

# Integrali di curva e di superficie

L. Pandolfi

E' utile premettere alcune considerazioni sulle curve piane, che godono di particolari proprietà che è bene vedere esplicitamente.

## 1 Curve piane

E' importante sapere che vale il teorema seguente, di enunciato del tutto intuitivo ma di dimostrazione molto complessa:

**Teorema 1 (teorema di Jordan)** Sia  $\gamma$  una curva piana chiusa e semplice. Il complementare del sostegno di  $\gamma$  è unione di due regioni. Una di esse è illimitata (e si dice **esterna** alla curva) mentre l'altra è limitata e si dice la regione **interna** alla curva.

Ovviamente, non esiste alcun "teorema di Jordan" per curve dello spazio!

Usa chiamare *regione di Jordan* la regione interna ad una curva piana semplice e chiusa.

Se  $\gamma$  indica la curva, conviene indicare con  $\Omega_\gamma$  la sua regione interna.

La regione interna ad una curva piana semplice e chiusa può essere assai complicata; ma nella maggior parte dei casi che si incontrano nelle applicazioni sarà facile identificarla. Per esempio, se  $\gamma$  è parametrizzata da  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , la regione interna è il disco centrato in  $O$  e di raggio 1.

Ricordiamo che  $\mathbf{R}^2$  può venire orientato con la regola seguente: la coppia dei vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , presi in quest'ordine, è orientata positivamente quando la semiretta che congiunge  $\mathbf{v}$  all'origine deve ruotare in verso *antiorario* per portarsi su quella che congiunge  $\mathbf{w}$  all'origine, percorrendo l'angolo minore possibile. Si veda la figura 1. Si noti che la rotazione che porta il versore  $\mathbf{i}$ , primo elemento della base canonica, su  $\mathbf{j}$  secondo l'angolo minore è la rotazione di  $\pi/2$  in verso antiorario. Per questo diremo che l'orientazione descritta in  $\mathbf{R}^2$  è quella subordinata dalla base canonica.

Questa definizione può anche riformularsi mediante la *regola d'Ampère*: una persona stando in piedi sul piano  $xy$  nel verso positivo dell'asse delle quote vede la semiretta muoversi in verso antiorario, passando dalla sua destra alla sua sinistra.

Sia ora  $\gamma$  una curva piana semplice e chiusa. Ricordiamo che il suo sostegno è sostegno, oltre che di  $\gamma$ , soltanto di una seconda curva  $\tilde{\gamma}$ , che si ottiene "andando all'indietro". Diciamo che  $\gamma$  è **orientata** in modo concorde a  $\mathbf{R}^2$  se vale la *regola d'Ampère*: una persona in piedi in un punto della regione interna alla curva, stando in piedi come l'asse delle quote positivo, vede un punto mobile sulla curva passare dalla sua destra alla sua sinistra; equivalentemente, un insetto che segue il punto mobile su una curva semplice e chiusa vede la regione interna alla sua sinistra, si veda la figura 2.

Una curva piana orientata in modo concorde ad  $\mathbf{R}^2$  si dice **orientata positivamente**.

Supponiamo ora che la curva piana semplice e chiusa  $\gamma$  sia anche regolare, così che si possono definire sia il vettore tangente  $\mathbf{t}(s)$  che il vettore normale  $\mathbf{n}(s)$ . Il vettore normale  $\mathbf{n}(s)$  può puntare sia verso la regione interna che verso la regione

Figura 1:

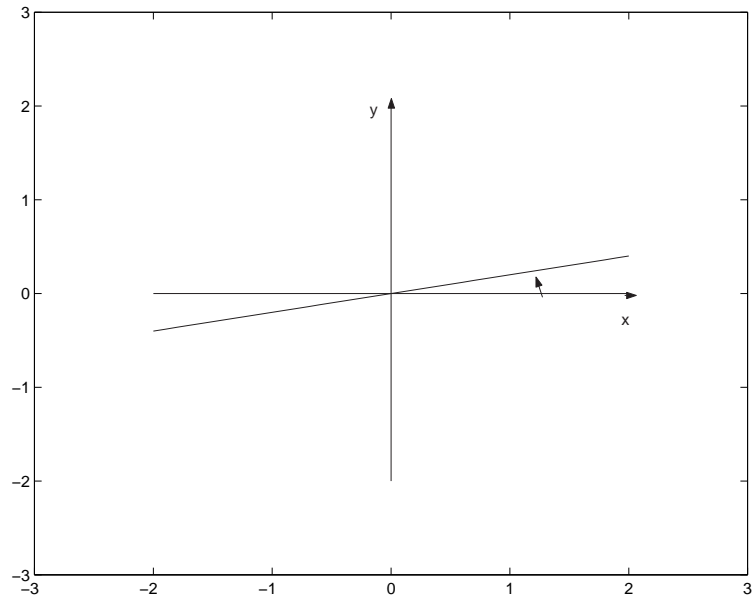
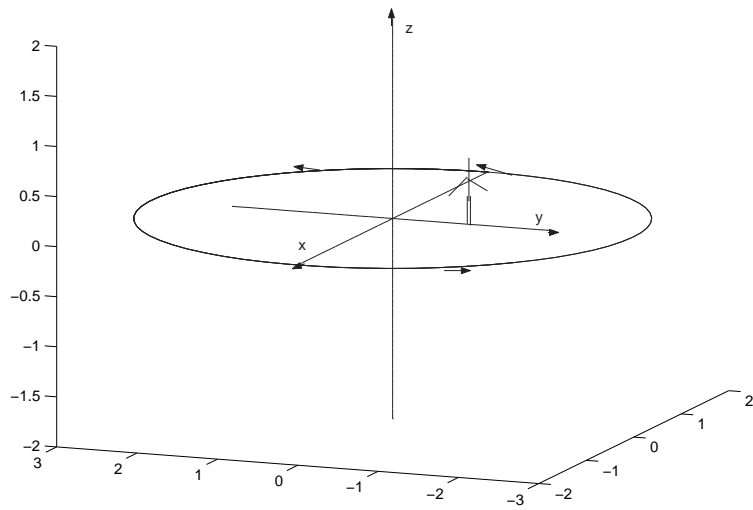


Figura 2:



esterna alla curva. Per il seguito avremo bisogno del vettore normale che punta verso la regione **esterna** alla curva. Lo indicheremo col simbolo

$$\mathbf{n}_e(s)$$

e lo chiameremo la *normale* esterna.

Torniamo ad usare il fatto che il sostegno di una curva semplice e chiusa è sostegno anche di una seconda curva, che si ottiene dalla prima “girando in verso opposto”. Quest’osservazione permette di introdurre un linguaggio più informale. Supponiamo che si sappia che un certo insieme del piano è il sostegno di una curva semplice e chiusa. Per esempio che l’insieme sia un quadrato o una circonferenza. Invece di scrivere esplicitamente la parametrizzazione della curva, possiamo indicare il sostegno e implicitamente intendere di scegliere quella curva semplice che ha il sostegno dato e che è orientata in modo concorde con  $\mathbf{R}^2$ , ossia che ha orientazione positiva, senza dover esplicitamente scrivere una sua parametrizzazione. In particolare, se  $\Omega$  è la regione interna ad una curva semplice e chiusa  $\gamma$ , e se vogliamo che  $\gamma$  sia orientata positivamente, potremo semplicemente indicarla come “frontiera di  $\Omega$ ”,  $\partial\Omega$ .

## 1.1 Integrali di curva di seconda specie

La definizione che ora andiamo a dare (già studiata nel corso di Analisi Matematica 1) generalizza quella che si usa in fisica per il calcolo di un lavoro.

**Esempio 2** Supponiamo che in ogni punto  $\mathbf{r}$  dello spazio agisca una forza  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ . Un punto materiale di massa  $m$  si muova sotto l’azione di questa forza, descrivendo un’arco  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Il parametro  $t$  rappresenta ora il *tempo*.

Si vuol valutare il lavoro compiuto dalla forza.

Dividendo ancora il percorso del punto in tanti “piccoli pezzetti”, interessa ora valutare il prodotto scalare della forza agente su ciascun “pezzetto” per lo *spostamento* del punto. Lo *spostamento* è un vettore, a differenza della lunghezza percorsa che è un numero.

