Integrali definiti

[file scaricato da http://www.extrabyte.info]

Esercizio 1037

Si chiede di calcolare i seguenti integrali considerandoli come il limite delle corrispondenti somme integrali.

$$1)\ \int_0^b x^2 dx \quad 2)\ \int_a^b dx \quad 3)\ \int_0^T (v_0 + gt)\, dt, \text{ con } v_0, g = \text{const}$$

$$4)\ \int_{-2}^1 x^2 dx \quad 5)\ \int_0^{10} 2^x dx \quad 6)\ f(x) = \int_0^x \sin t dt$$

Soluzioni

1. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[0, b]$:

$$x_k = k\frac{b}{n}, \quad k \in \mathcal{N} = \{0, 1, ..., n-1\}$$

L'ampiezza è

$$\delta_n = \frac{b}{n}$$

La somma integrale:

$$\sigma_{D_n} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Prendiamo $\xi_k = x_k$:

$$\sigma_{D_n} = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

Ma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(2n-1)(n-1)}{6},$$

donde:

$$\sigma_{D_n} = \frac{b^3}{6}\frac{(2n-1)(n-1)}{n^2},$$

da cui l'integrale:

$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{D_n} = \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} = \frac{b^3}{3}$$

2. Eseguiamo un'equipartizione D_n di $[a,b]$:

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k \in \mathcal{N} = \{0,1,2,...,n-1\}$$

L'ampiezza di D_n è:

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}$$

La somma integrale è:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \\ &= b-a,\end{aligned}$$

giacchè

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) = n$$

Quindi:

$$\int_a^b dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{\delta_n} = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = b-a$$

3. Quest'integrale ha una semplice interpretazione fisica, se poniamo:

$$y(T) = \int_0^T (v_0 + gt)\, dt$$

Qui $y(T)$ è al tempo T la quota di un punto materiale in caduta libera in un campo gravitazionale (g è l'accelerazione di gravità) con velocità iniziale v_0. L'asse y è orientato verso il basso e si trascura la resistenza dell'aria. L'integrando è la velocità istantanea:

$$v(t) = v_0 + gt$$

Eseguiamo un'equipartizione D_n di $[0,T]$:

$$t_k = k\frac{T}{n}, \quad \text{con} \quad k \in \mathcal{N} = \{0,1,2,...,n-1\}$$

L'ampiezza è

$$\delta_n = \max_{k\in\mathcal{N}} (t_{k+1}-t_k) = \frac{T}{n}$$

La somma integrale è

$$\sigma_{D_n} = \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$$

Assumendo $\tau_k = t_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(v_0 + g\frac{T}{n}k\right)\\ &= Tv_0 + \frac{n+1}{n}\frac{gT^2}{2}\end{aligned}$$

Quindi l'integrale:

$$\begin{aligned}y(T) &= \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{D_n}\\ &= \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n}\\ &= v_0 T + \frac{1}{2} g T^2\end{aligned}$$

4. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[-2, 1]$:

$$x_k = -2 + \frac{3}{n}k, \quad \text{con } k = 0, 1, ..., n-1$$

di ampiezza:

$$\delta_n = \frac{3}{n}$$

Assumendo $\xi_k = x_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\\ &= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{n}k - 2\right)^2\\ &= \frac{3}{2}\frac{2n^2 - 3n + 3}{n}\end{aligned}$$

da cui:

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} = 3$$

5. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[0, 10]$:

$$x_k = \frac{10}{n}k, \quad \text{con } k = 0, 1, ..., n-1$$

di ampiezza:

$$\delta_n = \frac{10}{n}$$

Assumendo $\xi_k = x_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \frac{10}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k\frac{10}{n}} \\ &= \frac{5 2^{\frac{10+n}{n}} \left(-1 + (1024)^{1/n}\right)^n}{\left(-1 + 1024^{1/n}\right)^n}\end{aligned}$$

da cui:

$$\int_0^{10} 2^x dx = \lim_{n\to+\infty} \sigma_{D_n} = \frac{10230}{\ln(1024)}$$

6. Eseguiamo l'equipartizione:

$$t_k = k\frac{x}{n}, \text{ con } k \in \mathcal{N} = \{0, 1, ..., n-1\}$$

L'ampiezza dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ è:

$$\delta_{k,n} = t_{k+1} - t_k = \frac{x}{n},$$

donde l'ampiezza della partizione:

$$\delta_n = \max_{k\in\mathcal{N}} (\delta_k) = \frac{x}{n}$$

Assumendo $\tau_k = t_{k+1}$ e ponendo $g(t) = \sin t$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} g(t_{k+1}) \frac{x}{n} \\ &= \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(k\frac{x}{n}\right)\end{aligned}$$

Per il calcolo della sommatoria utilizziamo una nota relazione trigonometrica:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(ky) = \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)},$$

donde:

$$\sigma_{D_n} = \frac{x\left\{\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]\right\}}{2n\sin\left(\frac{y}{2}\right)}$$

Passiamo al limite per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{D_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x\left\{\cos\left(\frac{x}{2n}\right)-\cos\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)x\right]\right\}}{2n\sin\left(\frac{x}{2n}\right)}$$
$$= \frac{x\left(1-\cos x\right)}{2\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{x}{2n}\right)}$$

Calcoliamo a parte il limite a denominatore:

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{x}{2n}\right) \underset{m=n^{-1}}{=} \lim_{m\to 0^+}\frac{\sin\left(\frac{mx}{2}\right)}{m} = \frac{x}{2},$$

Quindi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sigma_{D_n} = 1-\cos x$$

