D \text{ è un dominio limitato e mis di continuità per } f(x)\}$$

Ciò posto, indichiamo con il simbolo:

$$\int_X f(x)\, dx$$

l'integrale di $f(x)$ esteso ad un intervallo chiuso e limitato X in cui $f(x)$ è continua. Evidentemente:

$$\forall D \in \mathcal{F}, \quad \int_D f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(x)\, dx \geq 0,$$

poiché è $f(x) \geq 0$ per ipotesi. Inoltre:

$$\forall D \in \mathcal{F}, \quad \int_D f(x)\, dx = \lambda \in \Lambda \subseteq [0, +\infty),$$

Definizione. Si chiama **integrale della funzione generalmente continua** $f(x) \geq 0$ **esteso all'intervallo** A, l'estremo superiore dell'insieme Λ:

$$\int_A f(x)\, dx = \sup \Lambda \leq +\infty \tag{3}$$

1 Rettangoloide generalizzato

La definizione (3) non si presta ad un calcolo diretto dell'integrale di una funzione generalmente continua esteso ad un intervallo limitato o illimitato. È preferibile eseguire un'operazione di passaggio al limite. Iniziamo con l'osservare che:

$$D \in \mathcal{F} \Longrightarrow \exists D' \in \mathcal{F} \mid D' \supseteq D,$$

per cui possiamo costruire una successione di domini:

$$\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid \; D_1 \subseteq D_2 \subseteq ...D_n \subseteq ... \tag{4}$$

Inoltre:

$$\forall D \in \mathcal{F}, D \subseteq A - S$$

essendo S l'insieme (numerabile) dei punti di discontinuità di $f(x)$.

Definizione. Al crescere indefinito di n, la successione (4) tende all'insieme $A-S$ se risulta:

$$\forall D \subseteq A - S, \; \exists \nu \in \mathbb{N} \mid D_\nu \supseteq D$$

Quindi:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \exists \nu \in \mathbb{N} \mid D_\nu \supseteq D_n$$

Esprimiamo ciò scrivendo:

$$\lim_{n \to +\infty} D_n = A - S$$

Teorema 2. Nelle ipotesi poste:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{D_n} f(x)\,dx = \sup\Lambda = \int_A f(x)\,dx$$

Proof. Omessa. □

Questo teorema ci dice che nelle ipotesi poste:

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{D_n} f(x)\,dx \tag{5}$$

Diamo ora un'interpretazione geometrica alla (5). A tale scopo consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$U \overset{def}{=} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in A-S,\ 0\le y\le f(x)\right\}$$

Tale insieme di punti si chiama **rettangoloide generalizzato di base** $A-S$, **relativo a** $f(x)$.
Si osservi che U è illimitato in uno dei seguenti casi: 1) A è limitato e $f(x)$ non limitata (cioè dotata di singolarità); 2) A illimitato e $f(x)$ limitata (dotata al più di punti di discontinuità eliminabili o di prima specie); 3) A e $f(x)$ non limitati. Ciò premesso, sussiste il

Teorema 3. Nelle ipotesi poste:

$$misU = \int_A f(x)\,dx$$

Proof. Omessa. □

Osserviamo che la misura di U può essere finita anche se U è illimitato, come nel caso della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{con } x\in A=[-1,1]$$

Tale funzione è generalmente continua in A:

$$S=\{-1,1\} \Longrightarrow A-S=(-1,1)$$

Più precisamente:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$

Inoltre $\forall x,\ f(x) > 0$.
Il rettangoloide generalizzato è:

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ 0 < y \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right\}$$

Costruiamo la successione $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$D_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$$

come mostrato in figura 2.