Quando  $t$  varia da  $t_i$  a  $t_{i+1}$  lo spostamento è circa  $\mathbf{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$  e quindi il lavoro compiuto è circa

$$[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \mathbf{r}'(t_i)](t_{i+1} - t_i).$$

La somma di tutti questi “lavori elementari” è

$$\sum_{i=0}^{N-1} [\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \mathbf{r}'(t_i)](t_{i+1} - t_i)$$

e, per calcolare il lavoro della forza bisogna studiare il comportamento di queste somme, quando la finezza della suddivisione dell’intervallo  $[a, b]$  tende a zero. Si sa che in questo modo si arriva a calcolare l’integrale su  $[a, b]$  della funzione

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t). \quad \blacksquare$$

Seguendo il suggerimento dell'esempio precedente definiamo l'*integrale di curva di seconda specie* come segue: si assegna un campo vettoriale  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  e un arco  $\gamma$ , parametrizzato da  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Si definisce

$$\int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} =_{\text{def}} \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot [\mathbf{r}'(t)] dt. \quad (1)$$

Nel caso particolare  $n = 3$  e  $\mathbf{V}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$  si trova:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b [f(x(t), y(t), z(t))x'(t) + g(x(t), y(t), z(t))y'(t) + h(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt. \end{aligned}$$

E' immediato verificare, usando la formula di cambiamento di variabili:

**Teorema 3** *Il valore dell'integrale di curva di seconda specie non muta cambiando parametrizzazione; cambia di segno cambiando verso di percorrenza.*

E' ovvio inoltre che se si divide un arco  $\gamma$  in due archi  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ,

$$\gamma_1 : t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b]; \quad \gamma_2 : t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [b, c]; \quad \gamma : t \rightarrow \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, c]$$

allora vale

$$\int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Diciamo infine che una curva chiusa si chiama anche un *circuito* e che l'integrale di un campo vettoriale  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  lungo una curva chiusa si chiama anche la *circuitazione* del campo vettoriale lungo  $\gamma$ .

E' interessante confrontare le definizioni degli integrali di curva di prima e seconda specie nel caso particolare in cui  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\mathbf{i}$ . In questo caso

$$\int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))x'(t) dt$$

mentre

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Questi due integrali non si riconducono l'uno all'altro nemmeno nel caso in cui  $y(t)$  e  $z(t)$  sono identicamente zero. Infatti, in tal caso essi vengono ad essere, rispettivamente,

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt, \quad \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |x'(t)| dt.$$

## 1.2 Integrali di curva di seconda specie e forme differenziali

L'integrale di curva di seconda specie si calcola quando è dato un campo vettoriale  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ . Dunque, possiamo vedere il campo vettoriale come operante sulla curva  $\gamma$  (nell'esempio fisico 2 esso "spinge" il punto materiale lungo la curva) e alla curva associa un numero. Vedremo che altri campi vettoriali si usano per associare numeri alle superfici. Dunque conviene distinguere i due casi, introducendo termini e notazioni diverse. Nel caso che stiamo considerando, il campo vettoriale agisce su una curva. Chiamiamolo 1-forma differenziale (il numero 1 ricorda che si agisce su una curva, un oggetto che, intuitivamente, ha dimensione 1, come un segmento o un filo). Inoltre, invece di indicarlo col simbolo  $\mathbf{V}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$  indichiamolo col simbolo

$$f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz .$$

Non vogliamo dare nessun significato particolare ai simboli  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ . Essi sono suggeriti dalla formula (1). Ricordiamo però che nel caso dell'integrale su un intervallo, si conserva la notazione " $dx$ " perché questa aiuta a ricordare certe formule. Vedremo che qualcosa di analogo accade anche in questo caso.

L'integrale di curva di seconda specie si chiama anche *l'integrale di curva della 1-forma* differenziale e si indica anche col simbolo

$$\int_{\gamma} f dx + g dy + h dz$$

(sottintendendo la dipendenza di  $f$ ,  $g$  e  $h$  da  $x$ ,  $y$  e  $z$ ).

Una regola mnemonica per ottenere la formula (1), per esempio nel caso  $n = 3$ , consiste nel sostituire  $x$ ,  $y$  e  $z$  con  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  e quindi  $dx$  con  $x'(t) dt$ ,  $dy$  con  $y'(t) dt$  e  $dz$  con  $z'(t) dt$  e nell'integrare da  $a$  fino a  $b$ .

Concludiamo notando che spesso una forma differenziale si indica con una lettera greca minuscola tratta dalla fine dell'alfabeto, come  $\omega$ ,

$$\omega = f dx + g dy + h dz .$$

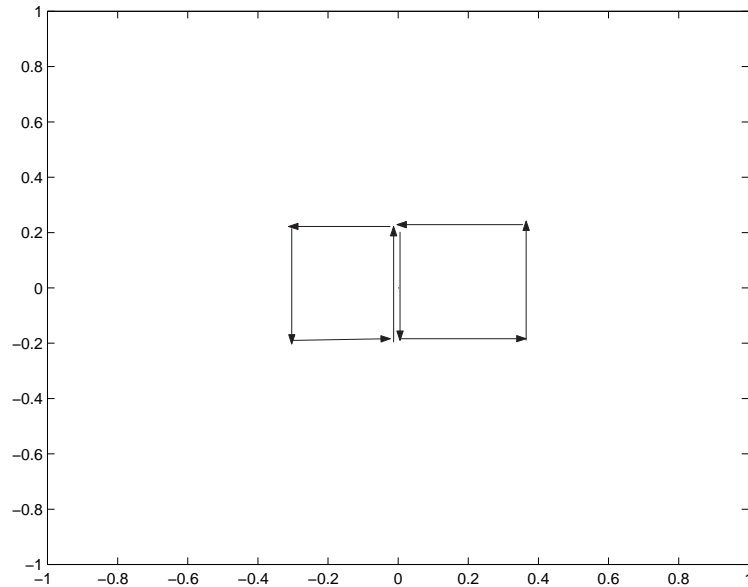
Con tale notazione l'integrale della forma differenziale si indica

$$\int_{\gamma} \omega .$$

Supponiamo ora che un arco  $\gamma$  ripassi due volte su un arco  $\gamma_1$ , percorrendolo in versi opposti. Allora, nel calcolo dell'integrale di una forma differenziale,  $\gamma_1$  non dà contributo. In particolare, si consideri la figura 3. Nella figura, i due lati affiancati vanno pensati sovrapposti e sono il sostegno dell'arco  $\gamma_1$ . Sono stati disegnati soltanto affiancati per chiarezza.

Sia  $\gamma$  la curva ottenuta percorrendo il circuito, col verso indicato dalle frecce (e quindi percorrendo  $\gamma_1$  due volte, in versi opposti).

Figura 3:



Indichiamo con  $\gamma_s$  la curva il cui sostegno è il quadrato di sinistra e con  $\gamma_d$  quella il cui sostegno è il quadrato di destra. Nella somma

$$\int_{\gamma_s} \omega + \int_{\gamma_d} \omega$$

il contributo di  $\gamma_1$  si elide e si trova

$$\int_{\gamma_s} \omega + \int_{\gamma_d} \omega = \int_{\gamma} \omega \quad (2)$$

ove  $\gamma$  è la curva il cui sostegno è il rettangolo che si ottiene sopprimendo il lato comune ai due quadrati.

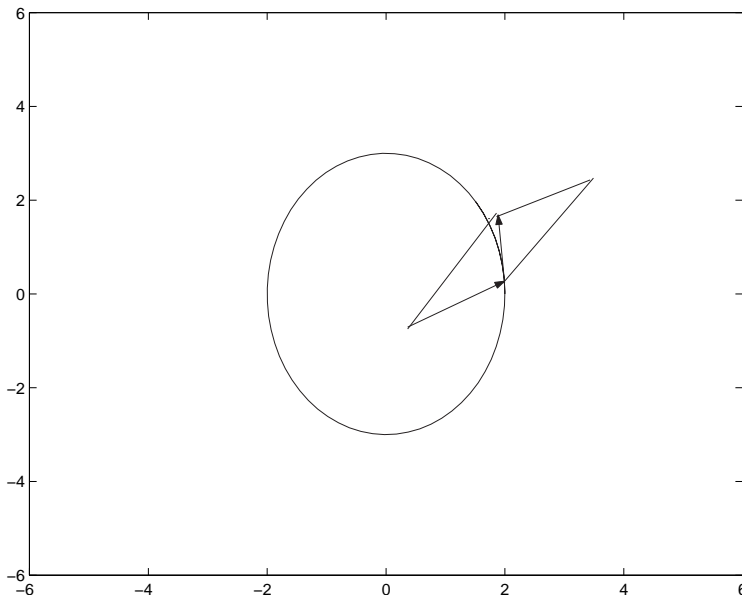
Naturalmente nelle considerazioni precedenti il fatto che le curve siano ottenute per mezzo di segmenti rettilinei non ha alcuna importanza.

