Esercizio 818

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$x = t^6$$

Ciò implica:

$$dx = 6t^5 dt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} \\ &= 6 \int \frac{t^3}{1+t} dt \\ &= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - \ln|t+1| + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + \text{const}$$

Esercizio 819

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$x = t^6$$

Ciò implica:

$$dx = 6t^5 dt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int \frac{t^3-1}{t^2+1} 6t^5 dt \\
&= 6\int \frac{t^5\left(t^3-1\right)}{t^2+1} dt \\
&= 6\int \left(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 - \frac{t-1}{t^2+1}\right) \\
&= 6\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t - \int \frac{t-1}{t^2+1}\right) \\
&= 6\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + \arctan t + \text{const}\right)
\end{aligned}
$$

Ripristinando la variabile x:

$$
\begin{aligned}
F(x) = {} & \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} \\
& + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right| + 6\arctan\sqrt[6]{x} + \text{const}
\end{aligned}
$$

Esercizio 819

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$x = t^6$$

Ciò implica:

$$dx = 6t^5 dt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int \frac{t^3-1}{t^2+1} 6t^5 dt \\
&= 6\int \frac{t^5\left(t^3-1\right)}{t^2+1} dt \\
&= 6\int \left(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 - \frac{t-1}{t^2+1}\right) \\
&= 6\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t - \int \frac{t-1}{t^2+1}\right) \\
&= 6\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + \arctan t + \text{const}\right)
\end{aligned}
$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}$$
$$+ 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right| + 6\arctan\sqrt[6]{x} + \text{const}$$

Esercizio 820

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}dx$$

***

Soluzione
Il cambio di variabile è:

$$x+1 = t^2$$

Ciò implica:

$$dx = 2tdt$$

L'integrale:

$$F(t) = 2\int \frac{t^2+2t}{t^4-t}dt$$

L'integrando è una funzione razionale propria:

$$\frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+t+1},$$

per cui:

$$\begin{aligned} F(t) &= 2\left(\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt\right) \\ &= 2\left[\ln|t-1| - \int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt\right] \end{aligned} \tag{1}$$

L'integrale al secondo termine del secondo membro della (1) contiene un trinomio di secondo grado e si calcola con il procemento standard, ottenendo:

$$\int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Sostituendo nella (1):

$$F(t) = 2\ln|t-1| - \ln\left(t^2+t+1\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = \ln\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}{x+2+\sqrt{x+1}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Esercizio 821

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x = t^2$$

Ciò implica:

$$dx = 2tdt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{t^2}{t^2+2} dt \\ &= 2\left(\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+2}\right) \\ &= 6\left(t - \sqrt{2}\int \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) \\ &= 2\left(t - \sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}}\right) + \text{const}$$

Esercizio 822

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$1 - x = t^2$$

Ciò implica:

$$dx = -2tdt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= -2\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -2\arctan t + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = -2\arctan\left(\sqrt{1-x}\right) + \text{const}$$

Esercizio 838

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{3x-2} - \sqrt{3x-2}} \tag{2}$$

***

Soluzione
L'integrale proposto è del tipo:

$$\int \mathcal{R}\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_m}{q_m}}\right] dx, \tag{3}$$

essendo $\mathcal{R}$ una funzione razionale, e $p_1, q_1, p_2, q_2, ..., p_m, q_m \in \mathbb{N}$. L'integrale (3) si risolve con il cambio di variabile:

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n},$$

dove n è il m.c.m di $q_1, q_2, ..., q_n$. Più precisamente, l'integrale viene ricondotto all'integrale di una funzione razionale.
Nel caso specifico di (2) il cambio di variabile è:

$$t = \sqrt[4]{3x-2},$$

onde:

$$x = \frac{t^4+2}{3}, \quad dx = \frac{4}{3}t^3 dt$$

Perciò:

$$F(t) = \frac{4}{3}\int \frac{t^2}{1-t} dt$$

L'integrando è una funzione razionale impropria (o *irregolare*), per cui eseguiamo la divisione tra i polinomi:

$$\frac{t^2}{1-t} = -t - \frac{1}{t-1} - 1$$

quindi:

$$\int \frac{t^2}{1-t}dt = -\int tdt - \int \frac{dt}{t-1} - \int dt =$$
$$= -\frac{1}{2}t^2 - \ln|t-1| - t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{3x-2} - \sqrt[4]{3x-2} - \ln\left(\left|\sqrt[4]{3x-2}\right| - 1\right)\right] + C \\ &= -\frac{2}{3}\left[\sqrt{3x-2} + 2\sqrt[4]{3x-2} + 2\ln\left(\left|\sqrt[4]{3x-2}\right| - 1\right)\right] + C \end{aligned}$$