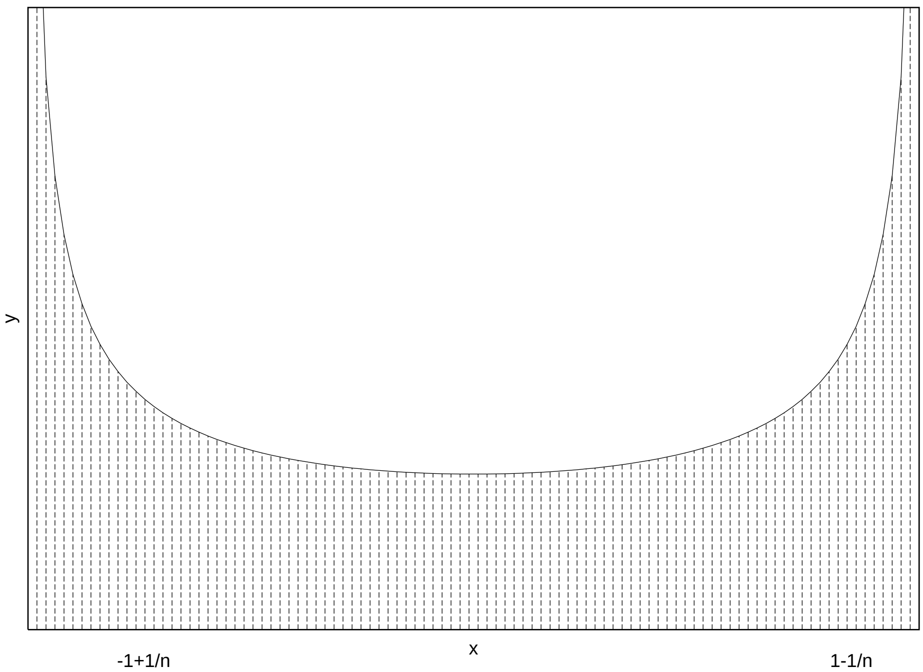


Figure 2: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} &= \lim_{n \to +\infty} \int_{-1+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \left[\arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \arcsin\left(-1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi, \end{aligned}$$

donde:

$$misU = \pi$$

Un esempio di insieme illimitato di misura infinita è dato dal rettangoloide generalizzato relativo alla seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \quad \text{con } x \in A = [0, 1]$$

$f(x)$ è positiva, inoltre:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty,$$

donde:

$$A - S = (0, 1]$$

Costruiamo la successione di domini:

$$D_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right],$$

come mostrato in figura 3.

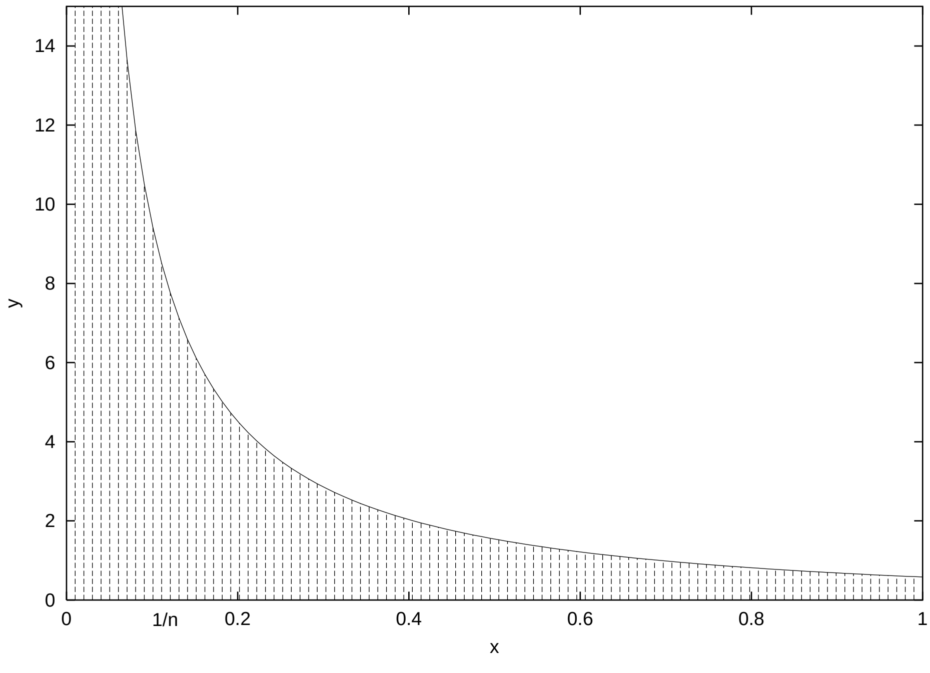


Figure 3: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$.

Evidentemente:

$$\lim_{n \to +\infty} D_n = (0, 1]$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} &= \lim_{n \to +\infty} \int_{1/n}^1 \frac{dx}{e^x - 1} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left[\ln \left| 1 - e^{-x} \right| \right]_{1/n}^1 \\
&= \ln \left| 1 - e^{-1} \right| - \ln 0^+ \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

donde:

$$misU = +\infty$$

Riportiamo di seguito un esempio di integrale di una funzione continua esteso ad un intervallo illimitato.