Infine, diciamo che la forma differenziale

$$\omega = f dx + g dy + h dz$$

è di classe  $C^1$  quando sono di classe  $C^1$  i suoi coefficienti, ossia le funzioni  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$ , e  $h(x, y, z)$ .

Figura 4:



### 1.2.1 Le forme differenziali e le aree piane

Sia  $\gamma: t \rightarrow \mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  un arco piano regolare, semplice e chiuso e sia  $\Omega_\gamma$  la sua regione interna. Si sa che l'area della regione  $\Omega_\gamma$  è data da

$$\int_{\Omega_\gamma} 1 \, dx \, dy.$$

Vogliamo mostrare un'altra formula per il calcolo di quest'area, che fa intervenire una forma differenziale.

Per semplicità di esposizione, assumiamo che l'origine degli assi appartenga alla regione interna  $\Omega_\gamma$  (caso a cui ci si può sempre ricondurre mediante una traslazione).

Si consideri la figura 4. Il punto  $\mathbf{r}(t)$  varia sull'arco. Dividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in "piccoli" intervalli, dividendolo con i punti  $t_i$  (equidistanti per semplicità). Approssimiamo l'arco  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  col segmento di tangente

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_i) + \mathbf{r}'(t_i)(t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

come in figura 4. Consideriamo i triangoli di vertici l'origine, il punto  $\mathbf{r}(t_i)$  e il secondo estremo del segmento di tangente. Si potrebbe provare che quando la finezza della partizione di  $[a, b]$  tende a zero, la somma delle aree di questi triangoli tende all'area di  $\Omega_\gamma$ , pur di intendere l'area di tali triangoli con segno, in modo da cancellare le parti di area esterne alla  $\Omega_\gamma$ , e eventuali parti di area coperte più volte.

L'area (con segno) di ciascuno di questi triangoli è la metà della componente lungo l'asse  $z$  del prodotto vettoriale dei vettori  $\mathbf{r}(t_i)$  e  $\mathbf{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$ . Per approssimare l'area di  $\Omega_\gamma$  dobbiamo quindi sommare la componenti lungo l'asse verticale di

$$\frac{1}{2} \mathbf{r}(t_i) \wedge \mathbf{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Si trova così

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [x(t_i)y'(t_i) - y(t_i)x'(t_i)](t_{i+1} - t_i).$$

Al tendere a zero della finezza della partizione queste somme approssimano

$$\frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt = \frac{1}{2} \int_\gamma [-y dx + x dy]. \quad (3)$$

L'argomento precedente non è rigoroso, ma può pienamente giustificarsi.

Chiediamoci ora se l'integrale precedente restituisce l'area di  $\Omega_\gamma$ , oppure l'area col segno negativo. Si vede subito dalla figura 4 che la somma delle aree dei triangoli viene positiva quando l'orientazione della curva è concorde con quella di  $\mathbf{R}^2$ ; ossia quando la curva è orientata positivamente. Si può quindi enunciare il risultato seguente:

**Teorema 4** *Sia  $\Omega$  la regione interna ad un arco semplice e chiuso, orientato positivamente. Vale:*

$$\int_\Omega 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} [-y dx + x dy].$$

Si ricordi che  $\partial\Omega$  indica quella curva semplice che ha per sostegno la frontiera di  $\Omega$  e che è positivamente orientata.

Mostriamo ora due generalizzazioni delle formule precedenti.

### 1.3 Formula di Stokes *nel piano*

Consideriamo l'integrale di una forma differenziale di classe  $C^1$ ,  $\omega = f dx + g dy$ :

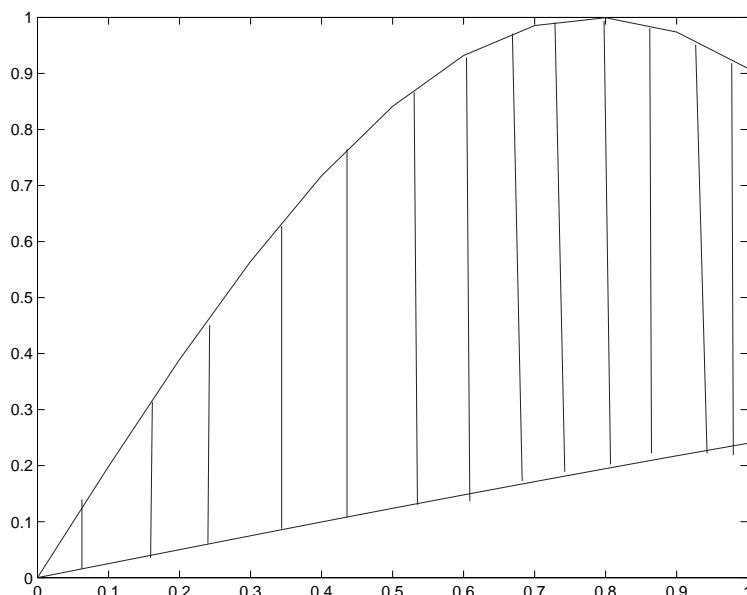
$$\int_{\partial\Omega} [f dx + g dy].$$

Studiamo il caso particolare in cui  $\Omega$  è la parte di piano compresa tra il trapezoide della funzione  $\psi(x)$  e quello della funzione  $\phi(x)$ , per  $x \in [a, b]$ . Per fissare le idee supponiamo che sia  $\psi(x) > \phi(x)$ . La frontiera di  $\Omega$  è quindi una curva regolare a tratti, composta dai due grafici e dai segmenti verticali congiungenti i loro estremi.

Calcoliamo

$$\int_\Omega f_y(x, y) dx dy.$$

Figura 5:



Il calcolo dell'integrale doppio di  $f_y(x, y)$  su  $\Omega$  si riconduce al calcolo dell'integrale iterato e vale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_y(x, y) \, dx \, dy &= \int_a^b \left[ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f_y(x, y) \, dy \right] dx \\ &= \int_a^b [f(x, \psi(x)) - f(x, \phi(x))] \, dx = - \int_{\partial\Omega} [f \, dx + 0 \, dy]. \end{aligned} \quad (4)$$

In modo analogo si vede che

$$\int_{\Omega} g_x(x, y) \, dx \, dy = + \int_{\partial\Omega} [0 \, dx + g \, dy]. \quad (5)$$

Sottraendo la (5) dalla (4) si trova la formula di Stokes

$$\int_{\Omega} [g_x(x, y) - f_y(x, y)] \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f \, dx + g \, dy. \quad (6)$$

**Osservazione 5** Si noti che  $[g_x(x, y) - f_y(x, y)]$  è la componente lungo il versore  $\mathbf{k}$  del rotore del campo vettoriale  $\mathbf{V}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ . La formula (6) si scrive quindi come

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{V}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} . \quad (7)$$

Col linguaggio dei campi vettoriali la formula si interpreta come segue: il flusso del rotore del campo vettoriale  $\mathbf{V}(x, y)$  attraverso la superficie piana  $\Omega$  è uguale alla circuitazione del campo vettoriale stesso lungo  $\partial\Omega$ . Naturalmente si sottintende che  $\partial\Omega$  sia positivamente orientata. ■

La *formula di Stokes* è stata provata per una regione molto particolare. In realtà vale:

**Teorema 6** *La formula di Stokes (12) vale per ogni regione  $\Omega_\gamma$ , con  $\gamma$  curva regolare a tratti.*

Si è detto che il simbolo “d” si conserva dentro il simbolo di integrale perché aiuta a ricordare le formule. In apparenza ciò non accade per la formula precedente. E’ però possibile introdurre dei simboli comodi come segue. Se  $f(x, y)$  è una funzione, con  $df(x, y)$  indichiamo la forma differenziale

$$df(x, y) = f_x(x, y) \, dx + f_y(x, y) \, dy .$$

Se  $\omega$  è una 1-forma differenziale, definiamo

$$d\omega = d\{f \, dx + g \, dy\} = f_x \, dx \, dx + f_y \, dy \, dx + g_x \, dx \, dy + g_y \, dy \, dy .$$

Ora introduciamo le regole seguenti:

$$dx \, dx = 0, \quad dy \, dy = 0, \quad dy \, dx = -dx \, dy, \quad (8)$$

suggerite dalle regole con le quali si calcola il prodotto vettoriale, (esplicitamente usato nel calcolo dell’area e nella formula (12)):

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} .$$

In questo modo si trova

$$d\omega = [-f_y + g_x] \, dx \, dy \quad (9)$$

e questo è proprio l’integrando dell’integrale doppia in (6). Dunque, un modo per ricordare la (6) è di scriverla come

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} [f \, dx + g \, dy] = \int_{\Omega} d[f \, dx + g \, dy] = \int_{\Omega} d\omega . \quad (10)$$

Questa osservazione, puramente “mnemonica” si può generalizzare ottenendo tutta una serie di regole importanti. Alcune di queste si vedranno in seguito.