Esercizio 1039

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx \tag{1}$$

Soluzione
Procediamo per decomposizione

$$\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx = \sqrt{2}\int_0^8 x^{1/2}dx + \int_0^8 x^{1/3}dx$$
$$= \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 8^{3/2} + \frac{3}{4}\cdot 8^{4/3}$$
$$= \frac{100}{3}$$

Esercizio 1040

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy \tag{2}$$

Soluzione
Procediamo per decomposizione

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy &= \int_1^4 y^{-2}dy + \int_1^4 y^{-3/2}dy \\ &= \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 + \left[-2y^{-1/2}\right]_1^4 \\ &= -\frac{1}{4} + 1 + \left(-2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot 1\right) = \frac{7}{4}\end{aligned}$$

Esercizio 1041

Assegnata la funzione:

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt, \tag{3}$$

essendo $\alpha, \beta \in C^1(X)$, con $X \subseteq \mathbb{R}$. Si calcoli la derivata di $F(x)$.

Soluzione
Sia $G(t)$ una primitiva di $F(x)$:

$$G(t) = \int f(t)\,dt$$

Quindi:

$$G'(t) = f(t)$$

La funzione $F(x)$ si esprime attraverso la primitiva $G(x)$:

$$F(x) = G(x)\big|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G[\beta(x)] - G[\alpha(x)]$$

Derivando ambo i membri:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}G[\beta(x)] - \frac{d}{dx}G[\alpha(x)]$$

Per la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$F'(x) = \beta'(x)\,G'[\beta(x)] - \alpha'(x)\,G'[\alpha(x)] \tag{4}$$

Ad esempio:

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$$

Qui poniamo:

$$G'(t) = e^{-t^2}$$

Per la (4):

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2xG'\left(x^2\right) - G\left(x^2\right) \\ &= 2xe^{-x^4} - e^{-x^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Esercizio 1042

Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_1^x \ln t dt \tag{6}$$

Soluzione
Sia $G(t)$ una primitiva di $F(x)$:

$$G(t) = \int \ln t dt,$$

per cui:

$$G'(t) = \ln t$$

La funzione $F(x)$ si esprime attraverso la primitiva $G(x)$:

$$F(x) = G(x)|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G[\beta(x)] - G[\alpha(x)],$$

essendo $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ gli estremi di integrazione.
Derivando ambo i membri:

$$F'(x) = \beta'(x) G'[\beta(x)] - \alpha'(x) G'[\alpha(x)]$$

Cioè:

$$F'(x) = \ln x$$

Esercizio 1044

Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt \tag{7}$$

Soluzione
Sia $G(t)$ una primitiva di $F(x)$:

$$G(t) = \int \cos t^2 dt,$$

per cui:

$$G'(t) = \cos t^2$$

La funzione $F(x)$ si esprime attraverso la primitiva $G(x)$:

$$F(x) = G(x)|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G[\beta(x)] - G[\alpha(x)],$$

essendo $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ gli estremi di integrazione:

$$\alpha(x) = \frac{1}{x}, \beta(x) = \sqrt{x}$$

Derivando ambo i membri:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \beta'(x) G'[\beta(x)] - \alpha'(x) G'[\alpha(x)] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} G'(\sqrt{x}) + \frac{1}{x^2} G'\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Cioè:

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Esercizio 1045

Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \tag{8}$$

Soluzione
Sia $G(t)$ una primitiva di $F(x)$:

$$G(t) = \int \frac{\sin t}{t} dt,$$

per cui:

$$G'(t) = \frac{\sin t}{t}$$

La funzione $F(x)$ si esprime attraverso la primitiva $G(x)$:

$$F(x) = G(x)|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G[\beta(x)] - G[\alpha(x)],$$

essendo $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ gli estremi di integrazione:

$$\alpha(x) = 0, \beta(x) = x$$

Derivando ambo i membri:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \beta'(x) G'[\beta(x)] - \alpha'(x) G'[\alpha(x)] \\ &= G'(x) \end{aligned}$$

Cioè:

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Esercizio 1045

Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \tag{9}$$

Soluzione
Sia $G(t)$ una primitiva di $F(x)$:

$$G(t) = \int \frac{\sin t}{t} dt,$$

per cui:

$$G'(t) = \frac{\sin t}{t}$$

La funzione $F(x)$ si esprime attraverso la primitiva $G(x)$:

$$F(x) = G(x)|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G[\beta(x)] - G[\alpha(x)],$$

essendo $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ gli estremi di integrazione:

$$\alpha(x) = 0, \beta(x) = x$$

Derivando ambo i membri:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \beta'(x) G'[\beta(x)] - \alpha'(x) G'[\alpha(x)] \\ &= G'(x) \end{aligned}$$

Cioè:

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Esercizio 1046

Determinare una sostituzione lineare:

$$x = at + b$$

tale che gli estremi di integrazione dell'integrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \qquad (x_1 > x_2),$$

siano rispettivamente 0 e 1.

Soluzione
La variabile di integrazione x è tale che:

$$x_1 \leq x = at + b \leq x_2,$$

da cui ricaviamo l'intervallo di appartenenza della variabile t:

$$\frac{x_1 - b}{a} \leq t \leq \frac{x_2 - b}{a}$$

Dobbiamo determinare a, b tali che:

$$0 \leq t \leq 1$$

Cioè:

$$\begin{cases} \frac{x_1 - b}{a} = 0 \\ \frac{x_2 - b}{a} = 1 \end{cases} \Longrightarrow b = x_1, \;\; a = x_2 - x_1$$

Quindi la sostituzione richiesta è:

$$x = (x_2 - x_1)\,t + x_1$$

Perciò:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = (x_2 - x_1)\int_0^1 f\left[(x_2 - x_1)\,t + x_1\right]dt$$

Esercizio 1048

Si calcoli il seguente integrale definito:

$$F(\xi) = \int_0^\xi x^2\sqrt{\xi^2 - x^2}dx, \quad \text{con } \xi > 0, \tag{10}$$

eseguendo il cambio di variabile $x = \xi \sin t$.

