Esercizio 850

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$\int \sin^8 x \cos^5 x dx \tag{1}$$

***

Soluzione
L'integrale proposto è del tipo:

$$\int (\sin x)^m (\cos x)^n \, dx, \qquad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}$$

Il caso più semplice è quello in cui uno dei due interi realitivi m, n è positivo dispari, che è proprio il caso dell'integrale proposto. Infatti scriviamo:

$$\begin{aligned} \int \sin^8 x \cos^5 x dx &= \int \sin^8 x \underbrace{\cos^4 x}_{=\left(1-\sin^2 x\right)^2} d(\sin x) \\ &= \int \sin^8 x \left(1 - \sin^2 x\right)^2 d(\sin x) \end{aligned}$$

Poniamo:

$$t = \sin x$$

Segue:

$$\begin{aligned} \int \sin^8 x \left(1 - \sin^2 x\right)^2 d(\sin x) &= \int t^8 \left(1 - t^2\right)^2 dt \\ &= \int t^8 dt - 2 \int t^{10} dt + \int t^{12} dt \\ &= \frac{1}{9} t^9 - \frac{2}{11} t^{11} + \frac{1}{13} t^{13} + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \sin^8 x \cos^5 x dx = \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{2}{11} \sin^{11} x + \frac{1}{13} \sin^{13} x + C$$

Esercizio 851

Calcolare l'integrale

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx \tag{2}$$

***

Soluzione
L'integrale proposto è del tipo già visto nell'esercizio 850, cioè:

$$\int (\sin x)^m (\cos x)^n \, dx, \qquad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}$$

Qui gli esponenti m, n sono entrambi interi positivi pari. In questo caso si cerca di utilizzare le formule:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ \sin x \cos x &= \frac{\sin 2x}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin^2 x dx &= \int \underbrace{(\sin x \cos x)^2}_{=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx \\ &= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x d(2x) \end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale poniamo $t = 2x$:

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 t dt$$

L'integrale $\int \sin^2 t dt$ si calcola per parti o utilizzando la prima delle (3):

$$\begin{aligned} \int \sin^2 t dt &= \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2t) \, dt \\ &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin^2 x dx &= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C \end{aligned}$$

Esercizio 852

Calcolare gli integrali:

$$\int \cos^3 x dx$$

$$\int \sin^5 x dx$$

***

Soluzione

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx \\
&= \int \left(1 - \sin^2 x\right) d(\sin x) \\
&= \int d(\sin x) - \int \sin^2 x d(\sin x) \\
&= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x dx &= \int \sin^4 x \sin x dx \\
&= -\int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 d(\cos x) \\
&= -\left[\int d(\cos x) - 2\int \cos^2 x d(\cos x) + \int \cos^4 x d(\cos x)\right] \\
&= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C
\end{aligned}$$

Esercizio 853

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

***

Soluzione

Fissiamo la nostra attenzione sull'esponente dispari cioè su $\cos^3 x$ potendo scrivere questo termine come $\cos^2 x \cdot \cos x$, in modo che il $\cos x dx = d(\sin x)$ e $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} d(\sin x) \\
&= \int \left(\sin^2 x - \sin^4 x\right) d(\sin x) \\
&= \int \sin^2 x d(\sin x) - \int \sin^4 x d(\sin x) \\
&= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 854

Calcolare l'integrale:

$$
\int \sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx \tag{4}
$$

***

Soluzione
Avendo esponenti dispari, l'integrale si calcola agevolmente "giocando" sugli esponenti. Tuttavia, in questo caso essendoci $x/2$ come argomento delle funzioni trigonometriche, è conveniente eseguire il cambio di variabile $t = \frac{x}{2}$, per cui l'integrale si scrive:

$$
\int \sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\int \sin^3 t \cos^5 t dt \tag{5}
$$

Fissiamo la nostra attenzione su $\sin^3 t$ potendo scrivere questo termine come $\sin^2 t \cdot \sin t$, in modo che il $\sin t dt = -d(\cos t)$ e $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$
\begin{aligned}
\int \sin^3 t \cos^5 t dt &= -\int \sin^2 t \cos^5 t d(\cos t) \\
&= \int \left(\cos^2 t - 1\right)\cos^5 t d(\cos t) \\
&= \int \left(\cos^7 t - \cos^5 t\right) d(\cos t) \\
&= \frac{1}{8}\cos^8 t - \frac{1}{6}\cos^6 t + C
\end{aligned}
$$

Sostituendo nella (5) e ripristinando la variabile x

$$
\int \sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2} + C
$$

Esercizio 855

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx \tag{6}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} d(\sin x) \\ &= \int \frac{\left(1 - \sin^2 x\right)^2}{\sin^3 x} d(\sin x)\end{aligned}$$

Ponendo $t = \sin x$ l'integrale diventa:

$$\int \frac{\left(t^2 - 1\right)^2}{t^3} dt,$$

che è l'integrale di una funzione razionale irregolare, per cui eseguiamo la divisione tra il polinomio a numeratore e il polinomio a denominatore, ottenendo:

$$\frac{\left(t^2 - 1\right)^2}{t^3} = t - \frac{2t^2 - 1}{t^3}$$

Integrando per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \frac{\left(t^2 - 1\right)^2}{t^3} dt &= \frac{1}{2}t^2 - \int \frac{2t^2 - 1}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{2}t^2 - 2\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^3} \\ &= \frac{1}{2}t^2 - 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2} + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx = \frac{1}{2}\sin^2 x - 2\ln|\sin x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

Esercizio 856

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin^4 x dx \tag{7}$$

***

Soluzione
Tenendo conto della nota relazione trigonometrica:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right),$$

l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4}\int \left(1 - \cos 2x\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\int dx - 2\int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \int \cos^2 2x dx\right),
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte $\int \cos^2 2x dx$, ponendo $t = 2x$ e tenendo conto della relazione trigonometrica:

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2t\right)$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 2x dx &= \frac{1}{2}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int \left(1 + \cos 2t\right) dt \\
&= \frac{t}{4} + \frac{1}{8}\sin 2t \\
&= \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C
\end{aligned}$$

Esercizio 857

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \tag{8}$$

***

Soluzione
Tenendo conto della nota relazione trigonometrica:

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2},$$

l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx \\ &\underset{t=2x}{=} \frac{1}{8} \int \sin^2 t dt, \end{aligned} \tag{9}$$

Per calcolare $\int \sin^2 t dt$ ricordiamo che

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} \left(t - \cos 2t \right),$$

quindi:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 t dt &= \frac{1}{2} \int \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) dt \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \end{aligned}$$

Sostituendo in (9) e ripristinando la variabile x

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C \\ &= \frac{1}{32} \left(4x - \sin 4x \right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 858