### 1.3.1 Il teorema della divergenza nel piano

Notiamo che il valore dell'integrale a sinistra in (6) non dipende dalla parametrizzazione di  $\gamma$  e quindi possiamo pensare di aver parametrizzato  $\partial\Omega$ , percorsa in senso positivo, mediante il parametro d'arco. In questo caso,

$$\mathbf{t}(s) = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$$

è il versore tangente mentre il versore normale, orientato verso la regione esterna, è

$$\mathbf{n}_e(s) = y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}.$$

Torniamo ora alle uguaglianze (4) e (5). Invece di sottrarle l'una dall'altra, sommiamole. Si trova

$$\int_{\Omega} [g_x(x, y) + f_y(x, y)] dx dy = \int_{\partial\Omega} [g(x, y) dy - f(x, y) dx] \quad (11)$$

(se  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  sono identicamente uguali ad 1, si ritrova la formula dell'area).

Indichiamo con  $\mathbf{W}(x, y)$  il campo vettoriale

$$\mathbf{W}(x, y) = g(x, y)\mathbf{i} + f(x, y)\mathbf{j}.$$

Con questa notazione, la (11) può scriversi nella forma

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{W}(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_e ds. \quad (12)$$

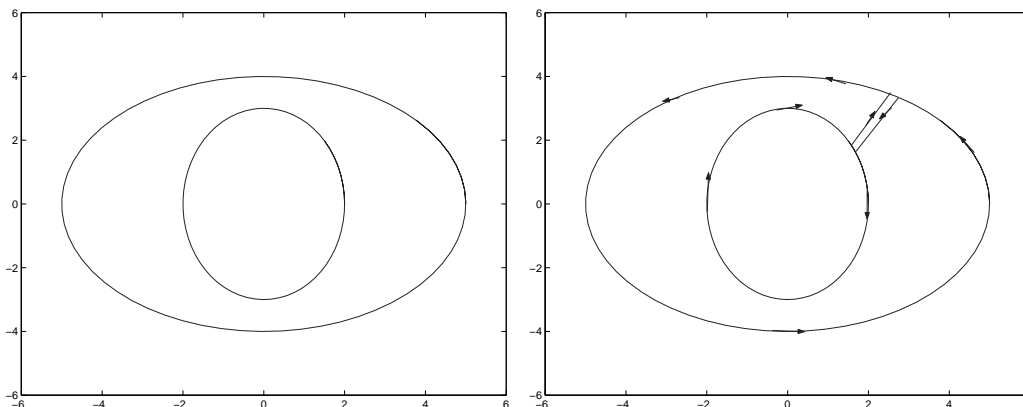
Quest'uguaglianza si chiama *formula della divergenza* (o anche *formula di Gauss*) nel piano. Essa si interpreta come segue: il flusso uscente da  $\gamma$  del campo vettoriale  $\mathbf{W}$  è uguale all'integrale sulla superficie della sua divergenza. Quest'interpretazione in particolare spiega l'uso del termine "divergenza".

### 1.4 Le ipotesi e le estensioni

E' bene discutere un po' meglio le ipotesi sotto le quali sono state ricavate le formule precedenti, e mostrare un'estensione. Senza voler presentare le ipotesi più deboli possibile, diciamo che si riesce a dare un senso alle formule precedenti quando la frontiera della regione  $\Omega$  è una curva regolare a tratti e quando le componenti del campo vettoriale sono derivabili in una regione più grande, che contiene sia  $\Omega$  che la sua frontiera.

Tenendo conto di quest'osservazione, mostriamo ora un'estensione importante sia della formula della divergenza che della formula di Stokes. Si tratta di un'estensione di queste formule a regioni delimitate da più curve, come nel caso rappresentato dalla figura 6, a sinistra.

Figura 6:



Sia  $\mathbf{V}(x, y)$  un campo vettoriale le cui componenti sono di classe  $C^1$  in una regione che contiene sia le curve  $\gamma_1$  che  $\gamma_2$ , sia la regione da esse delimitata. Chiamiamo  $\Omega$  la regione delimitata dalle curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

Introduciamo due segmenti,  $S_1$  ed  $S_2$ , come nella figura a destra, e due piccoli tagli uno su  $\gamma_1$  e l'altro su  $\gamma_2$ , in corrispondenza a tali segmenti. Si ottiene in questo modo una curva  $\tilde{\gamma}$  che verifica sia le condizioni della formula della divergenza che quelle della formula di Stokes. Vale quindi

$$\int_{\Omega_{\tilde{\gamma}}} [g_x(x, y) - f_y(x, y)] dx dy = \int_{\tilde{\gamma}} f dx + g dy,$$

$$\int_{\Omega_{\tilde{\gamma}}} [g_x(x, y) + f_y(x, y)] dx dy = \int_{\tilde{\gamma}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_e ds.$$

Quando  $S_1$  ed  $S_2$  tendono l'uno all'altro gli integrali lungo i due segmenti si elidono, gli integrali sui due tagli tendono a zero e l'integrale sulla regione interna a  $\tilde{\gamma}$  tende all'integrale su  $\Omega$ . Si trova quindi

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{V}) \cdot \mathbf{k} dx dy = \int_{\gamma_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r},$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{V} dx dy = \int_{\gamma_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_e ds - \int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_e ds.$$

Si noti che il segno negativo viene perchè la curva interna va considerata orientata negativamente, mentre abbiamo convenuto che nel simbolo  $\int_{\gamma}$  la curva debba essere orientata positivamente.

Nel caso particolare in cui si abbia

$$g_x = f_y$$

la formula precedente mostra che

$$\int_{\gamma_1} f dx + g dy = \int_{\gamma_2} f dx + g dy;$$

Se invece la divergenza è nulla si trova che il flusso del campo vettoriale entrante attraverso  $\gamma_1$  è uguale a quello uscente attraverso  $\gamma_2$ .

## 2 Integrali di superficie

### 2.1 Integrali di superfici di prima specie

Così come per le curve, anche sulle superfici si definiscono due tipi diversi di integrali. Il primo è suggerito dal problema del calcolo della massa di una superficie, quando la densità  $\rho$  varia da punto a punto. Per definizione la densità in un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  della superficie si definisce in questo modo: si considera un quadrato della regione  $\Omega$ , la cui immagine sulla superficie contiene  $(x_0, y_0, z_0)$ . Sia  $\mathcal{C}$  la calotta immagine di tale quadrato e sia  $m(\mathcal{C})$  la massa della calotta,  $A(\mathcal{C})$  la sua area. La densità media è

$$\frac{m(\mathcal{C})}{A(\mathcal{C})}.$$

La densità  $\rho(x_0, y_0, z_0)$  nel punto  $(x_0, y_0, z_0)$  è il limite di tale rapporto quando il quadrato si stringe sul punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . Non meraviglia quindi che per ritrovare la massa totale della calotta che si ottiene quando  $(u, v)$  varia in una regione  $\Omega_\gamma$ , delimitata da una curva semplice e chiusa  $\gamma$ , si debba calcolare

$$\int_{\Omega_\gamma} \rho(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{N}(u, v)| du dv.$$

In generale, un integrale della forma

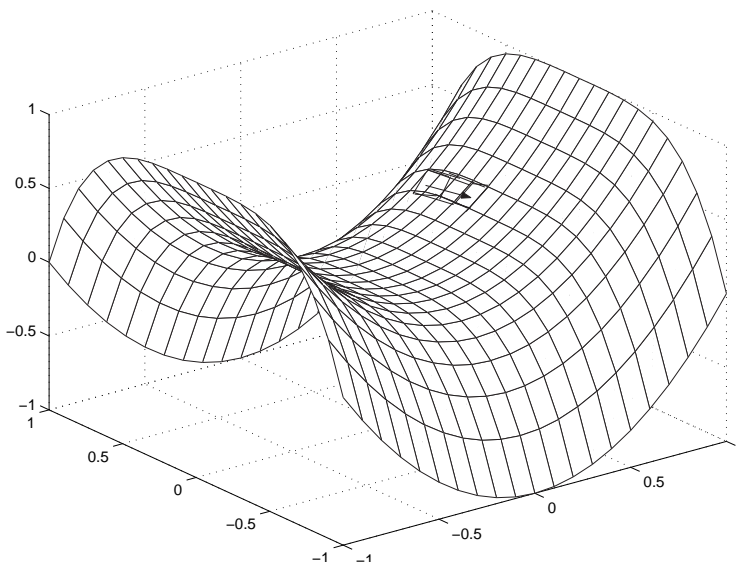
$$\int_{\Omega_\gamma} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{N}(u, v)| du dv. \quad (13)$$

(con  $f(x, y, z)$  funzione continua definita sulla calotta) si chiama *integrale di superficie di prima specie* o semplicemente *integrale di superficie*.