Soluzione
Abbiamo

$$dx = \xi \cos t dt$$

Determiniamo i nuovi estremi di integrazione:

$$0 \leq x = \xi \sin t \leq \xi,$$

cioè:

$$0 \leq \sin t \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

cosicchè l'integrale diviene:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \xi^4 \int_0^\xi \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{\xi^4}{4}\int_0^\xi \sin^2 2t dt \\ &= \frac{\xi^4}{8}\int_0^\xi \sin^2 2t d(2t) \\ &= \frac{\xi^4}{8}\left[t - \frac{1}{2}\sin 4t\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi\xi^4}{16} \end{aligned}$$

Esercizio 1049

Calcolare l'integrale definito

$$\int_2^6 \sqrt{x-2}dx \tag{11}$$

Soluzione
Calcoliamo prima l'integrale indefinito:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int \sqrt{x-2}dx = \int (x-2)^{1/2} \, d(x-2) \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x-2)^3} + C,
\end{aligned}
$$

quindi:

$$
\int_2^6 \sqrt{x-2}dx = F(x)|_2^6 = \frac{16}{3}
$$

Esercizio 1050

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito

$$
\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1} \tag{12}
$$

Soluzione
Calcoliamo prima l'integrale indefinito:

$$
F(x) = \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C
$$

quindi:

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|_2^6 = \\
&= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 3) \\
&= \ln\sqrt{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1051

Calcolare l'integrale definito

$$
\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} \tag{13}
$$

Soluzione

Calcoliamo prima l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(25+3x)}{\sqrt{25+3x}} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{25+3x} + C \end{aligned}$$

quindi:

$$\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} = \frac{2}{3} \left. \sqrt{25+3x} \right|_0^{-3} = -\frac{2}{3}$$

Esercizio 1052

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2} dx \tag{14}$$

Soluzione
Calcoliamo prima l'integrale indefinito:

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+3x+2} dx$$

Scriviamo:

$$x = a\frac{d}{dx}\left(x^2+3x+2\right) + b,$$

con a, b coefficienti indeterminati:

$$\begin{aligned} x &= 2ax + 3a + b \\ &\Longrightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2} - \frac{3}{2} \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+3x+2}}_{=F_1(x)} \\ &= \frac{1}{2} \ln\left|x^2+3x+2\right| - \frac{3}{2} F_1(x) \end{aligned} \tag{15}$$

Calcoliamo

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x^2+3x+2}$$

A tale scopo scriviamo:

$$\begin{aligned}
x^2+3x+2 &= (x+k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2k = 3 \\ l + k^2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow k = \frac{3}{2},\ l = -\frac{1}{4} \\
&\Longrightarrow x^2+3x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left[(2x+3)^2 - 1\right]
\end{aligned}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= 2\int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2-1} = \ln\left|\frac{2x+3-1}{2x+3+1}\right| + C_1 \\
&= \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C
\end{aligned}$$

Sostituendo nella (15):

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+2\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

Osservando che $x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C \\
&= 2\ln|x+2| - \ln|x+1| + C
\end{aligned}$$

E attraverso questa espressione siamo in grado di valutare l'integrale definito:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}dx &= \left[2\ln|x+2| - \ln|x+1|\right]_0^1 \\
&= 2\ln 3 - 3\ln 2 \\
&= \ln\frac{9}{8}
\end{aligned}$$

Esercizio 1053

Trasformare e calcolare l'integrale definito, con la sostituzione indicata a fianco:

$$\int_1^3 \sqrt{x+a}dx, \quad \text{con } x = 2t - a, \tag{16}$$

essendo $a > 0$.
Soluzione
Abbiamo:

$$x = 2t - a \Longrightarrow dx = 2dt,$$

mentre gli estremi di integrazione cambiano in:

$$1 \leq x = 2t - a \leq 3$$

Cioè:

$$\begin{aligned} 1 + a \leq 2t \leq 3 + a \\ \Longrightarrow \frac{1+a}{2} \leq t \leq \frac{3+a}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{x+a}dx &= 2\int_{\frac{1+a}{2}}^{\frac{3+a}{2}} \sqrt{2t}dt = 2\sqrt{2}\int_{\frac{1+a}{2}}^{\frac{3+a}{2}} \sqrt{t}dt \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} [t]_{\frac{1+a}{2}}^{\frac{3+a}{2}} \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2} \left[\frac{(3+a)^{3/2}}{2^{3/2}} - \frac{(1+a)^{3/2}}{2^{3/2}} \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[(3+a)\sqrt{3+a} - (1+a)\sqrt{1+a} \right] \end{aligned}$$

Esercizio 1054

Trasformare l'integrale definito, con la sostituzione indicata a fianco:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \text{con } x = \sin t, \tag{17}$$

essendo $a > 0$.
Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} x &= \sin t \Longrightarrow dx = \cos t dt \\ \sqrt{1-x^4} &= 1-\sin^4 t \\ & \left(1-\sin^2 t\right)\left(1+\sin^2 t\right) \\ &= \cos^2 t\left(1+\sin^2 t\right), \end{aligned}$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla nuova varaibile t

$$\frac{1}{2} \leq x = \sin t \leq 1$$

Cioè:

$$\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Quindi:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