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \tag{10}$$

***

Soluzione
Anziché utilizzare subito le formule trigonometriche, riscriviamo l'integrale nella forma:

$$\int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx,$$

quindi utilizziamo le seguenti formule:

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

sostituendo:

$$\begin{aligned}
\int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx &= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x (1+\cos 2x) dx \qquad (11)\\
&= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos^2 2x\right)(1+\cos 2x) dx\\
&= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x\right) dx\\
&= \frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x-\int \cos^2 2x dx-\int \cos^3 2x dx\right)
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte $\int \cos^2 2x dx$, $\int \cos^3 2x dx$

$$\begin{aligned}
&\int \cos^2 2x dx \underset{t=2x}{=} \frac{1}{2}\int \cos^2 t dt \qquad (12)\\
&= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2t) dt\\
&= \frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\\
&= \frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int \cos^3 2x dx \underset{t=2x}{=} \frac{1}{2}\int \cos^3 t dt \qquad (13)\\
&= \frac{1}{2}\int \left(1-\sin^2 t\right) d(\sin t)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)
\end{aligned}$$

Sostituendo i risultati (12)-(13) nella (11):

$$\begin{aligned}
&\int \sin^2 x \cos^4 x dx\\
&= \frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}-\frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)\right]+C
\end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C \\ &= \frac{1}{192}\left(12x - 3\sin 4x + \sin^3 2x\right) + C\end{aligned}$$

Esercizio 859

Calcolare l'integrale:

$$\int \cos^6 3x dx \tag{14}$$

***

Soluzione
Eseguiamo innanzitutto il cambio di variabile

$$t = 3x, \tag{15}$$

per cui:

$$\int \cos^6 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos^6 t dt \tag{16}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \Longrightarrow \cos^6 t &= \frac{1}{8}(1+\cos 2t) \\ &= \frac{1}{8}\left(1 + 3\cos 2t + 3\cos^2 2t + \cos^3 2t\right)\end{aligned}$$

In tal modo l'integrale diventa

$$\int \cos^6 3x dx = \frac{1}{24}\left(t + \frac{3}{2}\sin 2t + 3\int \cos^2 2t dt + \int \cos^3 2t dt\right) \tag{17}$$

Calcoliamo a parte $\int \cos^2 2t dt, \int \cos^3 2t dt$. Per il primo integrale sappiamo già (v. esercizi precedenti) che:

$$\int \cos^2 y dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\sin 2y$$

Quindi

$$\int \cos^2 2t dt = \frac{1}{2}\int \cos^2 y dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y\right) \underset{y=2t}{=} \frac{t}{2} + \frac{1}{8}\sin 4t \tag{18}$$

Il secondo integrale:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 2t dt &\underset{t=2y}{=} \frac{1}{2}\int \cos^3 y dy \\ &= \frac{1}{2}\int \left(1-\sin^2 y\right) d\left(\sin y\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin y - \frac{1}{6}\sin^3 y \\ &= \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{6}\sin^3 2t\end{aligned} \tag{19}$$

Sostituendo i risultati (18)-(19) nella (17):

$$\begin{aligned}&\int \cos^6 3x dx \\ &= \frac{1}{24}\left(\frac{5}{2}t + 2\sin t + \frac{3}{8}\sin 4t - \frac{1}{6}\sin^3 2t + C\right)\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x attraverso la (15)

$$\begin{aligned}\int \cos^6 3x dx &= \frac{5}{16}x + \frac{\sin 6x}{12} + \frac{\sin 12x}{64} - \frac{\sin^3 6x}{144} + C \\ &= \frac{1}{576}\left(180x + 48\sin 6x + 9\sin 12x - 4\sin^3 6x\right) + C\end{aligned}$$

Esercizio 860

Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{\sin^4 x} \\ &\int \frac{dx}{\cos^6 x}\end{aligned} \tag{20}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota relazione trigonometrica:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x,$$

per cui:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^4 x} &= \int \left(1+\cot^2 x\right) \underbrace{\frac{dx}{\sin^2 x}}_{=-d(\cot x)} \\ &= -\int \left(1+\cot^2 x\right) d\left(\cot x\right) \\ &= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C\end{aligned}$$

In maniera simile si calcola il secondo integrale, tenendo conto della relazione:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^6 x} &= \int \left(1 + \tan^2 x\right) \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)} \\
&= \int \left(1 + \tan^2 x\right) d\left(\tan x\right) \\
&= \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C
\end{aligned}$$

Esercizio 861

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx \tag{21}$$

***

Soluzione
Procediamo per decomposizione:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^6 x} - \int \frac{dx}{\sin^4 x}$$

Abbiamo già calcolato l'integrale $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ nell'esercizio n. 860, risultando (omettiamo la costante di integrazione):

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x$$

Quindi calcoliamo $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$, utilizzando la relazione:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x,$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^6 x} &= \int \left(1 + \cot^2 x\right)^2 \underbrace{\frac{dx}{\sin^2 x}}_{=-d(\cot x)} \\
&= -\int \left(1 + \cot^2 x\right)^2 d\left(\cot x\right) \\
&= -\left[\int d\left(\cot x\right) + 2\int \cot^2 x d\left(\cot x\right) + \int \cot^4 x d\left(\cot x\right)\right] \\
&= -\cot x - \frac{2}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x
\end{aligned}$$

Si conclude che:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx = -\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + C$$

Esercizio 862

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} \tag{22}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota relazione:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{1}{\cot^2 x} = \frac{\cot^2 x + 1}{\cot^2 x}$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = -\int \frac{\left(\cot^2 x + 1\right)^2}{\cot^2 x} d\left(\cot x\right) \tag{23}$$

Poniamo $t = \cot x$

$$\begin{aligned}\int \frac{\left(\cot^2 x + 1\right)^2}{\cot^2 x} d\left(\cot x\right) &= \int \frac{\left(t^2 + 1\right)^2}{t^4} dt \\ &= \int \left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) dt \\ &= t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3}\end{aligned} \tag{24}$$

Ripristinando la variabile x e ricordando il segno $-$ a secondo membro della (23):

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} &= -\cot x + \frac{2}{\cot x} + \frac{1}{3\cot^3 x} + C \\ &= 2\tan x - \cot x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C\end{aligned}$$

Esercizio 863

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} \tag{25}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$F(x) = \int \frac{1}{\sin^5 x \cos x} \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^3 x} &= \left(1+\tan^2 x\right)^{3/2} \\ \frac{1}{\sin^5 x} &= \frac{\left(1+\tan^2 x\right)^{5/2}}{\tan^5 x} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} = \int \frac{\left(1+\tan^2 x\right)^3}{\tan^5 x} d(\tan x)$$