E' chiaro che il valore dell'integrale non cambia cambiando l'orientazione della superficie, dato che nell'espressione dell'integrale figura non direttamente  $\mathbf{N}$ , ma il suo modulo. Oltre a ciò si potrebbe provare:

**Teorema 7** *L'integrale di superficie di prima specie non muta cambiando parametrizzazione.*

Figura 7:



Invece di usare la notazione (13) si usa in genere la notazione

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\Sigma \quad \text{oppure} \quad \int_{\Sigma} f(x, y, z) dA$$

( $A$  iniziale di “area” ).

## 2.2 Integrale di superficie di seconda specie

L’integrale di superficie di seconda specie è suggerito dal calcolo del flusso. Sia  $\mathbf{V}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$  un campo vettoriale che però ora non interpretiamo come campo di forze. Piuttosto pensiamo che un fluido riempia tutto lo spazio e che la particella che passa per il punto  $(x, y, z)$  ci passi con velocità  $\mathbf{V}(x, y, z)$ . Vogliamo calcolare la quantità di fluido che, nell’unità di tempo, traversa la superficie. Approssimiamo ancora la superficie con tanti piccoli parallelogrammi che giacciono sui piani tangenti, come abbiamo fatto per il calcolo dell’area. Sia  $\mathcal{P}$  uno di essi. La quantità di fluido che nell’unità di tempo lo attraversa è il volume del parallelepipedo che ha  $\mathcal{P}$  per base e la cui altezza è, circa,  $1 \cdot \mathbf{V}(x_0, y_0, z_0)$  (“circa”, perché il campo vettoriale non è costante su  $\mathcal{P}$ ). Si veda la figura 7.

Il volume va calcolato ora con segno perché non è indifferente che il fluido entri o esca, ed è dato da

$$\mathbf{V}(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{N}(x_0, y_0, z_0)$$

(si ricordi che  $|\mathbf{N}(x_0, y_0, z_0)|$  è circa l'area di  $\mathcal{P}$  e quindi  $\mathbf{N}(x_0, y_0, z_0)$  è l'area “con segno”). Sommando i contributi di tutti i parallelogrammi si trova una delle somme di Riemann che approssimano l'integrale di  $\mathbf{V}(x, y, z) \cdot \mathbf{N}(x, y, z)$ . Ciò suggerisce di definire l'*integrale di superficie di seconda specie*

$$\int_{\Omega} \mathbf{V}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \mathbf{N}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \, du \, dv. \quad (14)$$

Una notazione più semplice che si usa per indicare questo integrale è

$$\int_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\Sigma. \quad (15)$$

In questa notazione si sottintende la dipendenza da  $u$  e da  $v$ .

Si prova:

**Teorema 8** *Il valore dell'integrale di superficie di seconda specie non muta cambiando la parametrizzazione della superficie. Esso cambia di segno cambiando l'orientazione.*

### 2.3 Integrale di superficie di seconda specie e forme differenziali

Sia nel calcolo del lavoro, integrale di curva di prima specie, che nel calcolo del flusso, integrale di superficie di seconda specie, interviene un campo vettoriale, ma le proprietà fisiche di tali campi sono sostanzialmente diverse. E' quindi utile individuare un formalismo matematico che permetta di distinguere un caso dall'altro e di distinguere anche visivamente se un campo vettoriale si vuol usare per il calcolo di un'integrale di curva o di superficie. Per arrivare a ciò, vediamo una formula esplicita per il calcolo dell'integrale (15), più esplicita della formula (14). Ricordiamo che

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(u, v) &= (x_u \mathbf{i} + y_u \mathbf{j} + z_u \mathbf{k}) \wedge (x_v \mathbf{i} + y_v \mathbf{j} + z_v \mathbf{k}) \\ &= [y_u z_v - z_u y_v] \mathbf{i} - [x_u z_v - z_u x_v] \mathbf{j} + [x_u y_v - y_u x_v] \mathbf{k}. \end{aligned}$$

L'espressione esplicita di (15) è

$$\int_{\Omega} \{f(x, y, z)[y_u z_v - z_u y_v] - g(x, y, z)[x_u z_v - z_u x_v] + h(x, y, z)[x_u y_v - y_u x_v]\} \, du \, dv \quad (16)$$

(la dipendenza di  $x, y, z$  da  $u$  e da  $v$  non si è indicata per brevità).

Se  $\mathbf{V}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$  è il campo vettoriale che si vuol integrare su una superficie, indichiamolo col simbolo

$$f \, dy \, dz + g \, dz \, dx + h \, dx \, dy. \quad (17)$$

Scriviamo inoltre

$$dx = x_u \, du + x_v \, dv, \quad dy = y_u \, du + y_v \, dv, \quad dz = z_u \, du + z_v \, dv. \quad (18)$$

Usando le “regole di calcolo” (8) è ora facile ricostruire l’espressione dell’integrale (16). L’integrando si ottiene sostituendo le (18) in (17) e usando le (8) (rispetto ai simboli  $du$  e  $dv$ ).

Un’espressione della forma (17) si chiama una *2-forma differenziale* (il numero 2 ricorda che si vuole integrarla su una superficie, intuitivamente un “foglietto” di dimensione 2.)

Anche le 2-forme differenziali si indicano con lettere greche minuscole,

$$\omega = f \, dy \, dz + g \, dz \, dx + h \, dx \, dy .$$

Completiamo le regole (8) imponendo:

$$\begin{aligned} dx \, dx &= 0, & dy \, dy &= 0, & dz \, dz &= 0, \\ dy \, dx &= -dx \, dy, & dz \, dx &= -dx \, dz, & dz \, dy &= -dy \, dz. \end{aligned} \quad (19)$$

(anche queste regole sono suggerite dalle regole del prodotto vettoriale).

## 2.4 Formula della divergenza e formula di Gauss

L’uguaglianza (10) correla le 1-forme differenziali e gli integrali su aree piane. Mostriamo che esiste una formula analoga, che correla gli integrali delle 2-forme differenziali (ossia, i flussi di campi vettoriali) e gli integrali di volume.

Limitiamoci a considerare il caso di regioni  $\Omega$  *convesse*. Non è difficile mostrare che la formula che troveremo vale anche se la regione  $\Omega$  può rappresentarsi come unione o differenza di regioni convesse.

Così come abbiamo fatto per la riduzione degli integrali multipli ad integrali iterati, indichiamo con  $\Omega_z$  la proiezione sul piano  $(x, y)$  di  $\Omega$ ,

$$\Omega_z = \{(x, y) \mid \text{esiste } z \text{ tale che } (x, y, z) \in \Omega\} .$$

Analogamente definiamo  $\Omega_x$  ed  $\Omega_y$ . Sia  $(x, y) \in \Omega_z$ . La retta verticale per  $(x, y)$  interseca  $\Omega$  in un segmento  $[\phi(x, y), \psi(x, y)]$ . Richiediamo che le funzioni  $\phi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  siano di classe  $C^1$ . Proprietà analoghe richiediamo anche per le rette parallele agli assi delle ascisse e delle ordinate.

Sotto queste condizioni, la regione  $\Omega$  viene ad essere delimitata da pezzi di superfici regolari.