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{per} \quad x \in A = (-\infty, +\infty) \tag{6}$$

La funzione (6) è manifestamente continua ed infinitesima all'infinito:

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0^+$$

Costruiamo la successione (4) assumendo:

$$D_n = [-n, n]$$

come mostrato in fig. 1.
donde:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} &= \lim_{n \to +\infty} \int_{-n}^{n} \frac{dx}{1 + x^2} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left[\arctan(n) - \arctan(-n) \right] \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi
\end{aligned}$$

Quindi anche in questo caso abbiamo un insieme illimitato di misura finita:

$$\begin{aligned}
U &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < +\infty, \;\; 0 \leq y \leq f(x) \right\} \\
misU &= \pi
\end{aligned}$$

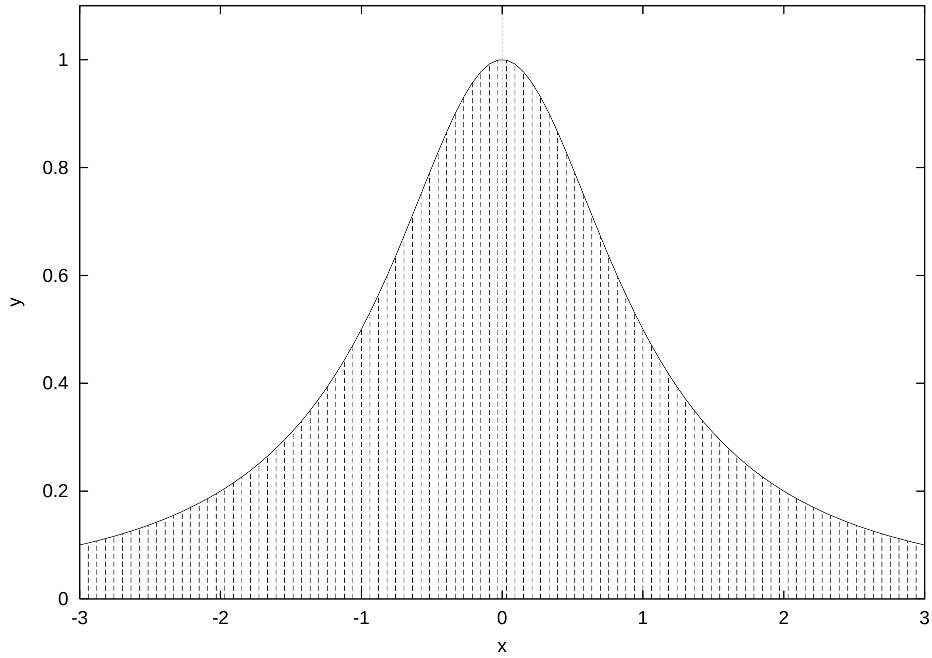


Figure 4: Grafico della funzione $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}$.

***

Calcoliamo l'integrale:

$$I=\int_{x_0-h}^{x_0+h}f\left(x\right)dx,$$

essendo:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\left|x-x_0\right|^{\alpha}} \tag{7}$$

Qui è $A=\left[x_0-h,x_0+h\right]$, essendo per ipotesi $x_0\in\mathbb{R}$, e $h,\alpha>0$. L'integrando ha una singolarità in x_0:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\left|x-x_0\right|^{\alpha}}=+\infty,$$

donde $A-S=A-\{x_0\}$.
Costruiamo la successione (4) assumendo:

$$D_n=\left[x_0-h,x_0-\frac{1}{n}\right]\cup\left[x_0+\frac{1}{n},x_0+h\right]$$

come mostrato in fig. 5.