Poniamo $t = \tan x$

$$\begin{aligned} \int \frac{\left(1+\tan^2 x\right)^3}{\tan^5 x} d(\tan x) &= \int \frac{\left(t^2+1\right)^3}{t^5} dt \\ &= \int \left(t + \frac{3}{t} + \frac{3}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}t^2 + 3\ln|t| - \frac{3}{2t^2} - \frac{1}{4t^2} + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} = \frac{1}{2}\tan^2 x + 3\ln|\tan x| - \frac{3}{2}\cot^2 x - \frac{1}{4}\cot^4 x + C$$

Esercizio 864

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} \tag{26}$$

***

Soluzione
In tutti gli integrali del tipo $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ conviene utilizzare la nota relazione $\sin x = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, quindi:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\sin^3 \frac{x}{2}\cos^3 \frac{x}{2}} \stackrel{def}{=} F(x)$$

Poniamo $y = \frac{x}{2}$

$$F(y) = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sin^3 y \cos y} \underbrace{\frac{dy}{\cos^2 y}}_{=d(\tan y)}$$

Utilizziamo le formule:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin y} &= \left(1 + \frac{1}{\tan^2 y}\right)^{1/2} \Longrightarrow \frac{1}{\sin^3 y} = \frac{\left(1 + \tan^2 y\right)^{3/2}}{\tan^3 y} \\ \frac{1}{\cos y} &= \left(1 + \tan^2 y\right)^{1/2} \end{aligned}$$

perciò:

$$F(y) = \frac{1}{4} \int \frac{\left(1 + \tan^2 y\right)^2}{\tan^3 y} d(\tan y)$$

A questo punto eseguiamo un ulteriore cambio di variabile ponendo $t = \tan y$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{4} \int \frac{\left(t^2 + 1\right)^2}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} t^2 + 2 \ln |t| - \frac{1}{2t}\right) + C \end{aligned}$$

Qui è $t = \tan \frac{x}{2}$, per cui:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{8 \tan \frac{x}{2}} + C$$

Esercizio 865

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} \tag{27}$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \int \left(1 + \tan^2 x\right) d(\tan x) \end{aligned}$$

Poniamo:

$$t = \tan x,$$

per cui:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \left(1+t^2\right) dt \\ &= t + \frac{1}{3}t^3 + C \\ &= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C\end{aligned}$$

Esercizio 866

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x \cos x} dx, \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

***

Soluzione
Utilizziamo le formule di addizione:

$$\sin(x+\alpha) = \sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x \cos x} dx &= \int \frac{\sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha}{\sin x \cos x} dx \\ &= \cos\alpha \int \frac{dx}{\cos x} + \sin\alpha \int \frac{dx}{\sin x}\end{aligned} \tag{29}$$

Gli integrali $\int \frac{dx}{\cos x}, \int \frac{dx}{\sin x}$ sono integrali notevoli:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \\ \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|,\end{aligned} \tag{30}$$

avendo omesso la costante di integrazione. Sostituendo le (30) in (29), otteniamo il risultato dell'integrale:

$$\int \frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x \cos x} dx = \cos\alpha \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \sin\alpha \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

In particolare, per $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$\int \frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x \cos x} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right] + C$$

Esercizio 867

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \tag{31}$$

***

Soluzione
Serviamoci della nota formula:

$$\sin x = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

Quindi l'integrale diventa:

$$F(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{32} \int \frac{dx}{\sin^5 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}} \tag{32}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$y = \frac{x}{2}$$

da cui:

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{16} \int \frac{dy}{\sin^5 y \cos^5 y} \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{1}{\sin^5 y \cos^3 y} \underbrace{\frac{dy}{\cos^2 y}}_{=d(\tan y)} \end{aligned}$$

A questo punto serviamoci delle note formule trigonometriche:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^3 y} &= \left(1 + \tan^2 y\right)^{3/2} \\ \frac{1}{\sin^5 y} &= \frac{\left(1 + \tan^2 y\right)^{5/2}}{\tan^5 y} \end{aligned}$$

Quindi:

$$F(y) = \frac{1}{16} \int \frac{\left(1 + \tan^2 y\right)^4}{\tan^5 y} d(\tan y)$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $t = \tan y$

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{16} \int \frac{\left(t^2 + 1\right)^4}{t^5} dt \\ &= \frac{1}{16} \int \left(t^3 + 4t + \frac{6}{t} + \frac{4}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right) dt \\ &= \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t^2} + 6 \ln |t| + 2t^2 + 4t^4\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{4 \tan^4 \frac{x}{2}} - \frac{2}{\tan^2 \frac{x}{2}} + 6 \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + 2 \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan^4 \frac{x}{2} \right) + C \tag{33}$$

Tenendo conto delle note formule trigonometriche:

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}, \quad \cot \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \tag{34}$$

Sostituendo le (34) nelle (33) ed eseguendo le dovute semplificazioni, otteniamo:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \frac{\cos x \left(3 \cos^2 x - 5\right)}{8 \sin^4 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \tag{35}$$

Esercizio 868

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x \sin^2 x^2 dx \tag{36}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = x^2$$

Quindi:

$$xdx = \frac{1}{2} dt$$

L'integrale diventa:

$$\int x \sin^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \int \sin^2 t dt$$

Utilizziamo la seguente formula trigonometrica:

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} \left(1 - \cos 2t\right),$$

onde:

$$F(t) = \frac{1}{4} \int \left(1 - \cos 2t\right) dt = \frac{1}{4} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t\right) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int x \sin^2 x^2 dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \sin 2x^2 + C$$

Esercizio 869

Integrali del tipo

$$\int \tan^n x dx, \quad \int \cot^n x dx, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{37}$$

***

Soluzione
Per $n = 1$ l'integrazione è immediata:

$$\int \tan x dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C \tag{38}$$
$$\int \cot x dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

Per $n > 1$ utilizziamo nel caso di $\tan^n x$ la formula trigonometrica:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Longrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

Ad esempio per $n = 2$

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C \tag{39}$$

Per $n = 3$:

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x dx &= \int \tan^2 x \tan x dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \tan x dx \\ &= \int \tan x d(\tan x) - \int \tan x dx \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x - \int \tan x dx \end{aligned} \tag{40}$$

Tenendo conto della prima delle (38):

$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C \tag{41}$$

Osserviamo che tale risultato può essere riscritto come:

$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$$

Qui abbiamo usato $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, incorporando -1 nella costante di integrazione. Osserviamo che nella (41) è più elegante far comparire la $\tan x$ a secondo membro:

$$\ln|\cos x| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1+\tan^2 x}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right)$$

Quindi:

$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right) + C \tag{42}$$

Per $n = 4$:

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x \tan^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\tan^2 x dx \\ &= \int \tan^2 x d(\tan x) - \int \tan^2 x dx \\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x - \int \tan^2 x dx\end{aligned}$$