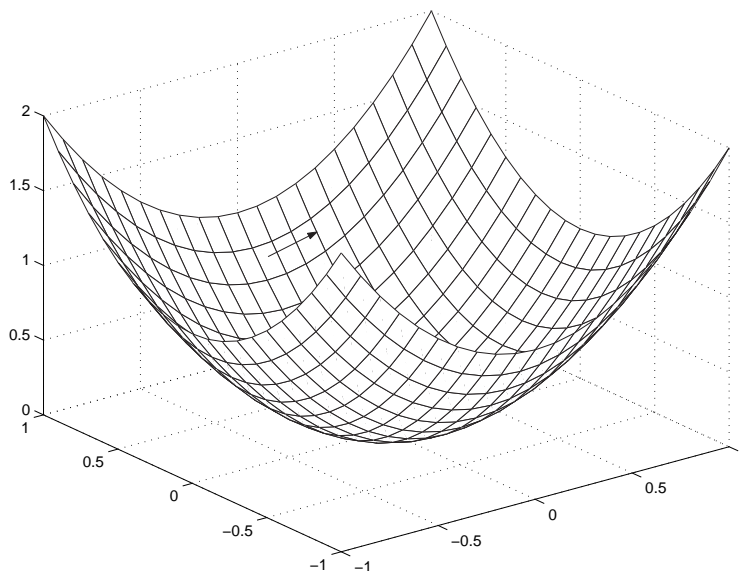
Dobbiamo introdurre un’orientazione su tali pezzi di superficie, che “vari con continuità” passando da un pezzo all’altro. Per fare questo scegliamo un’orientazione sulla normale alla superficie e chiediamo che la normale sia orientata verso l’*esterno* della regione che la superficie delimita. Per esempio, fissiamo l’attenzione sulla “parte inferiore” di  $\Omega$ , parametrizzata da

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \phi(x, y)\mathbf{k} \quad (x, y) \in \Omega_z .$$

Abbiamo definito la normale

$$\mathbf{N}(x, y) = (\mathbf{i} + \phi_x(x, y)\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{j} + \phi_y\mathbf{k}) = -\phi_x(x, y)\mathbf{i} - \phi_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k} .$$

Figura 8:



Essendo positivo il coefficiente di  $\mathbf{k}$ , la normale punta verso l'alto, come in figura 8. Dunque entra in  $\Omega$ . Invece, noi vogliamo la normale che esce da  $\Omega$ . Dobbiamo quindi cambiare segno alla  $\mathbf{N}(x, y)$  e scegliere

$$\mathbf{N}_e(x, y) = -\mathbf{N}(x, y) = -(\mathbf{i} + \phi_x(x, y)\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{j} + \phi_y\mathbf{k}) = \phi_x(x, y)\mathbf{i} + \phi_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

**Definizione 1** Indicheremo con  $\mathbf{N}_e(x, y)$  la normale nel punto  $(x, y)$  alla superficie  $\Sigma$  che racchiude  $\Omega$ , orientata verso l'esterno di  $\Omega$ . ■

Vediamo esplicitamente un esempio.

**Esempio 9** La superficie sia la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Si tratta quindi di una superficie assegnata in modo implicito. I due emisferi superiore ed inferiore sono parametrizzati rispettivamente da

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Si vede facilmente che se si vuole la normale esterna, bisogna parametrizzare l'emisfero superiore scegliendo prima  $x$  e poi  $y$ ; nell'emisfero inferiore bisogna scegliere prima  $y$  e poi  $x$ . ■

Sia ora  $T(x, y, z)$  una funzione derivabile. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\Omega_z} \left[ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) dz \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega_z} T(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \int_{\Omega_z} T(x, y, \phi(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

La normale esterna alla superficie di  $\Omega$ , nei punti  $(x, y, \psi(x, y))$ , rispettivamente  $(x, y, \phi(x, y))$ , è:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_e(x_0, y_0, z_0) &= -\psi_x(x_0, y_0)\mathbf{i} - \psi_y(x_0, y_0)\mathbf{j} + \mathbf{k}, \\ \mathbf{N}_e(x_0, y_0, z_0) &= \phi_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + \phi_y(x_0, y_0)\mathbf{j} - \mathbf{k} \end{aligned}$$

Dunque

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega_z} T \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}_e dx dy.$$

Indichiamo con  $\Sigma_z$  le due calotte di parametrizzazione  $\phi(x, y)$  e  $\psi(x, y)$ . Con questa notazione l'ultimo integrale è uguale a

$$\int_{\Sigma_z} T \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}_e d\Sigma.$$

Si noti che i grafici delle funzioni  $\phi(x, y)$  e  $\psi(x, y)$  possono non esaurire tutta la frontiera di  $\Omega$ , ma una parte della frontiera che non appartiene a tali grafici è parte di un cilindro verticale. Ha quindi per normale un vettore ortogonale a  $\mathbf{k}$  e quindi non dà contributo al calcolo dell'integrale.

In modo analogo si mostra che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} S(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\Omega_y} S \mathbf{j} \cdot \mathbf{N}_e dx dy = \int_{\Sigma_y} S \mathbf{j} \cdot \mathbf{N}_e d\Sigma, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} R(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\Omega_x} R \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}_e dy dz = \int_{\Sigma_x} R \mathbf{i} \cdot \mathbf{N}_e d\Sigma \end{aligned}$$

(le definizioni di  $\Sigma_x$  e  $\Sigma_y$  sono analoghe a quella di  $\Sigma_z$ ).

Sommando i tre integrali si trova

**Teorema 10 (della divergenza)** *Sia  $\Omega$  una regione convessa e limitata, la cui frontiera è sostegno di una superficie regolare. Vale*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} R(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} S(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) \right] dx dy dz \\ = \int_{\partial\Omega} \{ R\mathbf{i} + S\mathbf{j} + T\mathbf{k} \} \cdot \mathbf{N}_e d\Sigma \end{aligned}$$

Il teorema della divergenza ha la seguente interpretazione: il flusso di un campo vettoriale uscente da una superficie è uguale all'integrale di volume della divergenza del campo vettoriale stesso.

Il flusso è positivo quando il campo vettoriale “esce” da  $\Omega$ . In tal caso, l'integrale della divergenza è positivo, e ciò, come si è già notato, spiega l'uso del termine “divergenza”.

Consideriamo ora un caso particolare: supponiamo che il campo vettoriale  $\mathbf{V}(x, y, z)$  sia il gradiente di una funzione  $\phi(x, y, z)$ , a valori reali. In questo caso,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \nabla \phi(x, y, z) &= \nabla \cdot \nabla \phi(x, y, z) \\ &= \phi_{xx}(x, y, z) + \phi_{yy}(x, y, z) + \phi_{zz}(x, y, z) = \Delta \phi(x, y, z) \end{aligned}$$

e quindi si trova:

$$\int_{\Omega} \Delta \phi(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial \Omega} \nabla \phi \cdot \mathbf{N}_e \, d\Sigma.$$

Questo caso particolare del *Teorema della divergenza* si chiama anche *Formula di Gauss*.

Vediamo ora di scrivere il *Teorema della divergenza* con l'uso del simbolismo delle forme differenziali.

Sia

$$\omega = R \, dy \, dz + S \, dz \, dx + T \, dx \, dy.$$

Usando le regole (19) si trova

$$d\omega = (R_x + S_y + T_z) \, dx \, dy \, dz. \quad (20)$$

Per uniformità, usa chiamare “3-forma differenziale” un'espressione della forma

$$f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Essa è niente altro che la funzione scalare  $f(x, y, z)$ . Si usa questo termine, e questa notazione, per intendere che questa funzione va integrata su una regione dello spazio  $\mathbf{R}^3$ .

Con queste notazioni, il Teorema della divergenza si scrive

$$\int_{\partial \Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega.$$

**Osservazione 11** Si potrebbe provare che la classe delle regioni per cui vale il Teorema della divergenza è assai ampia: tutte le regioni limitate la cui frontiera è una superficie regolare *orientabile*. Discuteremo il concetto di orientabilità di una superficie più avanti. Per ora diciamo soltanto che se una superficie regolare ha per sostegno la frontiera di una regione limitata, essa si dice *superficie chiusa*. ■

## 2.5 La formula di Stokes *nello spazio*: il caso delle superfici parametriche

La *formula di Stokes* dà un'ulteriore relazione che ora collega integrali di curva nello spazio e integrali di superficie.

**Osservazione 12** Abbiamo specificato “curva nello spazio” per intendere che se in queste considerazioni interviene la normale alla curva, come nell'osservazione 13, questa va calcolata con la regola con cui si calcola la normale alla curva nello spazio; ossia,  $\mathbf{n}(s)$  è colineare ed ha lo stesso verso di  $\mathbf{t}'(s)$ . E ciò anche se, per caso, la curva che si considera appartiene ad un piano. ■

Consideriamo una superficie parametrica  $\Sigma$

$$\Sigma : \quad (u, v) \rightarrow \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in \Omega.$$

Supponiamo che la parametrizzazione sia iniettiva e di classe  $C^2$ .