Esercizio 839

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int x^2\sqrt{x^2+3}dx \tag{4}$$

***

Soluzione

Moltiplicando la funzione integranda per $\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}$ otteniamo:

$$F(x) = \int \frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+3}}dx \tag{5}$$

Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \tag{6}$$

essendo $p_n(x)$ un polinomio di grado $n \geq 2$ (per $n = 0, 1$ l'integrale si calcola con il procedimento standard applicabile agli integrali contenenti un trinomio di secondo grado). Sussiste la seguente formula di riduzione:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{7}$$

dove $X_{n-1}(x)$ è un polinomio di grado $n-1$ a coefficienti indeterminati, e α è un ulteriore coefficiente indeterminato. Tali coefficienti si determinano derivando primo e secondo membro (7) e applicando il principio di identità dei polinomi.

Nel caso di (5):

$$\int \frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+3}}dx = \left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\sqrt{x^2+3} + \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} \tag{8}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}\frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+3}} &= \left(3Ax^2+2Bx+C\right)\sqrt{x^2+3}+\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+3}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\left(3C+\alpha+xD+9Ax^2+4Ax^4+3Bx^3+2Cx^2+6Bx\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\left[4Ax^4+3Bx^3+(9A+2C)\,x^2+(6B+D)\,x+(3C+\alpha)\right]\end{aligned}$$

Per il principi di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 4A=1\\ 3B=0\\ 9A+2C=3\\ 6B+D=0\\ 3C+\alpha=0\end{cases},$$

da cui:

$$A=\frac{1}{4}, B=0, C=\frac{3}{8}, \alpha=-\frac{9}{8}, D=0$$

Quindi:

$$\int\frac{x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+3}}dx=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{3}{8}\right)\sqrt{x^2+3}-\frac{9}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

L'integrale a secondo membro si riconduce facilmente ad in integrale fondamentale:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)$$

Da ciò segue il risultato:

$$\int x^2\sqrt{x^2+3}dx=\frac{1}{8}\left(2x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}-\frac{9}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+C$$

Esercizio 840

Calcolare l'integrale

$$F(x)=\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{9}$$

***

Soluzione
Tale integrale è del tipo:

$$\int\frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Quindi applichiamo la formula di riduzione (v. esercizio 839)

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

Cioè:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{1-x^2}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{10}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = (2Ax+B)\sqrt{1-x^2}+\left(Ax^2+Bx+C\right)\frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}$$

cioè:

$$\begin{aligned} x^3 &= (2Ax+B)\left(1-x^2\right)+\left(-Ax^3-Bx^2-Cx\right)+\alpha \\ &= (-3A)\,x^3+(-2B)\,x^2+(2A-C)\,x+(B+\alpha) \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} -3A=1 \\ B=0 \\ 2A-C=0 \\ B+\alpha=0 \end{cases},$$

da cui:

$$A=-\frac{1}{3}, B=0, C=-\frac{2}{3}, \alpha=0$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \left(-\frac{x^2}{3}-\frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2}+C \\ &= -\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}+C \end{aligned}$$

Esercizio 841

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{11}$$

***

Soluzione
Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Quindi applichiamo la formula di riduzione (v. esercizio 839)

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

Nel caso dell'integrale assegnato:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\right)\sqrt{1-x^2} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} &= \left(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D\right)\sqrt{1-x^2}+ \\ &\quad + \left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\right)\frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned}x^5 &= (-5A)x^5 + (-4B)x^4 + (4A-3C)x^3 + (3B-2D)x^2 \\ &\quad + (2C-E)x + (\alpha+D)\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} -5A = 1 \\ -4B = 0 \\ 4A-3C = 0 \\ 3B-2D = 0 \\ 2C-E = 0 \\ \alpha + D = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$A = -\frac{1}{5}, B = 0, C = -\frac{4}{15}, \alpha = 0, D = 0, E = -\frac{8}{15}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \left(-\frac{x^4}{5} - \frac{4}{15}x^2 - \frac{8}{15}\right)\sqrt{1-x^2} + C \\ &= -\frac{1}{15}\left(3x^4+4x^2+8\right)\sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

