Funzioni primitive - misura degli insiemi piani

Funzioni primitive

Sia $f(x)$ una funzione reale definita in $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Definizione 1 *Dicesi* **funzione primitiva** *o semplicemente* **primitiva** *di* $f(x)$*, ogni funzione reale* $F(x)$ *definita in* (a,b) *e tale che:*

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{1}$$

Il problema fondamentale del calcolo integrale consiste nel determinare eventuali primitive di una assegnata funzione $f(x)$.
Osserviamo innanzitutto che se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, per ogni $c \in \mathbb{R}$, $F(x)+c$ è ancora una primitiva di $f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)+c\right] = f(x) \tag{2}$$

In altri termini se una funzione è dotata di una primitiva, tale funzione ammette infinite primitive. Inoltre:

$$(F_1(x),\ F_2(x) \text{ primitive di } f(x)) \Longrightarrow (F_1'(x) = f(x),\ F_2'(x) = f(x))$$

da cui:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \Longrightarrow F_1(x) - F_2(x) = C, \quad \text{essendo } C \text{ una costante reale}$$

Cioè due primitive di un'assegnata funzione $f(x)$ differiscono per una costante additiva.
Si conclude che se $f(x)$ ammette una primitiva $F(x)$ in (a,b), la totalità delle primitive di $f(x)$ è:

$$G(x) = F(x) + c, \tag{3}$$

con c variabile da $-\infty$ a $+\infty$.

***

Supponiamo ora che $f(x)$ sia continua in $[a,b]$ e non negativa. Consideriamo il grafico di $f(x)$, cioè la curva di equazione $\Gamma) y = f(x)$[1]. Sussite la seguente

Definizione 2 *Dicesi* **rettangoloide di base** $[a,b]$ **relativo alla funzione** $f(x)$*, il sottoinsieme di* $\mathbb{R}^2$*:*

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \ 0 \le y \le f(x)\right\} \tag{4}$$

[1]Tale curva giace nel semipiano $y \ge 0$, giacché $f(x)$ è non negativa per ipotesi.

Ciò premesso, consideriamo il sottoinsieme di R:

$$\mathcal{R}(\xi) = \{(x, y) \in R \mid a \leq x \leq \xi, \ \ 0 \leq y \leq f(x)\}, \tag{5}$$

essendo $\xi \in [a, b]$. Quindi la funzione reale di variabile reale:

$$F : \xi \to mis\mathcal{R}(\xi), \tag{6}$$

essendo $mis\mathcal{R}(\xi)$ l'area di $\mathcal{R}(\xi)$.
Incrementiamo la variabile ξ:

$$\xi \to \xi + \Delta\xi \mid (\ \xi + \Delta\xi) \in [a, b]$$

Da cui l'incremento di $F(\xi)$:

$$\Delta F = F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)$$

Siano:

$$m(\xi) \stackrel{def}{=} \min_{[\xi, \xi+\Delta\xi]} f(x)$$

$$M(\xi) \stackrel{def}{=} \max_{[\xi, \xi+\Delta\xi]} f(x)$$

Senza perdita di generalità supponiamo che sia $\Delta\xi > 0$:

$$m(\xi)\Delta\xi \leq \Delta F \leq M(\xi)\Delta\xi \Longrightarrow m(\xi) \leq \frac{\Delta F}{\Delta\xi} \leq M(\xi)$$

Per una nota proprietà delle funzioni continue in un intervallo chiuso:

$$\left(m(\xi) \leq \frac{\Delta F}{\Delta\xi} \leq M(\xi)\right) \underset{\substack{f(x) \text{ è continua} \\ \text{in } [\xi, \xi+\Delta\xi]}}{\Longrightarrow} \left(\exists\xi_* \in [\xi, \xi + \Delta\xi] \mid f(\xi_*) = \frac{\Delta F}{\Delta\xi}\right)$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\exists\theta \in [0, 1] \mid \frac{F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)}{\Delta\xi} = f(\xi + \theta\Delta\xi)$$

Da ciò segue (tenendo conto della continuità di $f(x)$):

$$\lim_{\Delta\xi\to 0} \frac{F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)}{\Delta\xi} = f(\xi) \tag{7}$$

Poiché ξ è una variabile muta, la (7) può scriversi:

$$F'(x) = f(x) \tag{8}$$

Cioè la funzione (6) che associa ad ogni $\xi \in [a, b]$ l'area di $\mathcal{R}(\xi)$ è una primitiva di $f(x)$. Da tale conclusione si evince che il problema della ricerca delle funzioni primitive di un'assegnata funzione $f(x)$ è direttamente connesso al problema della misura di un insieme piano.