Esercizio 1056

Se f è una qualunque funzione continua in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, determinare la trasformazione dell'integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx,$$

in seguito alla sostituzione $x = \arctan x$
Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} x &= \sinh t \Longrightarrow dx = \cosh t dt \\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= dt \end{aligned}$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla nuova variabile t

$$\frac{3}{4} \leq x = \sinh t \leq \frac{4}{3}$$

Cioè:

$$\sinh t \geq \frac{3}{4} \Longleftrightarrow t \geq \operatorname{arcsinh}\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left|\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16}+1}\right| = \ln 2$$
$$\sinh t \leq \frac{4}{3} \Longleftrightarrow t \geq \operatorname{arcsinh}\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left|\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16}+1}\right| = \ln 3,$$

giacchè:

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$$

Quindi:

$$\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} dt = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

Esercizio 1057

Sia f è una qualunque funzione continua in $[-a,a]$. Dimostrare che se f è pari:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \tag{18}$$

Se invece f è dispari:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \tag{19}$$

Soluzione
In entrambi i casi possiamo scrivere:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \tag{20}$$

Nel primo integrale a secondo membro eseguiamo la sostituzione:

$$x = -x' \Longrightarrow dx = -dx' \tag{21}$$

I nuovi estremi di integrazione sono tali che:

$$-a \leq x = -x' \leq 0,$$

cioè:

$$a \geq x' \geq 0$$

Quindi

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \underset{f(x)=f(-x)}{=} -\int_{a}^{0} f(x')\,dx' = \int_{0}^{a} f(x')\,dx' = \int_{0}^{a} f(x)\,dx \tag{22}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che x' è una variabile muta. Sostituendo la (22) nella (20), otteniamo la (18).
Se f è dispari, il cambio di variabile (21) implica;

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \underset{f(x)=-f(-x)}{=} \int_{a}^{0} f(x')\,dx' = -\int_{0}^{a} f(x')\,dx' = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \tag{23}$$

Sostituendo la (23) nella (20), otteniamo la (19).

Esercizio 1058

Calcolare il seguente integrale definito con la sostituzione a fianco indicata:

$$\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad x = t^2 \tag{24}$$

Soluzione
Abbiamo:

$$x = t^2 \Longrightarrow dx = 2tdt$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$0 \leq x = t^2 \leq 4$$

Cioè:

$$0 \leq t \leq 2$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= 2\int_0^2 \frac{tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}dt \\
&= 2\left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{1+t}\right) \\
&= 2\int_0^2 dt - 2\int_0^2 \frac{dt}{1+t} \\
&= 4 - 2\left[\ln|1+t|\right]_0^2 \\
&= 4 - 2\ln 3
\end{aligned}
$$

Esercizio 1059

Calcolare il seguente integrale definito con la sostituzione a fianco indicata:

$$
\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}dx, \quad x-2=t^3 \tag{25}
$$

Soluzione
Abbiamo:

$$
x-2=t^3 \Longrightarrow dx = 3t^2dt
$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$
3 \leq x = 2+t^3 \leq 29
$$

Cioè:

$$
1 \leq t^3 \leq 27 \Longrightarrow 1 \leq t \leq 3
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3} dx &= 3\int_1^3 \frac{t^4 dt}{t^2+3} \\
&= 3\int_1^3 \left(-3+t^2+\frac{9}{3+t^2}\right) dt \\
&= -9\int_1^3 dt + 3\int_1^3 t^2 dt + 27\int_1^3 \frac{dt}{3+t^2} \\
&= -18+26+27\int_1^3 \frac{dt}{3+t^2}
\end{aligned}
$$

Calcoliamo:

$$
\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{dt}{3+t^2} &= \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^3 \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_{t=1}^{t=3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\pi}{6\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1060

Calcolare il seguente integrale definito con la sostituzione a fianco indicata:

$$
\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx, \quad e^x-1=t^2 \tag{26}
$$

Soluzione
Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
e^x-1=t^2 &\Longrightarrow e^x dx = 2tdt \\
&\Longrightarrow dx = \frac{2t}{e^x}dt = \frac{2tdt}{t^2+1}
\end{aligned}
$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$0 \leq x = \ln\left(1+t^2\right) \leq \ln 2$$

Cioè:

$$1 \leq 1 + t^2 \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq t \leq 1$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= 2\int_0^1 \frac{t^2 dt}{t^2+1} \\
&= 2\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+1} dt \\
&= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt \\
&= 2\left(1 - \arctan t|_0^1\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Esercizio 1061

Assegnato l'integrale della funzione di Gauss e^{-x^2}:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \tag{27}$$

dimostrare che soddisfa la seguente identità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Soluzione
L'integrale (27) può essere scritto come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{28}$$

Nel primo integrale a secondo membro operiamo la seguente sostituzione:

$$x = -x',$$

onde:

$$dx = -dx'$$
$$e^{-x^2} = e^{-x'^2},$$

giacché la funzione di Gauss è manifestamente pari.
Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione x' sono tali che:

$$-\infty < x = -x' \leq 0,$$

cioè:

$$+\infty > x' \geq 0$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = -\int_{+\infty}^{0} e^{-x'^2} dx' = \int_{0}^{+\infty} e^{-x'^2} dx' = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{29}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che x' è una variabile muta.
Sostituendo il risultato (29) nella (28):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{30}$$

Ora nell'integrale a secondo membro della (30) operiamo la sostituzione $x = \sqrt{t}$, per cui:

$$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$
$$e^{-x^2} = e^{-t}$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione t sono tali che:

$$0 < x = \sqrt{t} < +\infty,$$

cioè:

$$0 < t < +\infty,$$

onde:

$$2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Si conclude che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Esercizio 1062