Esercizio 842

Calcolare l'integrale
$$F(x) = \int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx \tag{12}$$

***

Soluzione
Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Quindi applichiamo la formula di riduzione (v. esercizio 839)

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

Nel caso dell'integrale assegnato:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}\frac{x^5}{\sqrt{x^2+2x+2}} &= \left(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D\right)\sqrt{x^2+2x+2}+ \\ &+ \left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\right)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+2x+2}}\end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned}x^5 &= 5Ax^5 + (9A+4B)x^4 + (8A+7B+3C)x^3 \\ &+ (6B+5C+2D)x^2 + (4C+3D+E)x + (\alpha+2D+E)\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 5A = 1 \\ 9A+4B = 0 \\ 8A+7B+3C = 0 \\ 6B+5C+2D = 0 \\ 4C+3D+E = 0 \\ \alpha+2D+E = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$A = \frac{1}{5}, B = -\frac{9}{20}, C = \frac{31}{60}, D = \frac{7}{120}, E = -\frac{269}{120}, \alpha = \frac{17}{8}$$

Quindi:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \left(\frac{x^4}{5} - \frac{9}{20}x^3 + \frac{31}{60}x^2 + \frac{7}{120}x - \frac{269}{120}\right)\sqrt{x^2+2x+2} +$$
$$+ \frac{17}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

L'integrale a secondo membro si calcola con i metodi degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado, ottenendo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)$$

Perciò:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{1}{120}\left(24x^4 - 54x^3 + 62x^2 + 7x - 269\right)$$
$$+ \frac{17}{8}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C$$

Esercizio 843

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx \tag{13}$$

***

Soluzione
Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Quindi applichiamo la formula di riduzione (v. esercizio 839)

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

Nel caso dell'integrale assegnato:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-x+1} + \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} = A\sqrt{x^2-x+1} + (Ax+B)\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\left[4Ax^2 + (2B-3A)x + (2A-B+2\alpha)\right],$$

cioè:

$$2x^2 = 4Ax^2 + (2B - 3A)\,x + (2A - B + 2\alpha)$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\left\{ \begin{array}{c} 4A = 2 \\ 2B - 3A = 0 \\ 2A - B + 2\alpha = 0 \end{array} \right. ,$$

da cui:

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{4}, \alpha = -\frac{1}{8}$$

Quindi:

$$X_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(2x+3)$$

Perciò:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = \frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \tag{14}$$

L'integrale a secondo membro si calcola con i metodi degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado. Precisamente:

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= (x+k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2k = -1 \\ l + k^2 = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow k = -\frac{1}{2}, l = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right] \\ &\Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{d\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}}dx \end{aligned}$$

Ricordiamo che:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + C_1$$

Ponendo $t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ segue:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} &= \ln\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)+C_1\\ &= \ln\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2-x+1}\right)+C_1\\ &= \ln\left(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)+C_1-\ln\sqrt{3}\end{aligned}$$

Sostituendo nella (14) ed incorporando $C_1-\ln\sqrt{3}$ nella costante di integrazione C:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = \frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\ln\left(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)+C$$

Esercizio 844

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} \tag{15}$$

***

Soluzione
Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

e si riconduce a quelli del tipo dell'esercizio esercizio 839:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

attraverso il cambio di variabile:

$$x-x_0=\frac{1}{t}$$

Nel caso dell'integrale assegnato:

$$x=\frac{1}{t}\Longrightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^6}\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Applichiamo la formula di riduzione:

$$\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt = \left(At^3+Bt^2+Ct+D\right)\sqrt{1-t^2}+\alpha\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Derivando primo e secondo membro rispetto alla variabile t:

$$\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} = \left(3At^2 + 2Bt + C\right)\sqrt{1-t^2} + \left(At^3 + Bt^2 + Ct + D\right)\cdot\frac{(-t)}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-t^2}},$$

