

Integrazione delle funzioni di più variabili

L. Pandolfi

11 novembre 2005

Nel caso delle funzioni di una sola variabile, è stato naturale definire l'integrale *su un intervallo*. Nel caso di funzioni di più variabili una scelta ragionevole per il dominio di integrazione non è ovvia. Noi sceglieremo come domini di integrazione gli insiemi che sono delimitati da grafici di funzioni, ciascuna delle quali è continua su un intervallo limitato e chiuso. Tali insiemi si chiameranno *domini di integrazione*.

Notiamo che ogni dominio di integrazione \mathcal{D} è chiuso e limitato.

Ci limiteremo a trattare l'integrazione delle sole funzioni continue. Ciò è sufficiente per mostrare che le idee fondamentali che si usano per costruire l'integrale multiplo sono le medesime che si usano per costruire l'integrale di funzioni di più variabili, con una differenza importante: sul piano non si introduce una relazione d'ordine; e quindi non si introdurrà per l'integrale multiplo un concetto analogo a quello di integrale orientato che si introduce nel caso delle funzioni di una variabile.¹

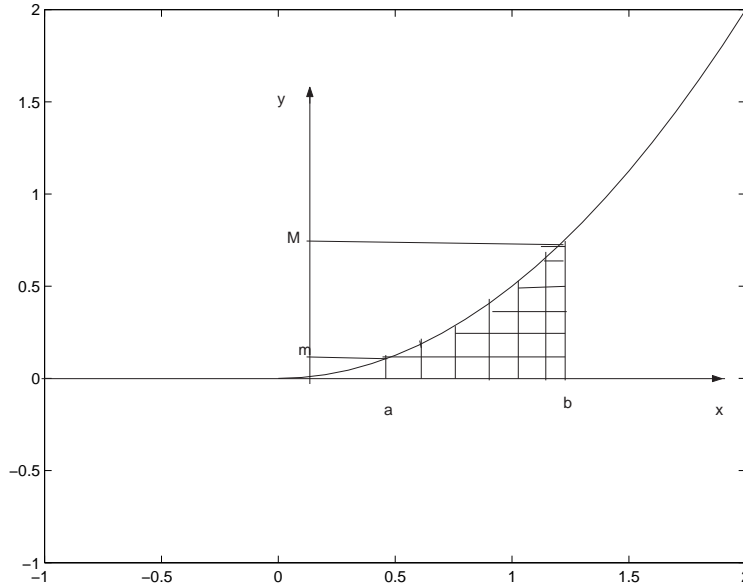
1 Integrazione delle funzioni di due variabili

Sia \mathcal{D} un dominio di integrazione nel piano (x, y) e sia $f(x, y)$ una funzione continua su \mathcal{D} . Decomponiamo \mathcal{D} nell'unione $D_1 \cup D_2 \cdots \cup D_n$ ove D_i è un trapezoide o differenza di due trapezoidi di funzioni definite sul medesimo intervallo. Procediamo in questo modo: definiamo l'integrale di $f(x, y)$ su ciascuno dei domini D_i e quindi definiamo l'integrale su \mathcal{D} come somma degli integrali su D_i .

Illustriamo quindi come si definisce l'integrale di una funzione $f(x, y)$ sul trapezoide di una funzione $g(x)$ definita su un intervallo $[a, b]$. Indichiamo con T tale trapezoide.

¹esiste però nel piano un "verso positivo di rotazione". Questo permetterà di introdurre "integrali orientati" sulle superfici.

Figura 1:



Il trapezoide T è contenuto nel rettangolo di base il segmento $[a, b]$ e di altezza il segmento $[m, M]$, con

$$m = \min_{x \in [a, b]} g(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} g(x).$$

Dividiamo $[a, b]$ in N parti uguali con i punti $a_0 = a$, $a_k = a + k \frac{b-a}{N}$. Consideriamo quindi i rettangoli di base $[a_k, a_{k+1}]$ e per altezza la massima possibile, compatibilmente col fatto che il rettangolo debba essere contenuto in T .

Suddividiamo ora anche il segmento $[m, M]$ dell'asse delle ordinate in L tratti uguali. Si veda la figura 1.

In questo modo il trapezoide della funzione viene ad essere approssimato da una rete di NL rettangolini, che indichiamo con $R_{i,j}$, $0 \leq i \leq N-1$, $0 \leq j \leq L-1$.

Ciascuno di questi rettangoli ha area $\frac{b-a}{N} \frac{M-m}{L}$. Indichiamo con U_- la loro unione.

Osservazione 1 Notiamo che nessuno dei rettangolini è a cavallo del grafico di $g(x)$ e che $U_- \subseteq T$. D'altra parte, orlando U con rettangolini ciascuno di

area $\frac{b-a}{N} \frac{M-m}{L}$ si trova un insieme U_+ che contiene T . La differenza tra le aree di U_+ e di U_- è al più $2(b-a)(M-m)/L$ e quindi tende a zero per $L \rightarrow +\infty$. ■

Costruiamo ora le somme

$$s_{N,L} = \sum_{i,j} \left[\min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \right] \cdot \frac{M-m}{L} \cdot \frac{b-a}{N}$$

$$S_{N,L} = \sum_{i,j} \left[\max_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \right] \cdot \frac{M-m}{L} \cdot \frac{b-a}{N}$$

Queste somme sono estese a tutti i rettangoli che appartengono ad U_- .