Dimostrare:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} \tag{31}$$

Soluzione
Nell' integrale a secondo membro operiamo la seguente sostituzione:

$$x = \cos t,$$

onde:

$$dx = -\sin t dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione t sono tali che:

$$0 \leq x = \cos t \leq 1,$$

cioè:

$$\frac{\pi}{2} \geq t \geq 0$$

Quindi:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = -\int_{\pi/2}^0 \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$$

Esercizio 1063

Sia $f(x)$ una funzione continua in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Dimostrare:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx \tag{32}$$

Soluzione
Nell' integrale a primo membro operiamo la seguente sostituzione:

$$x = \arcsin t,$$

onde:

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione t sono tali che:

$$0 \leq x = \arcsin t \leq \frac{\pi}{2},$$

cioè:

$$0 \leq t \leq 1$$

Quindi:

$$\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_{0}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \tag{33}$$

Eseguiamo un ulteriore cambio di variabile. Precisamente, sull'integrale a secondo membro, ponendo $t = \cos \eta$, per cui:

$$dt = -\sin \eta d\eta$$
$$\sqrt{1-t^2} = \sin \eta$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione η sono tali che:

$$0 \leq t = \cos \eta \leq 1,$$

cioè:

$$\frac{\pi}{2} \geq \eta \geq 0,$$

cosicchè:

$$\int_{0}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int_{\pi/2}^{0} f(\cos \eta)\, d\eta = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos \eta)\, d\eta = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)\, dx$$

Sostituendo tale risultato nella (33) otteniamo la (32).

Esercizio 1064

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{0}^{\pi/2} x \cos x dx \tag{34}$$

Soluzione
Eseguiamo un'integrazione per parti. Nel caso di un integrale definito, se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni derivabili nell'intervallo $[a,b]$, è facile dimostrare la seguente relazione:

$$\int_{a}^{b} f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} g(x)\, f'(x)\, dx$$

Nel caso dell'integrale assegnato, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x\cos x dx &= \int_0^{\pi/2} xd(\sin x) \\
&= x\sin x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx \\
&= \frac{\pi}{2} + \cos x|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

Esercizio 1065

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^e \ln x dx \tag{35}$$

Soluzione
Integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x dx &= x\ln x|_1^e - \int_1^e xd(\ln x) \\
&= e - \int_1^e dx \\
&= e + x|_1^e \\
&= 1
\end{aligned}$$

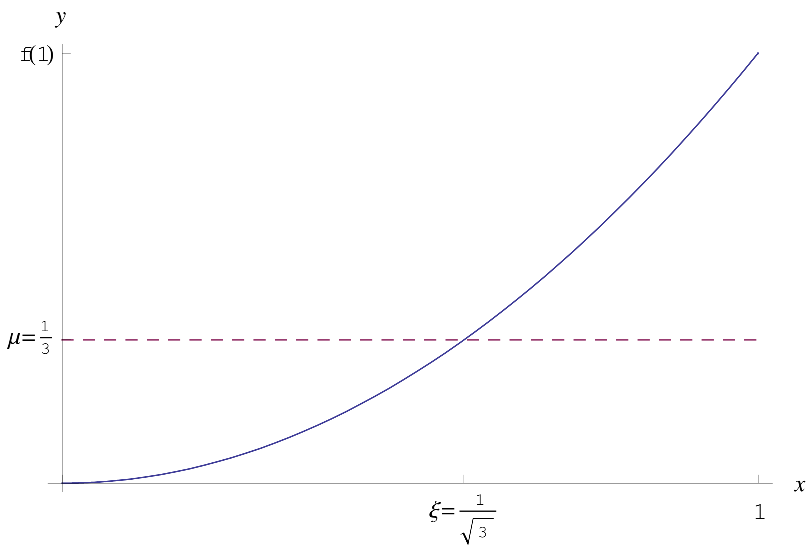
Esercizio 1066

Determinare la media integrale della funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[0, 1]$.
Soluzione
La media integrale è data da:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Nel caso della funzione assegnata:

$$\mu = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \left. x^3 \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$



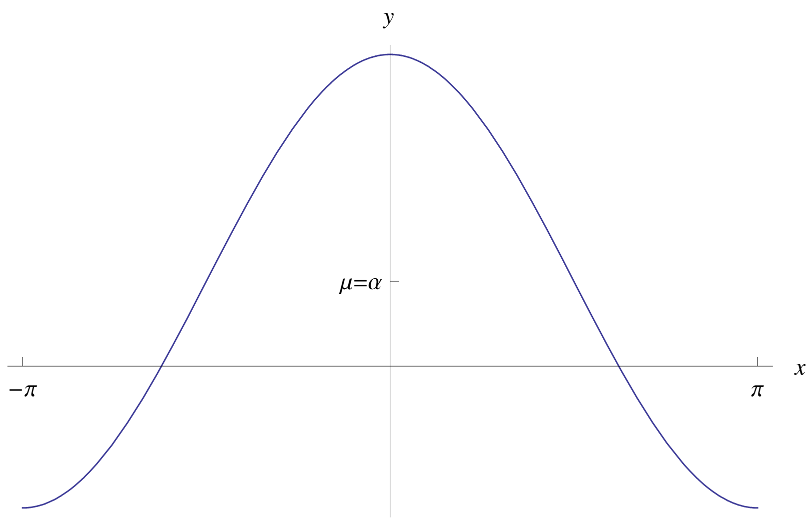
Esercizio 1067

Determinare la media integrale della funzione $f(x) = \alpha + \beta \cos x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.
Soluzione
La media integrale è:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha + \beta \cos x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\alpha \int_{-\pi}^{\pi} dx + \beta \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[2\pi\alpha + \beta \left. (\sin x) \right|_{\pi}^{-\pi} \right] = \alpha \end{aligned}$$