Misura degli insiemi piani

Fissiamo un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy). Siano $A\left(a', a''\right)$, $B\left(b', b''\right)$ punti del piano, essendo $a' \leq a''$, $b' \leq b''$.

Definizione 3 *Dicesi* **rettangolo chiuso di estremi** *A, B, l'insieme di punti:*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ a' \leq x \leq b',\, a'' \leq y \leq b''\right\} \tag{9}$$

Definizione 4 *Dicesi* **rettangolo aperto di estremi** *A, B, l'insieme di punti:*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ a' < x < b',\, a'' < y < b''\right\} \tag{10}$$

Le suddette definizioni si specializzano nel caso in cui vale la disuguaglianza in senso stretto a sinistra o a destra (**reattangolo semiaperto a sinistra e rettangolo semiaperto a destra**, rispettivamente).

Definizione 5 *Il* **centro** *del rettangolo (9 o 10) è il punto $C\left(x_0, y_0\right)$ tale che:*

$$x_0 = \frac{a' + b'}{2}, \ \ y_0 = \frac{a'' + b''}{2}$$

Le **dimensioni** *del rettangolo (9 o 10) sono i numeri reali non negativi:*

$$2\alpha = b' - a', \ \ 2\beta = b'' - a''$$

Le **semidimensioni** *del rettangolo sono i numeri reali non negativi α, β.*

Assegnato il rettangolo chiuso (9):

$$\begin{aligned} 2x_0 &= a' + b' \\ 2\alpha &= b' - a', \end{aligned}$$

da cui:

$$x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha,$$

o, ciò che è lo stesso:

$$|x - x_0| \leq \alpha$$

Similmente:

$$|y - y_0| \leq \beta$$

Si conclude che il rettangolo chiuso (9) può essere scritto come:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \ |x - x_0| \leq \alpha, \ |y - y_0| \leq \beta\right\}$$

mentre il rettangolo chiuso (10):

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \ |x - x_0| < \alpha, \ |y - y_0| < \beta\right\}$$

Definizione 6 *Dicesi* **intorno rettangolare** *di centro P_0, ogni rettangolo aperto di centro P_0.*

***

Assegnato un punto $P_0\left(x_0, y_0\right)$ e un $r \in (0, +\infty)$:

Definizione 7 *Dicesi* **cerchio chiuso di centro** P_0 ***e raggio*** r*, l'insieme:*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 \leq r^2\right\}$$

Definizione 8 *Dicesi* **cerchio aperto di centro** P_0 ***e raggio*** r*, l'insieme:*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 < r^2\right\}$$

Definizione 9 *Dicesi* **intorno circolare** *di centro P_0, ogni cerchio aperto di centro P_0.*

Nel seguito ci riferiremo indifferentemente ad un intorno rettangolare o circolare di un assegnato punto P del piano. Indicheremo tale intorno con $I\left(P\right)$.

***

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$.

Definizione 10 A *è* **limitato** $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists$ *cerchio* $\gamma \supset A$ *di centro* $O\left(0, 0\right)$
A *è* **non limitato** $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall$ *cerchio* γ *di centro* $O\left(0, 0\right)$, $\left(\mathbb{R} - \gamma\right) \cap A \neq \emptyset$.

Definizione 11 P_0 *è* **interno** *ad* $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists I\left(P_0\right) \subset A$
P_0 *è* **esterno** *ad* $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists I\left(P_0\right) : I\left(P_0\right) \cap A = \emptyset$
P_0 *è* **punto di frontiera** *per* $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall I\left(P_0\right),\ I\left(P_0\right) \nsubseteq A,\ I\left(P_0\right) \cap A \neq \emptyset$

Definizione 12 *Dicesi* **frontiera** *di A l'insieme di punti:*

$$\partial A = \{P \mid \ P \text{ è di frontiera per } A\}$$

Indichiamo con il simbolo $\mathring{A}$ l'insieme dei punti interni di A:

$$\mathring{A} \overset{def}{=} \{P \in A \mid \ P \text{ è punto interno}\}$$

Ciò premesso, sia u l'unità di misura dei segmenti. Conseguentemente l'unità di misura delle aree è u^2. Indichiamo con $\mathcal{P}$ la classe dei poligoni. Ad ogni poligono $\pi \in \mathcal{P}$ possiamo associare la sua misura $\mu\left(\pi\right) \in [0, +\infty)$ rispetto all'unità di misura u. Resta perciò definita la seguente funzione non negativa:

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \tag{11}$$

La (11) verifica le seguenti proprietà:

1. Proprietà additiva:

$$\forall \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P} : \quad \overset{\circ}{\pi}_1 \cap \overset{\circ}{\pi}_2 = \emptyset \Longrightarrow \mu(\pi_1 \cup \pi_2) = \mu(\pi_1) + \mu(\pi_2) \tag{12}$$

2. Invarianza per conguenza:

$$\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P} : \pi_1, \pi_2 \text{ congruenti} \Longrightarrow \mu(\pi_1) = \mu(\pi_2)$$

Consideriamo ora un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ limitato. Se $A \notin \mathcal{P}$, si pone il problema della definizione di $\mu(A)$. A tale scopo costruiamo gli insiemi:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{\pi \in \mathcal{P} \mid \pi \subset A\} \\ \Sigma_2 &= \{\Pi \in \mathcal{P} \mid \Pi \supset A\} \end{aligned} \tag{13}$$

Osservazione 13 *Se A è privo di punti interni, allora $\Sigma_1 = \emptyset$.*

Poniamo:

$$\alpha(A) \overset{def}{=} \{\mu(\pi) \mid \pi \in \Sigma_1\}$$
$$\beta(A) \overset{def}{=} \{\mu(\Pi) \mid \Pi \in \Sigma_2\}$$

Evidentemente:

$$(\forall \pi \in \Sigma_1,\ \forall \Pi \in \Sigma_2,\ \pi \subseteq \Pi) \Longrightarrow \mu(\pi) \leq \mu(\Pi),$$

cioè $\alpha(A)$ e $\beta(A)$ sono insiemi separati.

Definizione 14 *Si definisce* **misura interna** *di A il numero reale non negativo*

$$\mu_i(A) = \sup \alpha(A)$$

Definizione 15 *Si definisce* **misura esterna** *di A il numero reale non negativo*

$$\mu_e(A) = \inf \beta(A)$$

Risulta:

$$\mu_i(A) \leq \mu_e(A)$$

Osservazione 16 *Se A è privo di punti interni:*

$$\Sigma_1 = \emptyset \Longrightarrow \alpha(A) = \emptyset \overset{def}{\Longrightarrow} \mu_i(A) = 0$$

Definizione 17 *L'insieme A è* **misurabile** *(***secondo Peano - Jordan***) se risulta $\mu_i(A) = \mu_e(A)$. In tal caso si pone:*

$$\mu(A) \overset{def}{=} \mu_i(A) = \mu_e(A),$$

essendo $\mu(A)$ la **misura** *di A.*

Osservazione 18 *Se A è misurabile ed è privo di punti interni, segue necessariamente che $\mu(A) = 0$, poiché è $\mu_i(A) = 0$.*
Dalla definizione di misurabilità segue che A è misurabile se e solo se gli insiemi $\alpha(A)$ e $\beta(A)$ sono contigui:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \pi_\varepsilon \in \Sigma_1, \ \exists \Pi_\varepsilon \in \Sigma_2 \mid \mu(\Pi_\varepsilon) - \mu(\pi_\varepsilon) < \varepsilon \tag{14}$$

Nel caso speciale in cui A è misurabile e privo di punti interni, la (14) si scrive:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \Pi_\varepsilon \in \Sigma_2 \mid \mu(\Pi_\varepsilon) < \varepsilon$$

Resta così definita la misura μ degli insiemi limitati $A \subset \mathbb{R}^2$ non appartenenti a $\mathcal{P}$:

$$\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_0^+ \tag{15}$$

essendo:

$$\mathcal{M} = \left\{ A \subset \mathbb{R}^2 \mid A \text{ è limitato e misurabile} \right\} \tag{16}$$

Teorema 19 $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$

Dimostrazione. Osserviamo che i poligoni sono particolari insiemi limitati e misurabili, donde:

$$\forall \pi \in \mathcal{P}, \ \pi \in \mathcal{M} \tag{17}$$

Consideriamo ora un qualunque cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio r:

$$\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2 \right\}$$

Abbiamo: $\mu(\gamma) = \pi r^2$; cio γ limitato e misurabile $\Longrightarrow \gamma \in \mathcal{M}$. Ma $\gamma \notin \mathcal{P}$, donde (tenendo conto della (15)) l'asserto. ■