Per la (39):

$$\int \tan^4 x dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C \tag{43}$$

***

Per il calcolo di $\int \cot^n x dx$ si procede utilizzando:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Longrightarrow \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} + 1$$

Eseguendo calcoli simili a quelli per $\tan^n x$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\int \cot^2 x dx &= -\cot x - x + C \\ \int \cot^3 x dx &= -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + C \\ \int \cot^4 x dx &= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C\end{aligned} \tag{44}$$

Osserviamo che nella seconda delle (44) è più elegante far comparire la $\cot x$ in luogo del $\sin x$ nell'argomento del logaritmo:

$$\ln|\sin x| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1+\cot^2 x}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\cot^2 x\right)$$

Quindi:

$$\int \cot^3 x dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\cot^2 x\right) + C$$

Esercizio 870

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \tan^2 3x dx \tag{45}$$

***

Soluzione
Poniamo $t = 3x$:

$$\int \tan^2 3x dx = \frac{1}{3} \int \tan^2 t dt$$

Ora scriviamo:

$$\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} - 1,$$

che posta nella precedente:

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 3x dx &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt \\
&= \frac{1}{3} \left[\int d(\tan t) - \int dt \right] \\
&= \frac{1}{3} (\tan t - t) + C
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \tan^2 3x dx = \frac{1}{3} (\tan 3x - 3x) + C$$

Esercizio 871

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \left(\sum_{n=1}^{4} \tan^n \frac{x}{n} \right) dx \tag{46}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=1}^{4} \int \tan^n \frac{x}{n} dx \\
&= \underbrace{\int \tan x dx}_{=F_1(x)} + \underbrace{\int \tan^2 \frac{x}{2} dx}_{=F_2(x)} + \underbrace{\int \tan^3 \frac{x}{3} dx}_{=F_3(x)} + \underbrace{\int \tan^4 \frac{x}{4} dx}_{=F_4(x)}
\end{aligned}$$

Gli integrali $F_n(x)$ sono già stati calcolati nell'esercizio 879:

$$F_1(x) = \ln|\cos x| = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right)$$

Per $F_2(x)$ poniamo $t = x/2$:

$$F_2(t) = 2\int \tan^2 t dt = 2\tan t - 2t$$
$$\Longrightarrow F_2(x) = 2\tan\frac{x}{2} - x$$

Per $F_3(x)$ poniamo $t = x/3$:

$$F_3(t) = 3\int \tan^3 t dt = 3\left[\frac{1}{2}\tan^2 t - \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 t\right)\right]$$
$$\Longrightarrow F_2(x) = \frac{3}{2}\tan^2\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{3}\right)$$

Per $F_4(x)$ poniamo $t = x/4$:

$$F_3(t) = 4\int \tan^4 t dt = 4\left(\tan^3 t - \tan t + t\right)$$
$$\Longrightarrow F_3(x) = 4\tan^3\frac{x}{4} - 4\tan\frac{x}{4} + x$$

Quindi:

$$\int\left(\sum_{n=1}^{4}\tan^n\frac{x}{n}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right) + 2\tan\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\tan^2\frac{x}{3}$$
$$-\frac{3}{2}\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{3}\right) - 4\tan\frac{x}{4} + 4\tan^3\frac{x}{4}$$

Esercizio 872

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} \tag{47}$$

***

Soluzione
Innanzitutto poniamo $y = \frac{x}{2}$, per cui:

$$F(t) = 2\int\frac{dy}{\sin y\cos^3 y} = 2\int\frac{1}{\sin y\cos y}\underbrace{\frac{dy}{\cos^2 y}}_{=d(\tan y)} \tag{48}$$

Ora utilizziamo le formule:

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{\left(1+\tan^2 y\right)^{1/2}}{\tan^2 y}, \quad \frac{1}{\cos y} = \left(1+\tan^2 y\right)^{1/2},$$

che sostituite nella (48):

$$F(y) = 2\int \frac{1+\tan^2 y}{\tan y} d(\tan y)$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $t = \tan y$:

$$\begin{aligned} F(t) &= 2\int \frac{1+t^2}{t} dt \\ &= 2\left(\int \frac{dt}{t} + \int t dt\right) \\ &= 2\left(\ln|t| + \frac{1}{2}t^2\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} = \tan^2\frac{x}{2} + 2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Esercizio 873

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx \tag{49}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int \sin^4 x \sqrt[3]{\cos x} d(\cos x) \\ &= -\int \left(1-\cos^2 x\right)^4 (\cos x)^{1/3} d(\cos x) \end{aligned}$$

Poniamo $t = \cos x$

$$\begin{aligned} F(t) &= -\int t^{1/3}\left(1-t^2\right)^2 dt \\ &= -\int \left(t^{1/3} - 2t^{7/3} + t^{13/3}\right) dt \\ &= -\left(\frac{3}{4}t^{1/3} - \frac{3}{5}t^{10/3} + \frac{3}{16}t^{13/3}\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x} - \frac{3}{13}\sqrt[3]{\cos^{13} x} + C$$

Esercizio 874

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} \tag{50}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$F(x) = \int \frac{dx}{(\sin x)^{1/2} (\cos x)^{3/2}}$$

Ora cerchiamo di far comparire a denominatore $\cos^2 x$. Infatti possiamo scrivere

$$(\cos x)^{3/2} = (\cos x)^{-1/2} \cos^2 x$$

Perciò l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{(\sin x)^{1/2} (\cos x)^{-1/2}} \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)} \\ &= \int \sqrt{\tan x} d(\tan x) \\ &= 2\sqrt{\tan x} + C \end{aligned}$$

Esercizio 875

Scriviamo uno schema di calcolo per gli integrali del tipo:

$$\begin{aligned} &\int \sin ax \cos bx dx \\ &\int \cos ax \cos bx dx \\ &\int \sin ax \sin bx dx \end{aligned} \tag{51}$$

***

Soluzione
Si applicano le formule di Werner in modo da trasformare il prodotto nell'integrando in una somma algebrica di seni e coseni. Precisamente:

$$\begin{aligned}
\sin ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\sin (a+b) x + \sin (a-b) x] \\
\cos ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\cos (a+b) x + \cos (a-b) x] \\
\sin ax \sin bx &= \frac{1}{2} [\cos (a-b) x - \cos (a+b) x]
\end{aligned}$$

Ad esempio proviamo a calcolare

$$\begin{aligned}
\int \sin 8x \sin 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 6x - \cos 10x) \, dx \\
&= \frac{1}{12} \sin 6x - \frac{1}{20} \sin 10x
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\int \cos 4x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 9x + \cos x) \, dx \\
&= \frac{1}{18} \sin 9x + \frac{1}{2} \sin x
\end{aligned}$$