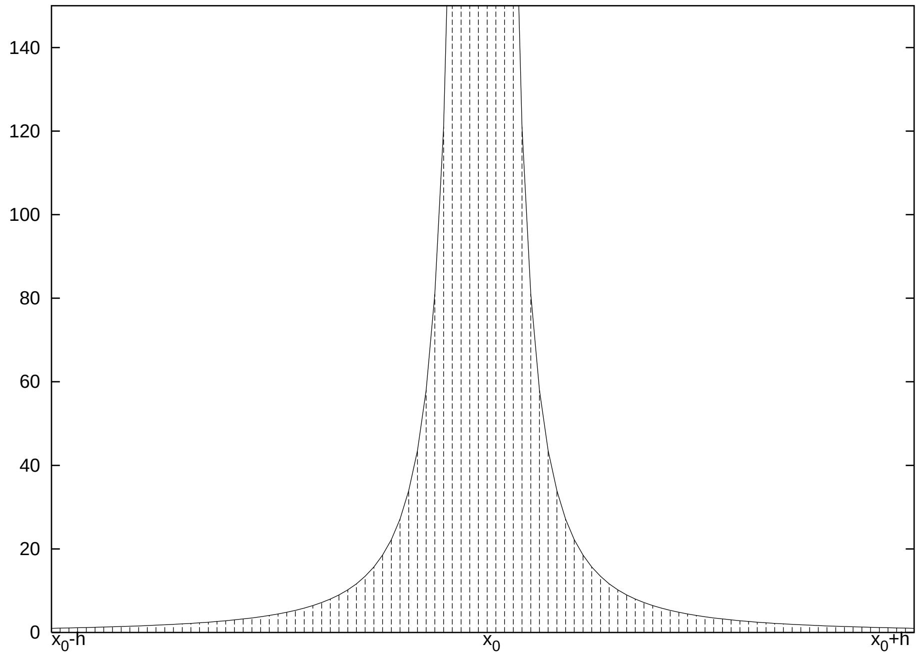


Figure 5: Grafico della funzione $f\left(x\right)=\frac{1}{\left|x-x_0\right|^{\alpha}}$.

Quindi:

$$I=\lim_{n\to+\infty}\left(\int\limits_{x_0-h}^{x_0-\frac{1}{n}}\frac{dx}{\left|x-x_0\right|^{\alpha}}+\int\limits_{x_0+\frac{1}{n}}^{x_0+h}\frac{dx}{\left|x-x_0\right|^{\alpha}}\right)\tag{8}$$

Poniamo:

$$I_1=\int\limits_{x_0-h}^{x_0-\frac{1}{n}}\frac{dx}{\left|x-x_0\right|^{\alpha}}$$

$$I_2=\int\limits_{x_0+\frac{1}{n}}^{x_0+h}\frac{dx}{\left|x-x_0\right|^{\alpha}}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x\to\xi=x-x_0$:

$$I_1 = -\int_{-h}^{-\frac{1}{n}} \frac{d\xi}{\xi^\alpha}$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{n}}^{h} \frac{d\xi}{\xi^\alpha}$$

In virtù della simmetria di $\Gamma)y = f(\xi)$ rispetto all'asse delle ordinate: $I_1 = I_2$, per cui:

$$I = 2 \lim_{n \to +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{h} \frac{d\xi}{\xi^\alpha}$$

Se $\alpha \neq 1$:

$$I = \frac{2}{1-\alpha}\left(\frac{1}{h^{\alpha-1}} - 0\right) = \frac{2h^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ se } \alpha \in (0,1)$$
$$I = -\frac{2}{\alpha-1}\left(\frac{1}{h^{\alpha-1}} - (+\infty)\right) = +\infty, \text{ se } \alpha \in (1,+\infty)$$

Se $\alpha = 1$

$$I = 2 \lim_{n \to +\infty} \ln(nh) = +\infty$$

Cioè:

$$I = \begin{cases} \frac{2h^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{se } \alpha \in (0,1) \\ +\infty, & \text{se } \alpha \in [1,+\infty) \end{cases}$$

In fig. 6 sono riportati i grafici della funzione (7) per $x_0 = 5$, $h = 2$, nei due casi: $a = 0.4, 2$.
Per quanto visto l'integrale (8) converge solo per $\alpha \in (0,1)$:

$$\lim_{\alpha \to 1^-} I(\alpha) = +\infty$$

In fig. 7 è riportato l'andamento di I in funzione del parametro α.