***

La misura (15) conserva le proprietà (additività e congruenza) della misura (11). Rispetto a quest'ultima possiede la **proprietà di monotonia**:

$$\forall A, B \in \mathcal{M} \mid A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

Altre proprietà.
Se $A, B \in \mathcal{M}$

$$\begin{gathered} A \cup B \in \mathcal{M}, \ A - B \in \mathcal{M}, \ A \cap B \in \mathcal{M} \\ \overset{\circ}{A} \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B) \\ A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B) \\ \forall A, B \in \mathcal{M}, \ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \end{gathered} \tag{18}$$

Dall'ultima delle (18) segue:

$$A, B \in \mathcal{M}, \ \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) \tag{19}$$

Ciò si esprime dicendo che la misura (15) è **subadditiva**.

***

La nozione di misura di un insieme si estende facilmente al caso di insiemi non limitati. A tale scopo sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme non limitato.

Definizione 20

$$A \text{ è misurabile} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall X \in \mathcal{M},\ A \cap X \in \mathcal{M}$$

In tal caso, la misura di A è:

$$\mu(A) = \sup_{X \in \mathcal{M}} \mu(A \cap X) \leq +\infty$$

Precisamente:

$$\mu(A) < +\infty \Longrightarrow A \text{ è di } \textbf{misura finita}$$
$$\mu(A) = +\infty \Longrightarrow A \text{ è di } \textbf{misura infinita}$$

Indichiamo con $\mathcal{R}$ la classe dei rettangoli $\Theta(\alpha, \beta)$ di centro l'origine e dimensioni α, β:

$$\Theta(\alpha, \beta) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \alpha,\ |y| \leq \beta\right\}$$

Ciò premesso, sussiste il seguente

Teorema 21

$$(A \text{ è misurabile}) \Longleftrightarrow (\forall \Theta \in \mathcal{R},\ A \cap \Theta \in \mathcal{M})$$

Se A è misurabile:

$$\mu(A) = \sup_{\Theta \in \mathcal{R}} \mu(A \cap \Theta)$$

Dimostrazione. Implicazione diretta Abbiamo:

$$(A \text{ misurabile}) \Longrightarrow (\forall X \in \mathcal{M},\ A \cap X \in \mathcal{M}) \underset{\mathcal{R} \subset \mathcal{M}}{\Longrightarrow} (\forall \Theta \in \mathcal{R},\ \Theta \cap A \in \mathcal{M})$$

Implicazione inversa L'ipotesi :

$$\forall \Theta \in \mathcal{R},\ A \cap \Theta \in \mathcal{M}$$

Preso ad arbitrio $X \in \mathcal{M}$ scegliamo $\Theta \in \mathcal{R}$ tale che $\Theta \supset X$, donde:

$$A \cap X = (A \cap \Theta) \cap X$$

Quindi

$$A \cap \Theta \in \mathcal{M} \Longrightarrow A \cap X \in \mathcal{M}$$

cio la tesi. Inoltre, nelle medesime ipotesi:

$$\sup_{\Theta \in \mathcal{R}} \mu(A \cap \Theta) \leq \mu(A) \leq \mu(A \cap \Theta) \Longrightarrow \mu(A) = \sup_{\Theta \in \mathcal{R}} \mu(A \cap \Theta)$$

■

Area del rettangoloide

Premettiamo la seguente

Definizione 22 *Sia $A \neq \emptyset$. Gli insiemi non vuoti $A_1, A_2, ..., A_n$ costituiscono una* ***partizione*** *di A se:*

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$$

$$\overset{\circ}{A}_k \bigcap \overset{\circ}{A}_{k'} = \emptyset, \text{ per } k, k' \in \{1, 2, ..., n\} \text{ con } k \neq k'$$

Sia $f(x)$ continua in $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e ivi non negativa. Eseguiamo una partizione dell'intervallo $[a, b]$ attraverso $n + 1$ punti:

$$x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$$

Precisamente:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Si tratta di una partizione, poiché:

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, b] = [a, b]$$

$$\forall k, k' \in \{0, 1, ..., n-1\} \text{ con } k \neq k', \quad (x_k, x_{k+1}) \cap (x_{k'}, x_{k'+1}) = \emptyset$$