Esercizio 876

Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned}
&\int \sin 4x \cos 5x dx \\
&\int \sin 8x \sin 15x dx
\end{aligned} \tag{52}$$

***

Soluzione
Per il primo integrale applichiamo le formule:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin (a+b) x + \sin (a-b) x] ,$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\int \sin 4x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \left(\int \sin 9x - \sin x \right) dx \\
&= -\frac{1}{18} \cos 9x + \frac{1}{2} \cos x + C
\end{aligned}$$

Per il secondo integrale applichiamo le formule:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(a-b\right)x - \cos\left(a+b\right)x\right],$$

quindi:

$$\begin{aligned}\int \sin 8x \sin 15x dx &= \frac{1}{2}\int \left(\cos 7x - \cos 23x\right) dx \\ &= \frac{1}{14}\sin 7x - \frac{1}{46}\sin 23x + C\end{aligned}$$

Esercizio 877

Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned}&\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx \\ &\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2}{3}xdx\end{aligned} \tag{53}$$

***

Soluzione
Per il primo integrale applichiamo le formule:

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)x + \cos\left(a-b\right)x\right],$$

quindi:

$$\begin{aligned}\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx &= \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{5}{6}x + \cos\frac{x}{6}\right)dx \\ &= \frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x + 3\sin\frac{x}{6} + C\end{aligned}$$

Per il secondo integrale applichiamo le formule:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)x + \sin\left(a-b\right)x\right]$$

quindi:

$$\begin{aligned}\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2}{3}xdx &= \frac{1}{2}\int\left(\sin x - \sin\frac{x}{3}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\cos x + 3\cos\frac{x}{3}\right) + C \\ &= \frac{3}{2}\cos\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos x + C\end{aligned}$$

Esercizio 878

Una grandezza fisica varia nel tempo secondo la legge:

$$f(t) = A \sin \omega t \cos(\omega t + \phi), \tag{54}$$

essendo A una costante, mentre ω e ϕ sono rispettivamente la pulsazione e la fase. Si determini:

$$F(t) = \int f(t)\, dt,$$

dimostrando che $F(t)$ non è periodica, a differenza di $f(t)$.

***

Soluzione
Per calcolare $F(t)$ ci serviamo delle formule di Werner:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

Nel nostro caso: $\alpha = \omega t$, $\beta = \omega t + \phi$, donde:

$$\sin \omega t \cos(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}\left[\cos\phi - \cos(2\omega t + \phi)\right]$$

Integrando:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{A}{2}\left[\cos\phi \int dt - \int \cos(2\omega t + \phi)\, dt\right] \\ &= A\left[\frac{t}{2}\cos\phi - \frac{\sin(2\omega t + \phi)}{4\omega}\right] + C, \end{aligned} \tag{55}$$

da cui vediamo che la funzione $F(t)$ non è periodica, mentre $f(t)$ è periodica di periodo $\frac{\pi}{\omega}$. In figura 1 è riportato l'andamento di entrambe le funzioni.

Esercizio 879

Calcolare l'integrale:

$$\int \cos(\alpha x + \beta)\cos(\alpha x - \beta)\, dx \tag{56}$$

***

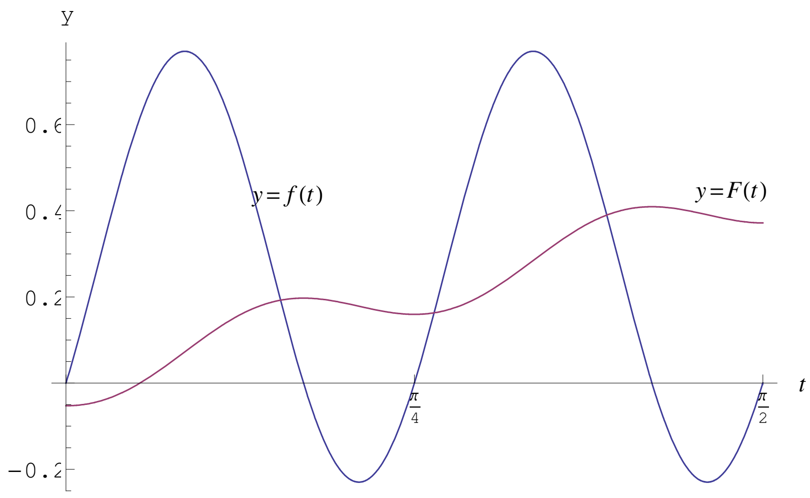

Figure 1: Diagramma cartesiano di $f(t)$ e della sua primitiva $F(t)$ corrispondente a $C = 0$.

Soluzione
Utilizziamo le formule di Werner:

$$\forall \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad \cos\varphi \cos\psi = \frac{1}{2}\left[\cos(\varphi+\psi) + \cos(\varphi-\psi)\right]$$

Poniamo: $\varphi = \alpha x + \beta$, $\psi = \alpha x - \beta$, onde:

$$\cos(\alpha x+\beta)\cos(\alpha x-\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha x) + \cos 2\beta\right]$$

Integrando:

$$\begin{aligned}
&\int \cos(\alpha x+\beta)\cos(\alpha x-\beta)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \cos(2\alpha x)\,dx + \frac{1}{2}\cos 2\beta \int dx \\
&= \frac{1}{4\alpha}\sin(2\alpha x) + \frac{x}{2}\cos 2\beta + C
\end{aligned}$$

Esercizio 880

Calcolare l'integrale:

$$\int \cos^2 x \cos 3x dx \tag{57}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \cos^2 x \cos 3x dx = \int \cos x \cos x \cos 3x dx$$

Il prodotto $\cos x \cos 3x$ può essere convertito in somma con le formule di Werner:

$$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2} \left(\cos 2x + \cos 4x \right),$$

onde:

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int \cos x \left(\cos 2x + \cos 4x \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\int \cos x \cos 2x dx + \int \cos x \cos 4x dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \int \left(\cos x + \cos 3x \right) dx + \frac{1}{2} \int \left(\cos 3x + \cos 5x \right) dx \right] \\
&= \frac{1}{4} \left(\int \cos x dx + 2 \int \cos 3x dx + \int \cos 5x dx \right) \\
&= \frac{\sin x}{4} + \frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin 5x}{20} + C
\end{aligned}$$

Esercizio 881

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx \tag{58}$$

***

Soluzione
Conviene dapprima convertire il prodotto $\sin x \sin 2x$ in una somma, tramite le formule di Werner. Otteniamo:

$$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2} \left(\cos x - \cos 3x \right),$$

per cui l'integrale diviene:

$$\begin{aligned}\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 3x) \sin 3x dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \cos x \sin 3x dx - \int \cos 3x \sin 3x dx \right)\end{aligned} \tag{59}$$