Esercizio 1068

Determinare la media integrale della funzione $f(x) = \sin^2 x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.
Soluzione



La media integrale è:

$$\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x dx$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

da cui:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2x d(2x) \right]\end{aligned}$$

L'integrale a secondo membro è nullo:

$$\int_0^{\pi} \cos 2x d(2x) = \sin 2x|_0^{\pi} = 0$$

Perciò:

$$\mu = \frac{1}{2}$$

Esercizio 1069

Determinare la media integrale della funzione $f(x) = \sin^4 x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.
Soluzione
La media integrale è:

$$\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

da cui:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ &\Longrightarrow \sin^4 x = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\pi - 2\int_0^{\pi} \cos 2x dx + \int_0^{\pi} \cos^2 2x dx\right] \end{aligned}$$

Il primo integrale a secondo membro è nullo (v. es. 1068), mentre il secondo

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos^2 2x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos 4x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 4x dx + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

giacchè

$$\int_0^\pi \cos kx dx = 0, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Perciò:

$$\mu = \frac{1}{4\pi}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

Esercizio 1143

Determinare l'area della regione del piano limitata dalle due parabole $y = -x^2 + x + 2$, $y = x^2 - 3x + 2$.

***

Soluzione
Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione delle due curve

$$\begin{cases} y = -x^2 + x + 2 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases},$$

cioè:

$$\begin{aligned} x = 0, y = 2 &\Longrightarrow A(0,2) \\ x = 2, y = 0 &\Longrightarrow B(2,0) \end{aligned}$$

La superficie racchiusa tra le due parabole è riportata in figura 1
Quindi:

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, \ f_2(x) \leq y \leq f_1(x)\right\},$$

essendo:

$$f_1(x) = -x^2 + x + 2, \ \ f_2(x) = x^2 - 3x + 2$$

L'area richiesta è:

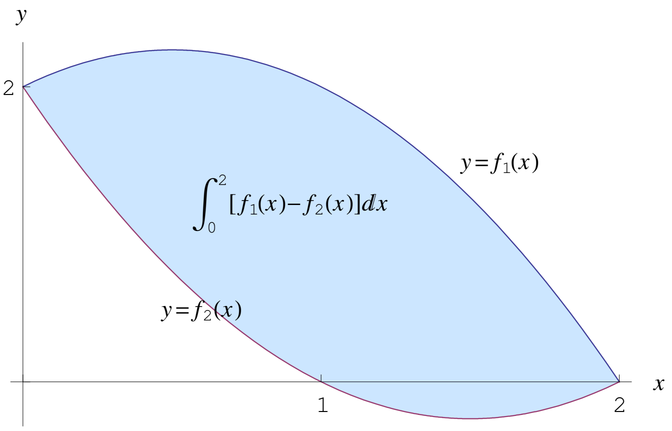


Figure 1:

$$S = \operatorname{mis}\mathcal{R} = \int_0^2 \left[f_2\left(x\right) - f_1\left(x\right)\right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right) dx$$

$$= -2\int_0^2 x^2 dx + 4\int_0^2 dx$$

$$= -\frac{2}{3}\, x^3\Big|_0^2 + 2\, x^2\Big|_0^2$$

$$= -\frac{2}{3}\left(8-0\right) + 8 = \frac{8}{3}$$

Esercizio 1146

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare l'area della regione del piano limitata dalla parabola $y^2 = 4x$, dalla retta $2x + y - 4 = 0$ e dall'asse x.

***

Soluzione

Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione della retta con la parabola

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = 2\sqrt{x} \end{cases},$$

cioè:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 1, 4$$

Quindi otteniamo i punti di intersezione:

$$A\,(2, 0)\ ,\ B\,(1, 2)$$

Quindi:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2,$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 2\sqrt{x}\right\} \\ \mathcal{R}_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq -2x + 4\right\} \end{aligned}$$

L'area richiesta è:

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{mis}\mathcal{R} = \operatorname{mis}\mathcal{R}_1 + \operatorname{mis}\mathcal{R}_2 \\ &= 2\int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^2 (-2x + 4)\, dx = \\ &= \frac{4}{3}\, x^{2/3}\Big|_0^1 + 4\, x\Big|_1^2 - x^2\Big|_1^2 \\ &= \frac{4}{3} + 4 - (4 - 1) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 1147

Determinare l'area della regione del piano limitata dalla parabola $\gamma)\ x^2 - 9y = 0$ e dalla retta $r)\ x - 3y + 6 = 0$.

***

Soluzione

Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione delle due curve

$$\begin{cases} x^2 - 9y = 0 \\ x - 3y + 6 = 0 \end{cases},$$

cioè:

$$x^2 - 3x - 18 = 0 \Longleftrightarrow x = -3, 6$$

Quindi:

$$A(-3,1), B(6,4) \in \gamma \cap r$$

La superficie racchiusa tra i due luoghi geometrici è riportata in figura 2

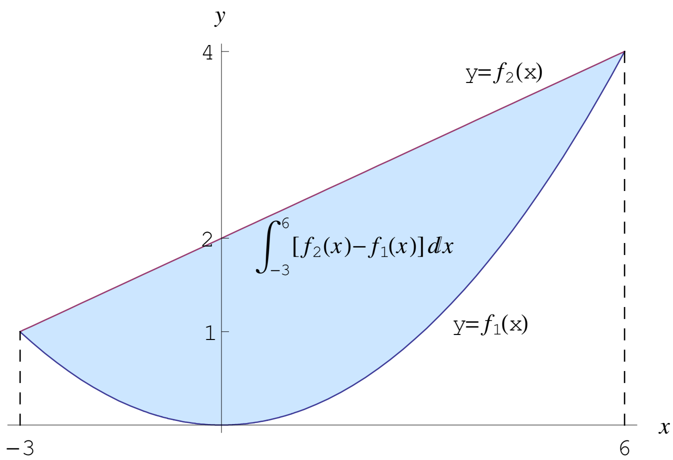


Figure 2:

Quindi:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq 6, \frac{x^2}{9} \leq y \leq \frac{x}{3} + 2 \right\},$$

L'area richiesta è:

$$\begin{aligned} S = \operatorname{mis} \mathcal{R} &= \int_{-3}^{6} \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{9} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-3}^{6} x dx + 2 \int_{-3}^{6} dx - \frac{1}{9} \int_{-3}^{6} x^2 dx \\ &= \frac{1}{6} \left. x^2 \right|_{-3}^{6} + 2 \left. x \right|_{-3}^{6} - \frac{1}{27} \left. x^3 \right|_{-3}^{6} \\ &= \frac{1}{6} (36 - 9) + 2(6+3) - \frac{1}{27} \left(6^3 + 27 \right) \\ &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 1148

Determinare le coordinate dei punti di intersezione della parabole γ_1) $y = 2x^2 + 1$, γ_2) $y = x^2 + 5$, calcolando poi l'area della regione del piano limitata dagli archi delle due curve aventi per estremi i suddetti punti di intersezione.

***

Soluzione
Per determinare le coordinate dei punti di intersezione, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 1 \\ y = x^2 + 5 \end{cases},$$

cioè:

$$x^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 2$$

Quindi:

$$A(-2, 9), B(2, 9) \in \gamma_1 \cap \gamma_2$$

La superficie racchiusa tra i due luoghi geometrici è riportata in figura 3

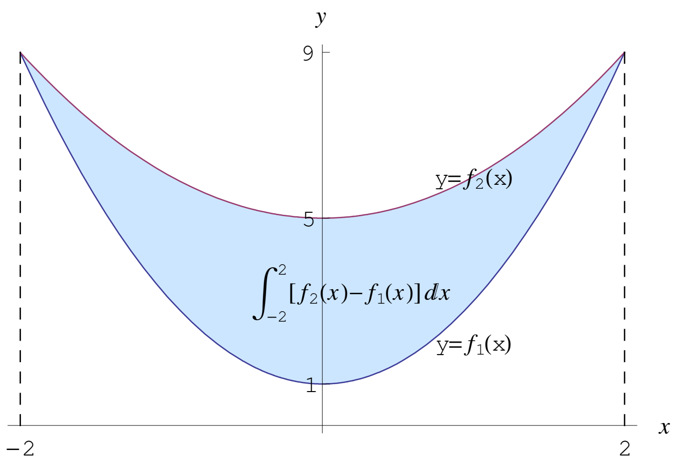


Figure 3:

Quindi:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2,\, 2x^2 + 1 \leq y \leq x^2 + 5\right\},$$

L'area richiesta è:

$$S=\operatorname{mis}\mathcal{R}=\int_{-2}^{2}\left(x^2+5-2x^2-1\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\,x^3\Big|_{-2}^{2}+4\,x\Big|_{-2}^{2}$$

$$=-\frac{16}{3}+16=\frac{13}{3}$$

Esercizio 1149

Si determini l'area del segmento parabolico intercettato dalla parabola $\gamma)\ y=-x^2+4x-1$ e dalla retta $r)\ y-2=0$.

***

Soluzione
Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} y=-x^2+4x-1 \\ y-2=0 \end{cases},$$

cioè:

$$x^2-4x+3=0 \Longleftrightarrow x=1,3$$

Quindi:

$$A\,(1,2)\,,B\,(3,2)\in\gamma\cap r$$

La superficie racchiusa tra i due luoghi geometrici è riportata in figura 4
Quindi:

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq x\leq 3,\ 2\leq y\leq -x^2+4x-1\right\},$$

L'area richiesta è:

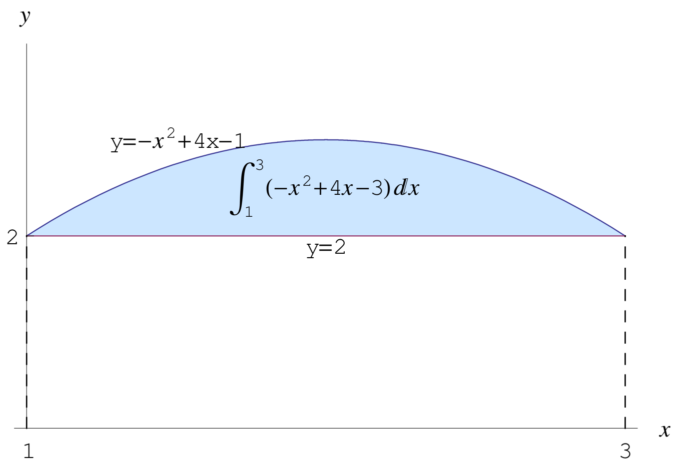


Figure 4:

$$
\begin{aligned}
S = \operatorname{mis}\mathcal{R} = \int_1^3 \left(-x^2+4x-3\right) dx &= \\
&= -\int_1^3 x^2 dx + 4\int_1^3 x dx - 3\int_1^3 dx \\
&= -\frac{1}{3}\, x^3\Big|_1^3 + 2\, x^2\Big|_1^3 - 3\, x\Big|_1^3 \\
&= -\frac{1}{3}\cdot 26 + 2\,(9-1) - 3\,(3-1) \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1154

Si determini l'area della regione del piano limitata dalle due parabole $\gamma_1)$ $y^2 = 16x$ e $\gamma_2)$ $y^2 = x^3$ e che giace nel primo quadrante.