Indichiamo tale partizione con il simbolo convenzionale $D(x_0, x_1, ..., x_n)$. Poniamo per definizione:

$$\delta = \max_{k \in \mathcal{N}} (x_{k+1} - x_k), \quad \mathcal{N} = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

Il numero reale $\delta > 0$ si chiama **ampiezza** della partizione. Inoltre, se $f(x)$ non è identicamente nulla consideriamo il minimo e il massimo di $f(x)$ in $[x_k, x_{k+1}]$:

$$m_k = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$
$$M_k = \max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Quindi:

$$r_k \overset{def}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}, \ 0 \leq y \leq m_k \right\} \tag{20}$$
$$R_k \overset{def}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}, \ 0 \leq y \leq M_k \right\}$$

Cioè r_k è il rettangolo di base $[x_k, x_{k+1}]$ e altezza m_k, mentre R_k è il rettangolo di base $[x_k, x_{k+1}]$ e altezza M_k. Restano così definiti i seguenti poligoni:

$$\pi(D)=\bigcup_{k=0}^{n-1} r_k \tag{21}$$

$$\Pi(D)=\bigcup_{k=0}^{n-1} R_k$$

Definizione 23 *$\pi(D)$ è il* ***plurirettangolo inscritto a*** *R associato alla partizione D. $\Pi(D)$ è il* ***plurirettangolo circoscritto a*** *R associato alla partizione D.*

Evidentemente:

$$s_D \overset{def}{=} \mu[\pi(D)]=\sum_{k=0}^{n-1}\mu(r_k)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k) \tag{22}$$

$$S_D \overset{def}{=} \mu[\Pi(D)]=\sum_{k=0}^{n-1}\mu(R_k)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)$$

Inoltre:

$$\forall D, D', \, \pi(D)\subseteq \Pi(D') \Longrightarrow \forall D, D', \;\; s_D \leq S_{D'}$$

Teorema 24 *Nelle suddette ipotesi il rettangoloide*

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leq x\leq b,\, 0\leq y\leq f(x)\right\}$$

è misurabile, risultando:

$$\mu(R)=\sup_D s_D=\inf_D S_D$$

Dimostrazione. Se $f(x)$ identicamente nulla, l'asserto banale:

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leq x\leq b,\, y=0\right\}\Longrightarrow \mu(R)=0$$

$$\forall D,\; s_D=S_D=0\Longrightarrow \sup_D s_D=\inf_D S_D=0$$

Consideriamo quindi il caso non banale, cio $f(x)$ non identicamente nulla in $[a,b]$. Per il teorema di Heine-Cantor, la funzione ivi uniformemente continua, per cui:

$$\forall\varepsilon>0,\, \exists\delta_\varepsilon>0 : x', x''\in[a,b],\;\; |x'-x''|<\delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Eseguiamo una partizione $\bar{D}(x_0,x_1,...,x_n)$ dell'intervallo $[a,b]$ di ampiezza $\bar{\delta}<\delta_\varepsilon$. Siano

$$\bar{x}_k, \bar{x}'_k \in [x_k, x_{k+1}] : f(\bar{x}_k)=m_k,\; f(\bar{x}'_k)=M_k$$

Quindi:

$$|\bar{x}'_k-\bar{x}_k|\leq x_{k+1}-x_k\leq\bar{\delta}<\delta_\varepsilon\Longrightarrow M_k-m_k<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Inoltre:

$$S_{\bar{D}} - s_{\bar{D}} = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \varepsilon$$

Ma $S_{\bar{D}}$ e $s_{\bar{D}}$ sono le aree di due poligoni:

$$\pi\left(\bar{D}\right) = \pi_\varepsilon$$
$$\Pi\left(\bar{D}\right) = \Pi_\varepsilon$$

Perci:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \Pi_\varepsilon, \pi_\varepsilon : \mu(\Pi_\varepsilon) - \mu(\pi_\varepsilon) < \varepsilon$$

ci implica la misurabilit di R. Infine:

$$s_{\bar{D}} \leq \mu(R), \, s_{\bar{D}} > S_D - \varepsilon,$$

cio:

$$S_{\bar{D}} - \mu(R) < \varepsilon \tag{23}$$

Similmente:

$$\mu(R) \leq S_{\bar{D}}, \, S_{\bar{D}} < s_{\bar{D}} + \varepsilon$$

per cui:

$$\mu(R) - s_{\bar{D}} < \varepsilon \tag{24}$$

Dalle (23)-(24) segue:

$$\mu(R) = \sup_D s_{\bar{D}} = \inf_D S_{\bar{D}}$$

■

***

Dal teorema appena dimostrato segue che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall D(x_0, x_1, ..., x_n)$:

$$\begin{aligned} s_D = & \text{ valore approssimato per difetto di } \mu(R) \\ S_D = & \text{ valore approssimato per eccesso di } \mu(R) \end{aligned}$$