***

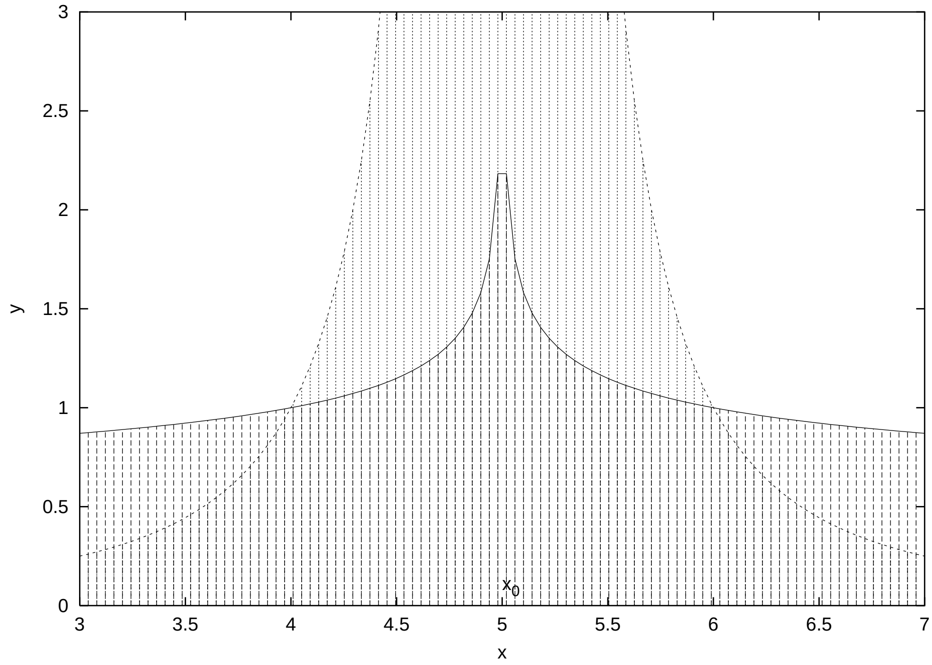


Figure 6: Grafico della funzione (7).

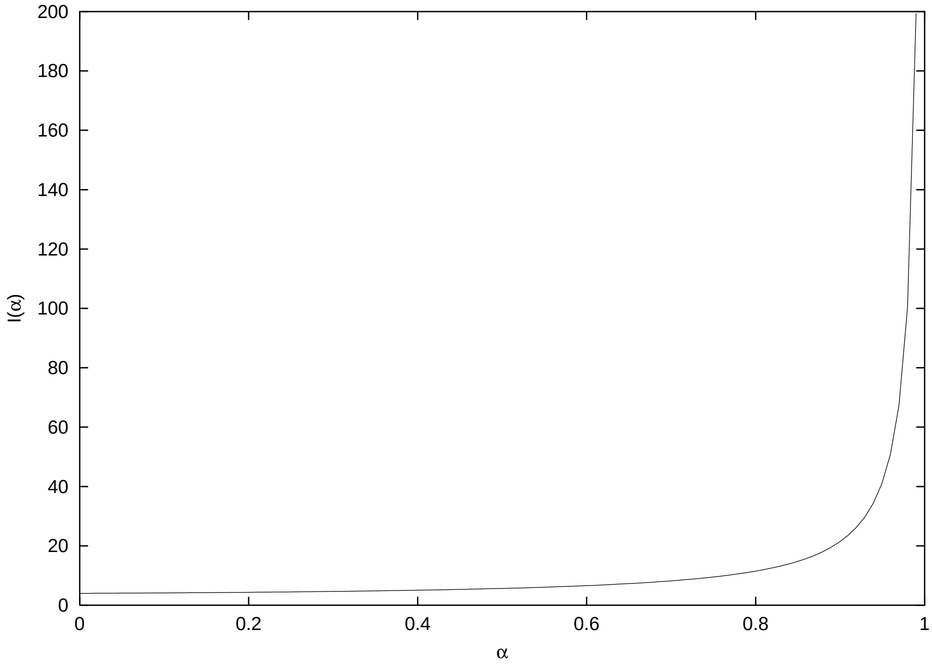


Figure 7: Andamento dell'integrale I in funzione di α.

Calcoliamo gli integrali:

$$I = \int_{x_0+h}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{9}$$
$$J = \int_{-\infty}^{x_0-h} g(x)\,dx,$$

essendo

$$f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} \tag{10}$$
$$g(x) = \frac{1}{(x_0-x)^\alpha}$$

Nella (10) x_0 è un punto arbitrario dell'asse x, mentre α, h parametri positivi. Il grafico è riportato in fig. (8).