***

Soluzione
Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione:

$$
\begin{cases} y^2 = 16x \\ y^2 = x^3 \end{cases},
$$

cioè:

$$x^3 = 16x \iff x\left(x^2 - 16\right) = 0 \iff x = 0, x = \pm 4$$

La soluzione che ci interessa è $x = 4$, quindi il punto di intersezione è $A(4, 8)$.
La superficie racchiusa tra i due luoghi geometrici è riportata in figura 5

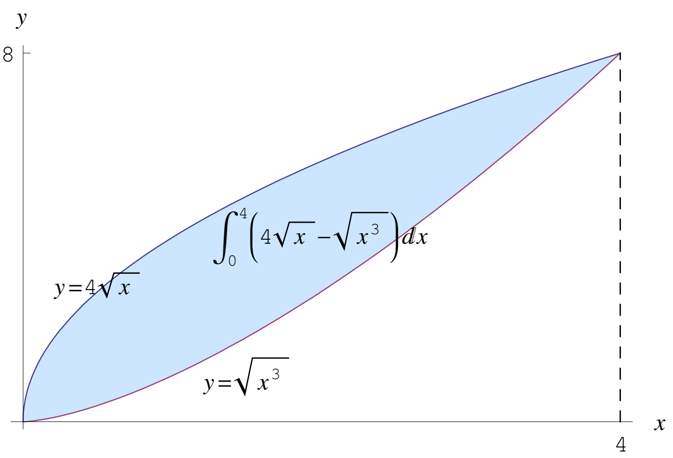


Figure 5:

Quindi:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4,\ \sqrt{x^3} \leq y \leq 4\sqrt{x}\right\},$$

L'area richiesta è:

$$\begin{aligned} S = \operatorname{mis}\mathcal{R} &= \int_0^4 \left(4\sqrt{x} - \sqrt{x^3}\right) dx = \\ &= 4\int_0^4 x^{1/2} dx - \int_0^4 x^{3/2} dx \\ &= 4 \cdot \frac{2}{3} \left. x^{3/2} \right|_0^4 - \frac{2}{5} \left. x^{5/2} \right|_0^4 \\ &= \frac{2^6}{3} - \frac{2^6}{5} = \frac{2^7}{15} = \frac{128}{15} \end{aligned}$$

Esercizio 1155

Si determini l'area del cappio individuato dalla curva:

$$x^3 - 4a\left(x^2 - y^2\right) = 0$$

***

Soluzione
La curva assegnata è data in forma implicita:

$$f(x,y) = 0,$$

essendo:

$$f(x,y) \stackrel{def}{=} x^3 - 4a\left(x^2 - y^2\right)$$

Osserviamo che:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) = f(x,-y)$$

Ciò implica la simmetria della curva rispetto all'asse x.
L'equazione può essere comunque esplicitata:

$$y = \pm \frac{x\sqrt{4a-x}}{2\sqrt{a}}$$

Il "cappio" è riportato in figura 6

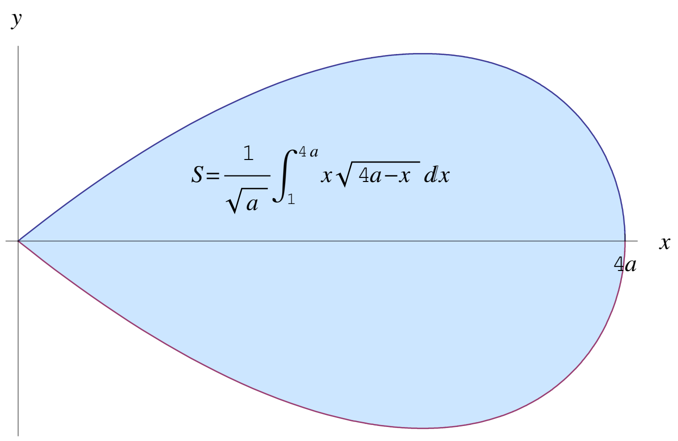


Figure 6:

È evidente che:

$$S = 2 \operatorname{mis} \mathcal{R},$$

essendo:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4a,\, 0 \leq y \leq \frac{x\sqrt{4a-x}}{2\sqrt{a}} \right\},$$

Quindi

$$S = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{4a} x\sqrt{4a-x}dx$$

Eseguiamo il cambio di variabile $4a - x = t^2$, per cui:

$$dx = -tdt$$

Gli estremi di integrazione rispetto a t sono tali che:

$$0 \leq x = 4a - t^2 \leq 4a$$

cioè:

$$4a \geq t^2 \geq 0 \Longrightarrow 2\sqrt{a} \leq t \leq 0$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{2\sqrt{a}}^{0} \left(4a - t^2\right) t \left(-2t\right) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{2\sqrt{a}}^{0} \left(2t^4 - 8at^2\right) dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{2\sqrt{a}}^{0} \left(t^4 - 4at^2\right) dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{5}\, t^5 \Big|_{2\sqrt{a}}^{0} - \frac{4}{3} a\, t^3 \Big|_{2\sqrt{a}}^{0} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} \left[-\frac{2^5 a^{5/2}}{5} - \frac{4}{3} a \left(0 - 2^3 a^{3/2}\right) \right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} \left(-\frac{2^5 a^{5/2}}{5} + \frac{2^5}{3} a^{5/2} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{a}} \cdot 2^5 \cdot a^{5/2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\
&= \frac{128}{15} a^2
\end{aligned}$$