cioè:

$$\begin{aligned} t^4 &= \left(3At^2 + 2Bt + C\right)\left(1-t^2\right) + \left(-At^4 - Bt^3 - Ct^2 - Dt\right) + \alpha \\ &= -4At^4 - 3Bt^3 + (3A - 2C)\,t^2 + (2B - D)\,t + C + \alpha \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ -3B = 0 \\ 3A - 2C = 0 \\ 2B - D = 0 \\ C + \alpha = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$A = -\frac{1}{4}, B = 0, C = -\frac{3}{8}, D = 0, \alpha = \frac{3}{8}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt &= \left(-\frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{8}t\right)\sqrt{1-t^2} + \frac{3}{8}\arcsin t \\ &= \frac{1}{8}\left(2t^3 + 3t\right)\sqrt{1-t^2} + \frac{3}{8}\arcsin t \end{aligned} \quad (16)$$

Ripristinando la variabile x e ricordando che $F(t) = -\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$, otteniamo:

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} = \frac{2+3x^2}{8x^4}\sqrt{x^2-1} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + C$$

Esercizio 845

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} \quad (17)$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile (v. esercizio 844):

$$x+1=\frac{1}{t},$$

da cui:

$$dx=-\frac{dt}{t^2}$$

L'integrale diventa:

$$F(t)=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^3}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}}=-\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Applichiamo la formula di riduzione:

$$\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=(At+B)\sqrt{1-t^2}+\alpha\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Derivando primo e secondo membro rispetto alla variabile t:

$$\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}=A\sqrt{1-t^2}+(At+B)\cdot\frac{(-t)}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{\alpha}{\sqrt{1-t^2}},$$

cioè:

$$t^2=-2At^2-Bt+A+\alpha$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}-2A=1\\-B=0\\A+\alpha=0\end{cases},$$

da cui:

$$A=-\frac{1}{2},B=0,\alpha=\frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin t$$

Ripristinando la variabile x e ricordando che $F(t)=-\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$, otteniamo:

$$\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}=\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}+C$$

Esercizio 846

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx \tag{18}$$

***

Soluzione
Si calcola applicando le **condizioni di Cebyscev** che riguardano gli integrali del tipo:

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx$$

Nel nostro caso:

$$F(x) = \int x^{-1/2} \left(1 + x^{1/4}\right)^{1/3} dx,$$

per cui $m = -1/2, n = 1/4, p = 1/3$, per cui il cambio di variabile è
(v. http://www.extrabyte.info/post/integrali/irrazionale.pdf)

$$1 + x^{1/4} = t^3,$$

da cui:

$$x = \left(t^3 - 1\right)^4, dx = 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \left(t^3 - 1\right)^{-2} \cdot t \cdot 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3 dt \\ &= 12 \int t^2 \left(t^3 - 1\right) dt = 12 \left(\int t^6 dt - \int t^3 dt \right) \\ &= \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C, \quad \text{con } t = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

Cioè:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \frac{3}{7}\left(4\sqrt[4]{x} - 3\right) \sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^4} + C$$

Esercizio 847

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}}dx \tag{19}$$

***

Soluzione
Riscriviamo l'integrale:

$$F(x) = \int x^{-1/2} \left(1 + x^{1/4}\right)^{1/3} dx,$$

in modo da applicare le condizioni di Cebyscev (v. esercizio 846). Abbiamo: $m = -1/2, n = 1/3, p = 1/4$, per le condizioni di Cebyscev non sono verificate. Pertanto l'integrale non è esprimibile attraverso una combinazione finita di funzioni elementari. Più precisamente si esprime attraverso la funzione ipergeometrica. In tal caso si può calcolare via software attraverso un programma di calcolo del tipo `Mathematica`, dopodiché se ne traccia il grafico, come riportato in figura 1