Applichiamo ora le formule di Werner all'integrando dell'integrale $\int \cos x \sin 3x dx$ a secondo membro (59):

$$\sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) \tag{60}$$

Si noti che non è necessario applicare Werner all'integrando di $\int \cos 3x \sin 3x dx$ giacché l'argomento è $3x$, donde:

$$\int \cos 3x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int \sin 6x dx = -\frac{1}{2} \cos 6x$$

Attraverso la (60) calcoliamo $\int \cos x \sin 3x dx$:

$$\begin{aligned}\int \cos x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \left(\int \sin 4x dx + \int \sin 2x dx \right) \\ &= -\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{4}\end{aligned}$$

Sostituendo i risultati ottenuti in 59

$$\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{4} + C$$

Esercizio 882

Consideriamo integrali del tipo:

$$\int \mathcal{R} (\sin x, \cos x) \, dx, \tag{61}$$

essendo $\mathcal{R}$ una funzione razionale delle variabili $\sin x$, $\cos x$. Ad esempio:

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 2} \tag{62}$$

Qui è

$$\mathcal{R} (\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x + 2 \cos x + 2}$$

***

Soluzione
Un integrale del tipo (61) si riduce all'integrale di una funzione razionale attraverso il cambio di variabile:

$$t = \tan \frac{x}{2} \tag{63}$$

Applicando note formule di trigonometria:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{64}$$

Il differenziale di x è:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{65}$$

In tal modo l'integrale (62) diventa:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 2} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2-t^2}{1+t^2} + 2} \\
&= 2\int \frac{dt}{2t + 2 - 2t^2 + 2 + 2t^2} \\
&= \int \frac{dt}{t+2} = \ln|t+2| + C
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 2} = \ln\left|2 + \tan\frac{x}{2}\right| + C \tag{66}$$

Esercizio 883

Integrazione di alcune classi di funzioni trigonometriche

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Il metodo visto nell'esercizio 832 permette di ridurre un qualunque integrale

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\, dx \tag{67}$$

nell'integrale di una funzione razionale:

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\, dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

Tale metodo è denominato **sostituzione universale di variabile.** Si osservi però che tale metodo a volte conduce ad espressioni razionali troppo complicate. Esaminiamo ora alcuni casi speciali che suggeriscono un differente cambio di variabile.

1. $\mathcal{R}(-\sin x, -\cos x) \equiv \mathcal{R}(\sin x, \cos x)$, cioè la funzione razionale $\mathcal{R}$ è pari. Ciò si verifica quando l'integrando contiene termini del tipo $\sin^n x$, $\cos^m x$ con n, m interi naturali pari. Osserviamo che in tal caso $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ si esprimono attraverso espressioni razionali di $\tan x$. Precisamente:
$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$
Poniamo quindi:
$$t = \tan x$$
Perciò:
$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$
Quindi il dx:
$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$
Consideriamo ad esempio l'integrale:
$$\int \frac{dx}{2+\sin^2 x} dx$$
Qui $\mathcal{R}(\sin x) = \sin^2 x$, è manifestamente pari, da cui:
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+\sin^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+3t^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \tan x\right) + C \end{aligned} \tag{68}$$

2. $\int \mathcal{R}(\sin x) \cos x dx$. Il cambio di variabile è $\sin x = t \Longrightarrow \cos x dx = dt$, da cui:
$$\int \mathcal{R}(\sin x) \cos x dx = \int \mathcal{R}(t)\, dt$$

3. $\int \mathcal{R}(\cos x) \sin x dx$. Il cambio di variabile è $\cos x = t \Longrightarrow \sin x dx = -dt$, da cui:
$$\int \mathcal{R}(\cos x) \sin x dx = -\int \mathcal{R}(t)\, dt$$
Ad esempio
$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx &= \int \frac{\sin^2 x \sin x}{2+\cos x} dx \\ &= \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x} \sin x dx \\ &= \int \mathcal{R}(\cos x) \sin x dx, \end{aligned}$$

perciò $\cos x = t$, da cui:

$$\begin{aligned}\int \mathcal{R}(\cos x)\sin x dx &= -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt \\ &= \int \left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt \\ &= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C \\ &= \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2|\end{aligned}$$

4. $\int \mathcal{R}(\tan x)\,dx$. Il cambio di variabile è $t = \tan x \Longrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$, per cui:

$$\int \mathcal{R}(\tan x)\,dx = \int \frac{\mathcal{R}(t)}{1+t^2}dt$$

Esercizio 884

Calcolare gli integrali:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \tag{69}$$
$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \tan\frac{x}{2} \tag{70}$$

Quindi

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{71}$$

Il differenziale di x è:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{72}$$

In tal modo il primo dei due integrali (69):

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C \\ &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\end{aligned}$$

Per il secondo integrale eseguiamo lo stesso cambio di variabile, ottenendo:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = 2\int \frac{dt}{1-t^2} + C \tag{73}$$

L'integrale a secondo membro è un integrale notevole (si calcola comunque per riduzione in frazioni semplici):

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C,$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right| + C$$

Osserviamo che l'argomento del logaritmo può essere snellito attraverso le formule di addizione per la tangente. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{\tan\frac{x}{2}+1}{1-\tan\frac{x}{2}} &= \frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{x}{2}\tan\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \\ \Longrightarrow \left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right| &= \left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| = \left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|, \end{aligned}$$

per cui:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Esercizio 885

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \tan\frac{x}{2} \tag{74}$$

Quindi

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{75}$$

Il differenziale di x è:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{76}$$

In tal modo l'integrale si scrive:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3+5\cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= 2\int \frac{dt}{3+3t^2+5-5t^2} \\
&= \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{2-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C
\end{aligned}$$

Esercizio 886

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

***

Soluzione

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \tan\frac{x}{2},$$

per cui:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = -\int \frac{dt}{t^2-2t-1} \stackrel{def}{=} F(t)$$

L'integrale a secondo membro si calcola con i metodi già visti (riduzione in frazioni semplici, oppure con il metodo degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado), ottenendo:

$$F(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right| + C$$

Cioè:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right| + C$$

Esercizio 887

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$$

***

Soluzione

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left(1 - \frac{1}{1+\cos x}\right) dx \\ &= x - G(x) + \text{const}, \end{aligned}$$

essendo:

$$G(x) = \int \frac{dx}{1+\cos x}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \tan \frac{x}{2},$$

donde:

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} 2 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int dt = t + \text{const}, \end{aligned}$$

quindi:

$$F(x) = \tan \frac{x}{2} + \text{const}$$

Esercizio 888

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx$$

***

Soluzione

$$F(x) = \int \frac{\sin x - 1 + 1}{1-\sin x} dx = -x + J(x)$$

essendo:

$$J(x) = \int \frac{dx}{1-\sin x}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \tan\frac{x}{2},$$

donde:

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \frac{1}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= 2\int \frac{dt}{(t-1)^2} = -\frac{2}{t-1} + \text{const}, \end{aligned}$$

quindi:

$$G(x) = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2} - 1} + \text{const}$$

Cosicché l'integrale vale:

$$F(x) = -x - \frac{2}{\tan\frac{x}{2} - 1} + \text{const}$$

Esercizio 889

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

Quindi:

$$F(t) = 2\int \frac{dt}{t^2 - 8t + 15}$$

L'integrale suddetto si risolve metodi noti (ad esempio, con il metodo di integrazione di funzioni contenenti un trinomio di secondo grado), ottenendo:

$$F(t) = \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C,$$

da cui:

$$F(x) = \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} - 5}{\tan\frac{x}{2} - 3}\right| + C$$

Esercizio 890

Calcolare i seguenti integrali

$$\begin{aligned} &\int \frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x} dx \\ &\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 2\cos x} dx \end{aligned} \tag{77}$$

***

Soluzione
In questi casi non conviene applicare la sostituzione universale di variabile. Infatti per il primo integrale osserviamo che:

$$d(3\sin x + 2\cos x) = (3\cos x - 2\sin x)\, dx, \tag{78}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x} dx &= \int \frac{d(3\sin x + 2\cos x)}{3\sin x + 2\cos x} \\ &= \ln|3\sin x + 2\cos x| + C \end{aligned}$$

Per il secondo integrale osserviamo che il denominatore della funzione integranda è lo stesso, per cui continua a valere la (78), in cui vediamo che differesce con il numeratore per il segno $(-)$. Ciò suggerisce di esprimere il numeratore attraverso una combinazione lineare del denominatore e della sua derivata prima:

$$2\sin x + 3\cos x = a(3\sin x + 2\cos x) + b\frac{d}{dx}(3\sin x + 2\cos x), \tag{79}$$

onde:

$$\begin{aligned} \int \frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x} dx &= a\int dx + b\int \frac{d(3\sin x + 2\cos x)}{3\sin x + 2\cos x} \\ &= ax + b\ln|3\sin x + 2\cos x| + C \end{aligned} \tag{80}$$

A questo punto dobbiamo determinare i coefficienti a, b della combinazione lineare (79):

$$\begin{aligned} 2\cos x + 3\cos x &= 3a\sin x + 2a\cos x + 3b\cos x - 2b\sin x \\ &= (3a - 2b)\sin x + (2a + 3b)\cos x, \end{aligned}$$

da cui otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 2 \\ 2a + 3b = 3 \end{cases}$$

Risolviamolo con il metodo dei determinanti:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12}{13}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{13} = \frac{5}{13}$$

Sostituendo la soluzione $(a,b) = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ nella (80):

$$\int \frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x} dx = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}\ln|3\sin x + 2\cos x| + C$$

Esercizio 891

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$$

***

Soluzione

Qui la funzione integranda è una funzione razionale pari di $\cos x$:

$$\mathcal{R}(-\cos x) \equiv \mathcal{R}(\cos x)$$

Come è noto in questi casi il cambio di variabile è $y = \tan x$. Conviene prima riscrivere l'integrale:

$$\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x} = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} + 3} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Ma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x \\ \frac{dx}{\cos^2 x} &= d(\tan x), \end{aligned}$$

donde eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \tan x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x} &= \int \frac{dy}{4 + y^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{y}{2}\right)}{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 892

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$$

***

Soluzione

Qui la funzione integranda è una funzione razionale pari di $\cos x$:

$$\mathcal{R}(-\cos x) \equiv \mathcal{R}(\cos x)$$

Come è noto in questi casi il cambio di variabile è $y = \tan x$. Conviene prima riscrivere l'integrale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} &= \int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} \\
&= \int \frac{dx}{3\tan^2 x + 5} \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \int \frac{1}{5 + 3\tan^2 x} d(\tan x),
\end{aligned}$$

Ma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x \\
\frac{dx}{\cos^2 x} &= d(\tan x),
\end{aligned}$$

quindi eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \tan x$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} &= \int \frac{dy}{5 + 3y^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{15}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{5}}y\right)}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}y\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \tan x\right) + C
\end{aligned}$$

Esercizio 893

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}$$

***

Soluzione
Conviene riscrivere l'ìntegrale:

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}\\ &= \int \frac{1}{(\tan^2 x + 3\tan x - 1)} \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)}\end{aligned}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \tan x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{dy}{y^2 + 3y - 1}$$

L'integrale a secondo membro è facilmente calcolabile: si procede per decomposizione in frazioni semplici, oppure scrivendo $y^2 + 3y - 1 = (y + k)^2 + l$, determinando k, l. Quindi otteniamo:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2\tan x + 3 - \sqrt{13}}{2\tan x + 3 + \sqrt{13}} \right| + C$$

Esercizio 894

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx$$

***

Soluzione
Questo integrale è del tipo:

$$\int \mathcal{R}(\cos x)\sin x dx,$$

per cui conviene eseguire il cambio di variabile $y = \cos x$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx &= -\int \frac{dy}{(1 - y)^3}\\ &= \int \frac{d(1 - y)}{(1 - y)^3}\\ &= -\frac{1}{2(1 - y)^2} + C\end{aligned}$$

Cioè:

$$\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx = -\frac{1}{2(1 - \cos x)^2} + C$$

Esercizio 895

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx \tag{81}$$

***

Soluzione

Eseguiamo la sostituzione universale di variabile: $t = \tan \frac{x}{2}$, per cui:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

In tal modo l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= 2\int \frac{tdt}{(t^2+1)(t+1)^2},\end{aligned}$$

che si integra per riduzione in frazioni semplici:

$$\frac{t}{(t^2+1)(t+1)^2} = \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

Anziché procedere in questo modo osserviamo che l'integrale può essere scritto come:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int \frac{1+\sin x - 1}{1+\sin x} dx &= \int \left(1 - \frac{1}{1+\sin x}\right) dx \\ &= x - \int \frac{dx}{1+\sin x}\end{aligned} \tag{82}$$

Ed è più semplice risolvere $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ con il metodo della sostituzione universale di variabile. Infatti:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \\ &= 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} \\ &= -\frac{2}{t+1} + C \\ &= -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C\end{aligned}$$

Sostituendo tale risultato nella (82):

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$$

Esercizio 896

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\cos x}{1-\sin x} dx \tag{83}$$

***

Soluzione
Eseguiamo la sostituzione universale di variabile: $t = \tan \frac{x}{2}$, per cui:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

In tal modo l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1-\sin x} dx &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= 2\int \frac{1-t^2}{t^2-2t+1} dt,\end{aligned}$$

In realtà l'integrale proposto è immediato, poichè:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1-\sin x} dx &= -\int \frac{d(1-\sin x)}{1-\sin x} \\ &= -\ln|1-\sin x| + C\end{aligned}$$