Consideriamo una curva semplice e chiusa, con sostegno in  $\Omega$ :

$$\gamma : \quad t \rightarrow u(t)\mathbf{i} + v(t)\mathbf{j}, \quad t \in [a, b].$$

Indichiamo con  $\Omega_\gamma$  la regione interna alla curva  $\gamma$ . La regione  $\Omega_\gamma$  è contenuta in  $\Omega$  e la restrizione di  $\mathbf{r}(u, v)$  alla chiusura di  $\Omega_\gamma$  definisce una calotta che indichiamo con  $\Sigma_1$ . Diciamo che la calotta  $\Sigma_1$  ha per bordo la curva  $\gamma_1$  parametrizzata da

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) \\ &= x(u(t), v(t))\mathbf{i} + y(u(t), v(t))\mathbf{j} + z(u(t), v(t))\mathbf{k}, \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

La scelta del verso di percorrenza della curva  $\gamma$  stabilisce un'orientazione su  $\gamma_1$  mentre la scelta di considerare  $\mathbf{i}$  come primo elemento della base di  $\mathbf{R}^2$  stabilisce un'orientazione sulla normale a  $\Sigma_1$ . Le due orientazioni non hanno relazioni tra loro: per esempio sia

$$\Sigma : \quad \mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{1 - u^2 - v^2}\mathbf{k}.$$

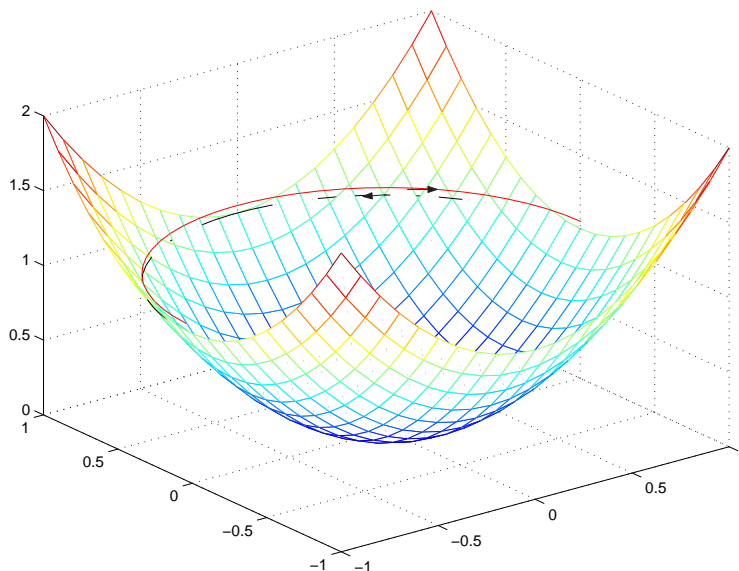
Le due curve

$$\gamma : \quad t \rightarrow \frac{1}{2}[\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}], \quad \tilde{\gamma} : \quad t \rightarrow \frac{1}{2}[\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}],$$

identificano la medesima calotta, ma le corrispondenti curve  $\gamma_1$  e  $\tilde{\gamma}_1$  hanno orientazioni opposte.

Volendo correlare un'integrale sulla superficie  $\Sigma_1$  con l'integrale sul suo bordo, dobbiamo correlare le due orientazioni. Per fissare le idee, consideriamo assegnata l'orientazione della superficie, ossia il verso positivo della normale e scegliamo di conseguenza quella sulla curva, ma niente vieta di fare il contrario e talvolta questo è effettivamente utile.

Figura 9:



**Definizione 2** Diciamo che l'orientazione della calotta  $\Sigma_1$  e quella del suo bordo  $\gamma_1$  sono **concordi** quando vale la *regola d'Ampère*: una persona in piedi sulla superficie nel verso positivo della normale, vede un punto mobile sulla curva passare dalla sua destra alla sua sinistra. ■

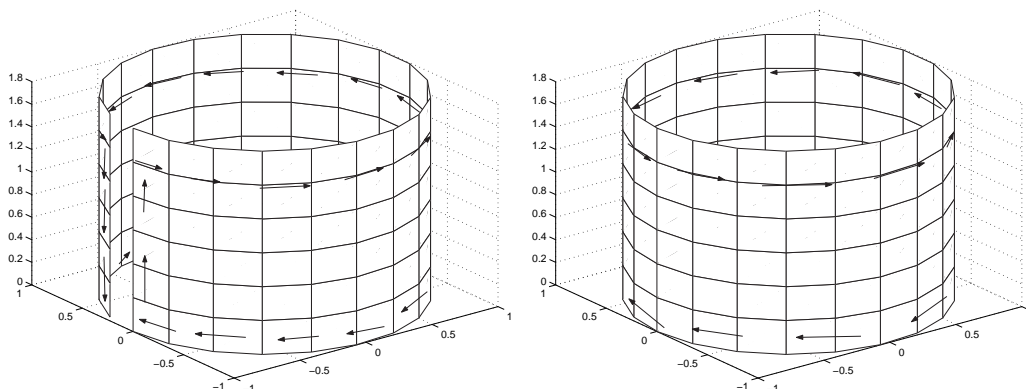
**Osservazione 13** Facendo tendere ad un punto della curva la posizione della persona che osserva il moto, si vede che l'orientazione della calotta e quella del suo bordo sono concordi quando i tre versori della tangente alla curva, della normale alla curva e della normale alla superficie, presi in quest'ordine, formano un sistema di riferimento positivo. Supponiamo che un punto  $P(t)$  di  $\gamma_1$  percorra la curva a partire da  $P(a)$ , portandosi dietro questo sistema di riferimento. Dato che la parametrizzazione della superficie è iniettiva, il punto  $P(t)$  torna alla posizione iniziale quando  $t = b$ . E quindi, alla fine del giro, il sistema di riferimento viene a trovarsi nella posizione che aveva all'inizio.

Ricordiamo che in queste considerazioni  $\mathbf{n}(s) = \mathbf{t}'(s)/\|\mathbf{t}'(s)\|$ . ■

Vale:

**Teorema 14 (di Stokes)** Valgono le ipotesi dette sopra, in particolare sia iniettiva e di classe  $C^2$  la parametrizzazione della superficie.

Figura 10:



Sia  $\gamma_1$  il bordo di  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_1$  e  $\gamma_1$  abbiano orientazioni compatibili. Sia  $\mathbf{V}(x, y, z)$  un campo vettoriale di classe  $C^1$ , definito su  $\Omega$ . Vale

$$\int_{\Sigma_1} \text{rot } \mathbf{V} \cdot d\Sigma = \int_{\gamma_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}. \quad (21)$$

Il significato fisico del teorema di Stokes è il seguente: La circuitazione del campo vettoriale lungo il bordo di  $\Sigma_1$  è uguale al flusso attraverso  $\Sigma_1$  del rotore del campo vettoriale stesso.

Notiamo che, con le notazioni introdotte per le forme differenziali, anche il *Teorema di Stokes* si scrive

$$\int_{\Sigma_1} d\omega = \int_{\partial\Sigma_1} \omega. \quad (22)$$

Infatti, se  $\omega$  è una 1-forma differenziale i cui coefficienti sono le componenti del campo vettoriale  $\mathbf{V}$ , è immediato calcolare che  $d\omega$  è quella 2-forma differenziale i cui coefficienti sono le componenti del rotore di  $\mathbf{V}$ .

In conclusione, i tre teoremi trovati, di Green, di Gauss e di Stokes, si possono tutti e tre scrivere nella forma generale (22).

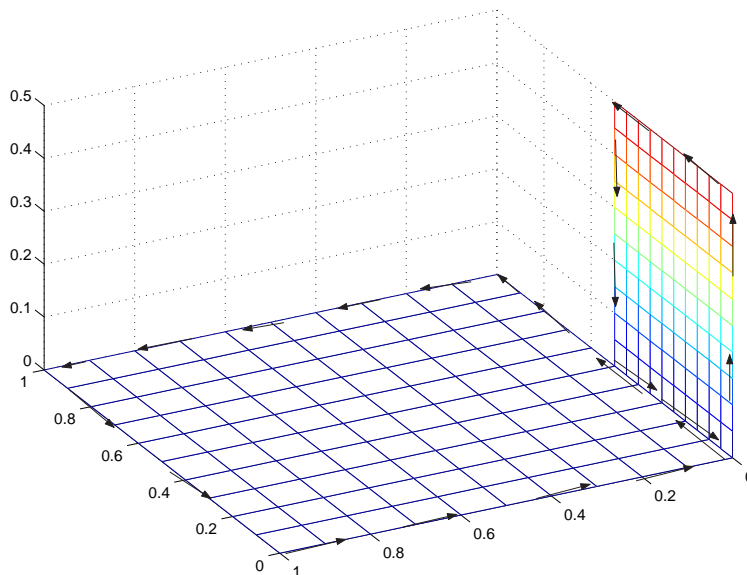
## 2.6 Estensioni

Una prima estensione della formula di Stokes si incontra nel caso in cui la calotta è delimitata da due curve, come nella figura 10 a sinistra.

Procedendo come nel caso piano (paragrafo 1.4), ossia operando due tagli vicini come nella figura a destra, ci si riconduce al caso che abbiamo già trattato e quindi per una superficie siffatta la formula di Stokes assume l'aspetto

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega.$$

Figura 11:



Il segno negativo di fronte al secondo integrale dipende dal fatto che la curva  $\gamma_2$  va orientata in modo **discorde** rispetto a quello della superficie, si veda la figura.