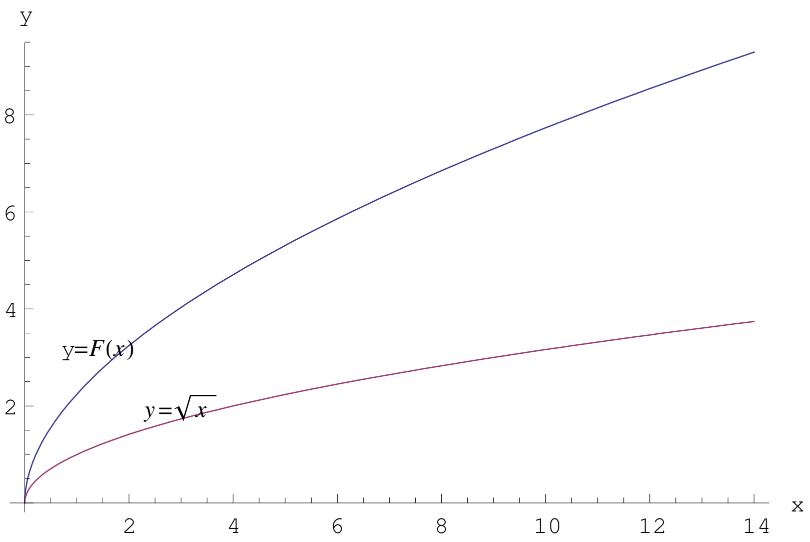

Figure 1: Grafico dell'integrale assegnato confrontato con il grafico di $\sqrt{x}$

Esercizio 848

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} \tag{20}$$

***

Soluzione
Riscriviamo l'integrale:

$$F(x) = \int x^{-1} \left(1 + x^5\right)^{-1/3} dx,$$

in modo da applicare le condizioni di Cebyscev (v. esercizio 846). Abbiamo: $m = -1, n = 5, p = -1/3$, per cui $\frac{m+1}{n} = 0$. Segue allora che per le condizioni di Cebyscev il cambio di variabile è:

$$1 + x^5 = t^3,$$

da cui:

$$\begin{aligned} x &= \left(t^3 - 1\right)^{1/5} \\ dx &= \frac{3}{5} t^2 \left(t^3 - 1\right)^{-4/5} dt \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale in funzione di t è:

$$F(t) = \frac{3}{5} \int \frac{t}{t^3 - 1} dt,$$

che si calcola per riduzione in frazioni semplici:

$$\frac{t}{t^3 - 1} = \frac{1}{3(t-1)} - \frac{t-1}{3(t^2 + t + 1)}$$

Quindi:

$$F(t) = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3} \int \frac{t-1}{t^2 + t + 1} dt \right)$$

L'integrale a secondo membro si calcola con i metodi noti relativi ad integrali contenenti un trinomio di secondo grado:

$$\int \frac{t-1}{t^2 + t + 1} dt = \frac{1}{2} \ln \left(t^2 + t + 1\right) - \sqrt{3} \arctan \frac{1 + 2t}{\sqrt{3}}$$

Perciò:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1 + x^5}} = \frac{3}{5} \left[\sqrt{3} \arctan \frac{1 + 2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \left(t^2 + t + 1\right) \right] + C$$

$$\text{con } t = \sqrt[3]{1 + x^5}$$

Esercizio 849

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2 (2 + x^3)^{5/3}} \tag{21}$$

***

Soluzione
Riscriviamo l'integrale:

$$F(x) = \int x^{-2} \left(2 + x^3\right)^{-5/3} dx,$$

in modo da applicare le condizioni di Cebyscev (v. esercizio 846). Abbiamo: $m = -2, n = 3, p = -5/3$, per cui $\frac{m+1}{n} + p = -2$. Segue allora che per le condizioni di Cebyscev il cambio di variabile è:

$$2x^{-3} + 1 = t^3,$$

da cui:

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{t^3 - 1}{2}\right)^{-1/3} \\ dx &= -\frac{t^2}{2} \left(\frac{t^3 - 1}{2}\right)^{-4/3} dt \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale in funzione di t è:

$$\begin{aligned} F(t) &= -\frac{1}{4} \int \frac{t^3 - 1}{t^3} dt \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2t^2} + t\right) \\ &= -\frac{1 + 2t^3}{8t^2} + C, \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 (2 + x^2)^{5/3}} &= -\frac{1}{8} \frac{1 + 2\frac{2+x^3}{x^3}}{2\frac{\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}{x^2}} + C \\ &= -\frac{3x^2 + 4}{8x\sqrt[3]{(2 + x^3)^2}} + C \end{aligned}$$