Esercizio 897

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\tan x}{1-\cos x} dx \tag{84}$$

***

Soluzione
L'integrale proposto può essere scritto come:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x(1-\cos x)} dx,$$

che è del tipo:

$$\int \mathcal{R}(\cos x) \sin x dx$$

Come abbiamo visto nell'esercizio 832, il cambio di variabile è $\cos x = t$, per cui $\sin x dx = -dt$, onde:

In realtà l'integrale proposto è immediato, poichè:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x\,(1-\cos x)}dx = -\int \frac{dt}{t\,(t-1)} \tag{85}$$

Abbiamo così ridotto l'integrale di una funzione trigonometrica all'integrale di una funzione razionale propria, per cui procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t\,(t-1)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} \\ &= \frac{(A+B)\,t - A}{t\,(t-1)}\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=-1 \end{cases} \Longrightarrow A=-1, B=1$$

Perciò:

$$\frac{1}{t\,(t-1)} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C$$

Ripristinando al variabile x e osservando che $|\cos x - 1| = 1 - \cos x$

$$\int \frac{\tan x}{1-\cos x}dx = \ln\frac{1-\cos x}{|\cos x|} + C$$

Esercizio 898

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} \tag{86}$$

***

Soluzione

Quest'integrale è del tipo di quelli calcolati negli esercizi 862 e seguenti, quindi cerchiamo di far comparire il $d\,(\tan x)$:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin x} d\,(\tan x) \tag{87}$$

Ora, da una nota formula trigonometrica:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\left(1+\tan^2 x\right)^{1/2}}{\tan x},$$

per cui:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\left(1+\tan^2 x\right)^{1/2}}{\tan x} d\,(\tan x)$$

Ponendo $t = \tan x$:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^{1/2}}{t} dt$$

Non abbiamo risolto granchè visto che abbiamo l'integrale di una funzione irrazionale. La (87) ci suggerisce di integrare per parti:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x} d(\tan x) &= \frac{\tan x}{\sin x} + \int \tan x d\left(\frac{1}{\sin x}\right) \\
&= \frac{1}{\cos x} + \int \frac{dx}{\sin x}
\end{aligned}$$

$\int \frac{dx}{\sin x}$ è un integrale notevole:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + C, \tag{88}$$

onde:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + C \tag{89}$$

Esiste un terzo metodo che consiste nel porre $\cos x = t \Longrightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} &= -\int \frac{dt}{\left(1-t^2\right) t^2} \\
&= -\int \frac{\left(1-t^2\right)+t^2}{\left(1-t^2\right) t^2} dt \\
&= -\int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right) dt \\
&= -\int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{1-t^2} \\
&= \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C \\
&= \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C
\end{aligned}$$

Per riprodurre il risultato (89) applichiamo le formule di bisezione:

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},$$

cosicchè:

$$\frac{1}{2} \ln \left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| = \frac{1}{2} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right|^2 = \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right|$$

Esercizio 899

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx \tag{90}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} F(x) &\overset{def}{=} \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx = 2\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}dx \\ &= 2\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}d(\sin x) \end{aligned}$$

Eseguendo il cambio di variabile $y = \sin x$:

$$\begin{aligned} F(y) &= 2\int \frac{ydy}{1+y^2} \\ &= \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} \\ &= \ln\left(1+y^2\right) + C \end{aligned}$$

Cioè:

$$F(x) = \ln\left(1+\sin^2 x\right) + C$$

Esercizio 900

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}dx \tag{91}$$

***

Soluzione
Ques'integrale è del tipo:

$$\int \mathcal{R}(\sin x)\cos x dx$$

Come è noto, in questo caso il cambio di variabile è $y = \sin x \Longrightarrow \cos x dx = dy$, perciò: Eseguendo il cambio di variabile $y = \sin x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}dx &= \int \frac{dy}{y^2 - 6y + 5} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-5}{y-1}\right| + C \end{aligned}$$

Da cui:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - 5}{\sin x - 1}\right| + C$$

Esercizio 901

Calcolare il seguente integrale
$$\int \frac{\tan x}{1-\sin x}dx \tag{92}$$

***

Soluzione
Anche se l'integrale non è del tipo $\int \mathcal{R}(\sin x)\cos x dx$ proviamo comunque a porre $t = \sin x \Longrightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$, per cui:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\cos x(1-\sin x)}dx &= \int \frac{tdt}{\cos^2 x(1-t)}dt \\
&= \int \frac{tdt}{(1-t^2)(1-t)} \\
&= \int \frac{tdt}{(1-t)^2(1+t)},
\end{aligned}$$

quindi si procede per decomposizione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{t}{(1-t)^2(1+t)} &= \frac{A_1}{1-t} + \frac{A_2}{(1-t)^2} + \frac{B}{1+t} \\
&= \frac{A_1(1-t)(1+t) + A_2(1+t) + B(1-t)^2}{(1-t)^2(1+t)} \\
&= \frac{(-A_1+B)t^2 + (A_2-2B)t + (A_1+A_2+B)}{(1-t)^2(1+t)}
\end{aligned}$$

Per il principio di idendità dei polinomi otteniamo il seguente sistema di Cramer:

$$\begin{cases} -A_1 + B = 0 \\ A_2 - 2B = 1 \\ A_1 + A_2 + B \end{cases},$$

La cui soluzione è

$$A_1 = -\frac{1}{4}, A_2 = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4},$$

quindi

$$\frac{t}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)^2}$$

Integrando:

$$\int \frac{t}{(1-t)^2(1+t)}dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2(t-1)} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x\,(1-\sin x)}dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + \frac{1}{2\,(1-\sin x)} + C$$

Esercizio 902

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 4\sin x - 6} \tag{93}$$

***

Soluzione
Osserviamo che:

$$\begin{aligned}\cos^2 x - 4\sin x - 6 &= 1 - \sin^2 x - 4\sin x - 6 \\ &= -\left(\sin^2 x + 4\sin x + 5\right),\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}F\left(x\right) &\stackrel{def}{=} \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 4\sin x - 6} \\ &= -\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 4\sin x + 5} = \int \mathcal{R}\left(\sin x\right)\cos x dx,\end{aligned}$$

onde il cambio di variabile è $t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dt$

$$F\left(t\right) = -\int \frac{dt}{t^2 + 4t + 5}$$

Scriviamo:

$$t^2 + 4t + 5 = t^2 + 4t + 4 + 1 = \left(t+2\right)^2 + 1,$$

quindi:

$$F\left(t\right) = -\int \frac{d\left(t+2\right)}{1 + \left(t+2\right)^2} = -\arctan\left(t+2\right) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 4\sin x - 6} = -\arctan\left(\sin x + 2\right) + C$$