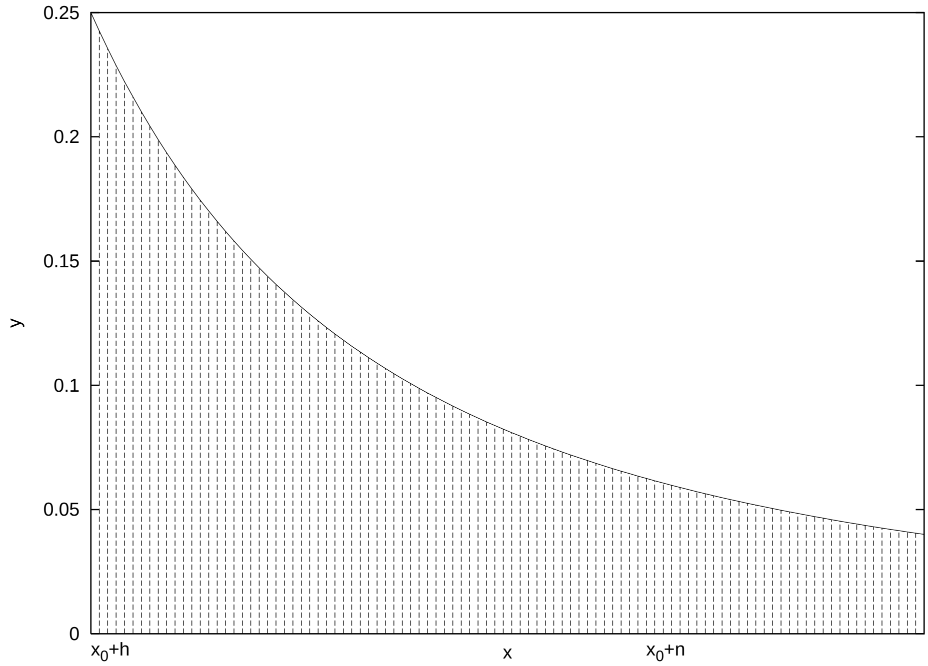


Figure 8: Grafico della funzione (10).

Costruiamo i domini D_n:

$$D_n = [x_0+h, x_0+n]$$

Quindi:

$$I = \lim_{n\to+\infty} I_n,$$

essendo:

$$I_n = \int\limits_{x_0+h}^{x_0+n} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha}$$

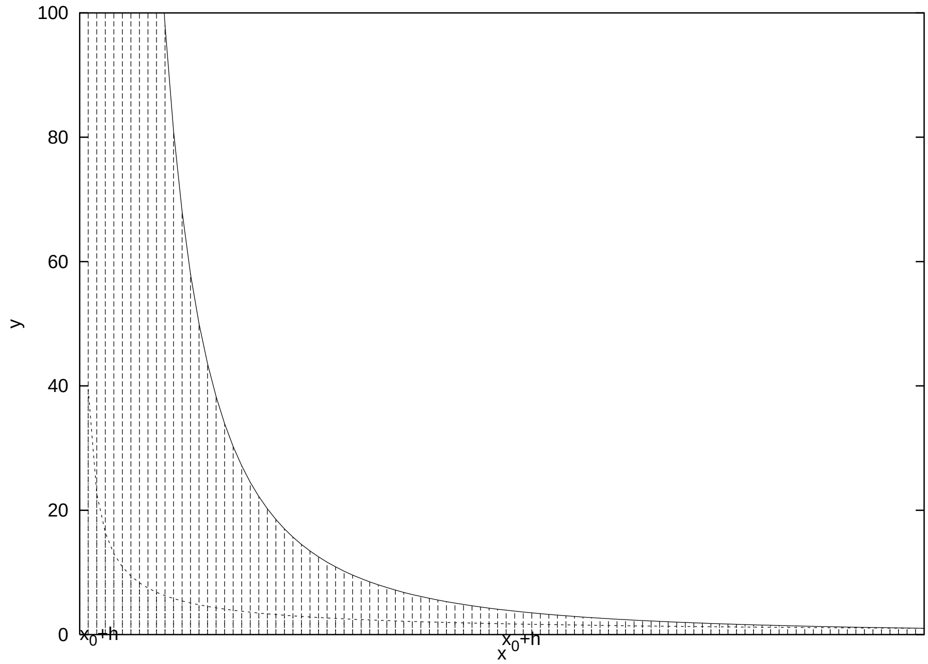
Risulta:

$$I_n = \frac{n^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ se } \alpha \neq 1$$
$$I_n = \ln\frac{n}{h}, \text{ se } \alpha = 1$$

Quindi:

$$I(\alpha \neq 1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{h^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$
$$I(\alpha = 1) = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{n}{h} = +\infty$$

Si conclude che l'integrale converge solo per $\alpha > 1$.



L'integrale J (secondo degli integrali (9)) assume lo stesso valore di I, in virtù della simmetria dell'integrando. Infatti possiamo scrivere:

$$I = \int_{x_0+h}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$J = \int_{-\infty}^{x_0-h} f(x)\, dx,$$

avendo ridefinito la funzione integranda:

$$f(x) = \frac{1}{|x - x_0|^\alpha}$$

Tale funzione è manifestamente simmetrica rispetto alla retta $x - x_0 = 0$, per cui:

$$I = \int_{h}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^\alpha}$$

$$J = -\int_{-\infty}^{-h} \frac{d\xi}{\xi^\alpha}$$