In questo caso diremo che il **bordo** di  $\Sigma$  è costituito dalle due curve  $\gamma_1$ , orientata in modo **concorde**, e  $\gamma_2$ , orientata in modo **discorde**, rispetto a  $\Sigma$ .

Si estendono facilmente queste considerazioni al caso in cui il bordo è costituito da più curve.

Ricapitolando, abbiamo introdotto la formula di Stokes per superfici date in forma parametrica. Inoltre, abbiamo esplicitamente **supposto** che sia possibile orientare la calotta ed il suo bordo in modo **concorde**. Il fatto è che ciò talvolta non può farsi e questo è tanto più importante perchè molto spesso in pratica è necessario usare il teorema di Stokes nel caso in cui la superficie è ottenuta “incollando” tanti pezzi di superfici parametriche. Chiameremo **calotta composta** una calotta così ottenuta. Si noti che passando da un pezzo di superficie ad un altro, la normale può variare in modo discontinuo, si veda la figura 11

E' chiaro dalla figura che

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\Sigma_1} d\omega + \int_{\Sigma_2} d\omega$$

e che la formula di Stokes può applicarsi sia a  $\Sigma_1$  che a  $\Sigma_2$ ; che il contributo degli integrali sul lato comune si elide e quindi che l'integrale precedente è uguale alla circuitazione del campo vettoriale sui segmenti che delimitano la superficie, opportunamente orientati. Indicando con  $\gamma$  la curva che ha tali segmenti come sostegno,

Figura 12:

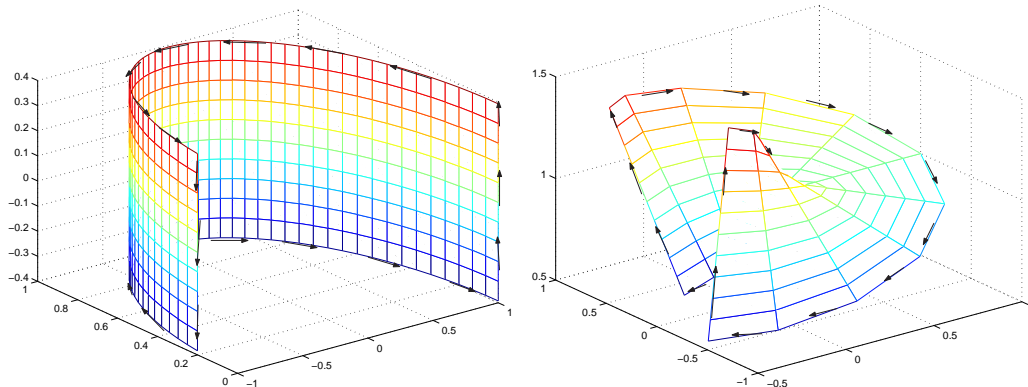
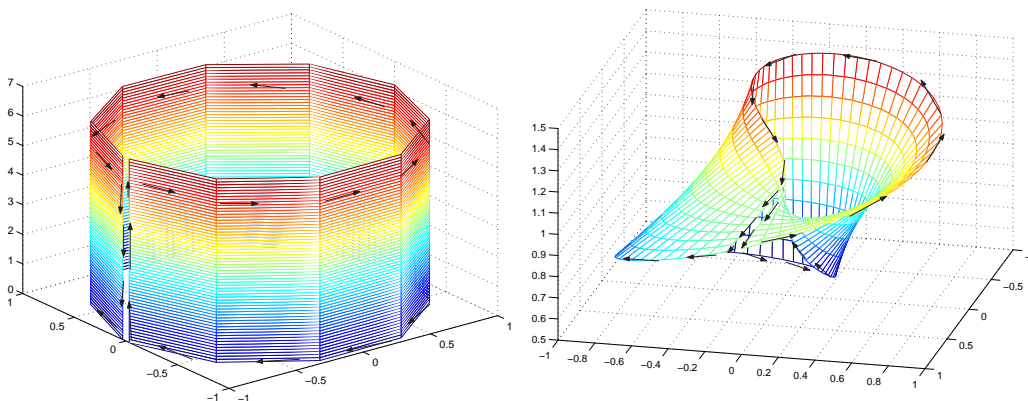


Figura 13:



vale ancora

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega.$$

La discontinuità della normale non costituisce quindi un problema.

Queste considerazioni sono però soltanto apparentemente semplici. Per renderci conto delle difficoltà, appliciamole alle superfici nelle due figure 12. Queste sono superfici regolari, il cui bordo è una curva regolare a tratti, e quindi l'applicazione della formula di Stokes non presenta problemi.

Modifichiamo ora le superfici come in figura 13. E' ancora ovvio che la formula di Stokes vale. Ma, modifichiamo ulteriormente le superfici, portando i segmenti affiancati a coincidere. Nel caso della superficie a sinistra, la formula di Stokes vale ancora, nella forma generalizzata perché ora il bordo è costituito da due curve. Infatti, gli integrali sui due segmenti si elidono. Invece, tali integrali si sommano

nel caso della superficie a destra e quindi per tale superficie, che si chiama *nastro di*  $M'$  *obius*, la formula di Stokes non vale.

**Osservazione 15** Si noti che nè il cilindro nè il nastro di  $M'$  obius sono superfici “semplici”, ossia con parametrizzazione iniettiva; ma in un caso la formula di Stokes vale mentre nell’altro non vale; o meglio, vale la formula di Stokes nel senso che il contributo dei segmenti che si sovrappongono va contato due volte. Però la posizione dei tali segmenti sul nastro di  $M'$  obius è arbitraria: possiamo fare un taglio nella posizione che vogliamo e applicare il Teorema di Stokes alla superficie ottenuta. D’altra parte il campo vettoriale cambia da punto a punto e questo vuol dire che il valore dell’integrale cambia a seconda della posizione del taglio, ossia a seconda del modo che usiamo per calcolare l’integrale. Dunque, tale integrale non dipende dalle sole proprietà geometriche del nastro di  $M'$  obius, e non ha alcun significato fisico. ■

Si suggerisce di costruire un modello del nastro di  $M'$  obius usando una striscia di carta, e di vedere che il suo bordo consiste di un’unica curva. La circuitazione del campo vettoriale lungo tale curva non ha alcuna relazione col flusso del rotore attraverso il nastro.

Visto che il nastro di  $M'$  obius è una superficie regolare, anche se con parametrizzazione non iniettiva, l’unico punto in cui può cedere l’argomentazione che porta alla formula di Stokes è il punto in cui si cerca di orientare la superficie ed il bordo in modo concorde. Infatti, ciò non può farsi. Per vedere ciò, conviene lavorare col versore normale

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{N}(u, v)}{\|\mathbf{N}(u, v)\|}. \quad (23)$$

Questo versore è ben definito perchè  $\mathbf{N}(\mathbf{r})$  non è mai nullo. Dunque,

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u(u, v) & \mathbf{r}_v(u, v) & \mathbf{n}(u, v) \end{bmatrix}$$

non si annulla mai: o è sempre positivo, o è sempre negativo. Con la scelta fatta per  $\mathbf{n}(u, v)$ , esso è sempre positivo. Sia ora  $\gamma$  una curva chiusa che gira lungo tutto il nastro di  $M'$  obius,

$$\gamma : t \rightarrow \mathbf{r}(t)$$

Sia  $\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}(\mathbf{r}(t))$ . La funzione  $\mathbf{n}(t)$  varia con continuità, ma la continuità è un concetto locale: niente dice dei valori che  $\mathbf{n}(t)$  prende in punti “lontani”. Chiediamoci allora cosa accade di  $\mathbf{n}(a)$  e di  $\mathbf{n}(b)$ . Costruendo un modello del nastro di  $M'$  obius, si vede immediatamente che

$$\mathbf{n}(a) = -\mathbf{n}(b).$$

E quindi, non è possibile orientare la curva  $\gamma$  in modo concorde alla superficie.

Ciò da una parte spiega come mai la formula di Stokes non vale per il nastro di  $M'$  obius e dall’altra conduce alle seguenti definizioni:

**Definizione 3** Sia  $\Sigma$  una superficie composta. Essa si chiama una *varietà* se il versore normale  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ , definito da (23), esiste per ogni  $\mathbf{r}$ , ed è funzione continua di  $\mathbf{r}$ . La varietà si dice *orientabile* se lungo ogni arco chiuso  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , si ha

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}(a)) = \mathbf{n}(\mathbf{r}(b)). \quad \blacksquare$$

La formula di Stokes e il teorema della divergenza valgono su varietà orientabili.