Scegliere come valore approssimato di $\mu(R)$ la somma s_D, equivale ad approssimare $\forall k \in \mathcal{N}$, il rettangoloide:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}, \, 0 \leq y \leq f(x)\right\} \tag{25}$$

con il rettangolo r_k in esso inscritto. Viceversa, scegliere come valore approssimato di $\mu(R)$ la somma S_D, equivale ad approssimare $\forall k \in \mathcal{N}$, il rettangoloide (25) con il rettangolo R_k ad esso circoscritto.

Ora poniamo:

$$\forall k \in \mathcal{N}, \, \tau_k \stackrel{def}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}, \, 0 \leq y \leq \eta_k\right\},$$

essendo $\eta_k \in [m_k, M_k]$.

Il poligono:

$$\tau(D) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \tau_k$$

è un plurirettangolo che non è inscritto ad R e al tempo stesso non è circoscritto ad R.

$$\sigma_D \stackrel{def}{=} \mu(\tau(D)) \Longrightarrow s_D \leq \sigma_D \leq S_D$$

Il numero reale σ_D è comunque un valore approssimato di $\mu(R)$. Inoltre:

$$(m_k \leq \eta_k \leq M_k) \underset{\substack{f(x) \text{ è continua} \\ \text{in } [x_k, x_{k+1}]}}{\Longrightarrow} (\exists \xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \mid f(\xi_k) = \eta_k)$$

Quindi:

$$\mu(\tau_k) = f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \Longrightarrow \sigma_D = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\tau_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{26}$$

Dalla (26) segue che σ_D dipende da ξ_k per ogni $k \in \mathcal{N}$.

$$\forall \xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \text{ (con } k \in \mathcal{N}\text{)}, \, s_D \leq \sigma_D \leq S_D \Longrightarrow |\sigma_D - \mu(R)| \leq S_D - s_D$$

Dalla dimostrazione dell'ultimo teorema segue

Teorema 25

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall D \; (\delta < \delta_\varepsilon), \; |\sigma_D - \mu(R)| < \varepsilon \tag{27}$$

La (27) può essere scritta nela forma simbolica:

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma_D = \mu(R) \tag{28}$$

Si osservi che la (28) non è l'usuale operazione di passaggio al limite, giacché σ_D non una funzione ad un sol valore di δ. Infatti, assegnato un numero reale positivo $\delta < b - a$, esistono infinite partizioni di ampiezza δ, e per ciascuna partizione esistono infiniti valori di σ_D, giacché questi ultimi dipendono dai punti ξ_k (che possono essere scelti in infiniti modi). Da ciò si conclude che σ_D è una funzione ad infiniti valori di δ. Pertanto, la (28) andrebbe riscritta nella forma:

$$\sigma_D \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} \mu(R),$$

e cioè le somme σ_D tendono all'area del rettangoloide, quando la loro ampiezza tende a zero.

***

Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e ivi non positiva. In tal caso il rettangoloide di base $[a,b]$, relativo a $f(x)$, si ridefinisce:

$$R \stackrel{def}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq 0\right\}$$

Indichiamo con R' il rettangoloide di base $[a,b]$, relativo a $-f(x)$. È facile convincersi che R' è simmetrico a R rispetto all'asse x.
Per i teoremi precedenti si ha che R' è misurabile:

$$\mu(R') = \lim_{\delta \to 0} \sigma'_D, \tag{29}$$

essendo:

$$\begin{aligned} \sigma'_D &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[-f(\xi_k)\right](x_{k+1} - x_k) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= -\sigma_D, \end{aligned} \tag{30}$$

per una generica partizione D di ampiezza δ, e per ogni $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Dalle (29)-(30) segue

$$\mu(R') = -\lim_{\delta \to 0} \sigma_D$$

Dalla misurabilità di R' e dalla simmetria tra R' e R, segue che R è misurabile:

$$\mu(R) = \mu(R'),$$

donde:

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma_D = -\mu(R) \tag{31}$$