Esattamente come nel caso delle funzioni di una variabile, si prova che infittendo il reticolato del piano, i numeri $s_{N,L}$ crescono mentre i numeri $S_{N,L}$ decrescono. Inoltre

$$s_{N,L} \leq S_{R,S}$$

qualunque siano le suddivisioni che si siano scelte.

Vale:

$$S_{N,L} - s_{N,L} \leq \sum_{(i,j) \in R_{i,j}} \left[\max_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) - \min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \right] \frac{b-a}{N} \cdot \frac{M-m}{L}.$$

Dunque,

$$\inf\{S_{N,L}\} = \sup\{s_{N,L}\}$$

e questo numero si chiama *l'integrale doppio* di $f(x,y)$ sul trapezoide T . Esso si indica col simbolo

$$\int_T f(x,y) dx dy$$

Osservazione 2 Notiamo:

- nessuno dei rettangoli di U_- deborda da T . Ci si può chiedere cosa accade se si fa una costruzione analoga, ma a partire da U_+ . Usando l'osservazione 1, si prova facilmente che il valore trovato per l'integrale è il medesimo sia lavorando con U_- che con U_+ .
- Se $x_{i,j}$ è un qualsiasi punto di $R_{i,j}$ si ha

$$\min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \leq f(x_{i,j}) \leq \max_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y).$$

Questa osservazione mostra che sostituendo in $s_{N,L}$ il valore $f(x_{i,j})$ a $\min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y)$, ancora $s_{N,L}$ approssima l'integrale di $f(x,y)$. Analoga osservazione per $S_{N,L}$.

- E' ovvio dalla costruzione che abbiamo fatto che se $f(x, y)$ è positiva, allora il suo integrale si interpreta come il volume del solido compreso tra l'insieme \mathcal{D} del piano $z = 0$ ed il grafico della funzione. Si in particolare se sceglie $f(x, y)$ identicamente uguale ad 1, si trova un numero che ha senso interpretare come area del dominio di integrazione. D'altra parte, l'area di un trapezoide si può calcolare mediante l'integrale di una funzione di una sola variabile. Ci si può quindi chiedere se i due numeri calcolati con questi due metodi diversi vengano a coincidere. Più avanti vedremo che la risposta è positiva. ■

Talvolta, un integrale di una funzione di due variabili si chiama anche "integrale doppio". Per contrasto, l'integrale di una funzione di una sola variabile,

$$\int_a^b f(x) dx$$

si chiama anche "integrale semplice".

1.1 Le proprietà dell'integrale

Le proprietà dell'integrale sono le stesse come nel caso degli integrali semplici:

- la linearità: se α e β sono numeri e $f(x, y)$, $g(x, y)$ sono funzioni continue sullo stesso dominio di integrazione \mathcal{D} , vale

$$\int_{\mathcal{D}} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dx dy = \alpha \int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy + \beta \int_{\mathcal{D}} g(x, y) dx dy;$$

- monotonia: $f(x, y) \leq g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathcal{D}$ implica

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy \leq \int_{\mathcal{D}} g(x, y) dx dy.$$

- Dalla monotonia si deduce

$$\left| \int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy \right| \leq \int_{\mathcal{D}} |f(x, y)| dx dy.$$

Anche il *teorema della media* si può riformulare. Indichiamo con $A(\mathcal{D})$ l'area di \mathcal{D} , calcolata sommando le aree delle singole regioni che la compongono.

Vale:

$$A(\mathcal{D}) \cdot \left(\min_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x,y) \right) \leq \int_{\mathcal{D}} f(x,y) dx dy \leq A(\mathcal{D}) \cdot \left(\max_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x,y) \right).$$

Ne segue:

Teorema 3 Se \mathcal{D}_ϵ è una circonferenza di raggio ϵ e centro fissato vale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D}_\epsilon} f(x,y) dx dy = 0.$$

1.2 Riduzione di integrali doppi ad integrali iterati

Torniamo a considerare le somme $s_{N,L}$ ed $S_{N,L}$ che servono per definire l'integrale doppio. Consideriamo per esempio le $s_{N,L}$:

$$s_{N,L} = \sum_{i,j} \left[\min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \right] \cdot \frac{M-m}{L} \cdot \frac{b-a}{N}.$$

Calcoliamo le somme prima di tutto sommando i termini che corrispondono a rettangolini che appartengono alla stessa striscia verticale, ossia scrivendo

$$\begin{aligned} s_{N,L} &= \sum_{i,j} \left[\min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \right] \cdot \frac{M-m}{L} \cdot \frac{b-a}{N} \\ &= \sum_i \left\{ \sum_j \left[\min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \right] \cdot \frac{M-m}{L} \right\} \cdot \frac{b-a}{N}. \end{aligned}$$

Fissiamo un punto x_i in ciascuno degli intervalli $[a_i, a_{i+1})$. Si mostra che per $L \rightarrow +\infty$ tende a zero la differenza tra la parentesi graffa e l'integrale

$$\int_0^{g(x_i)} f(x_i, y) dy$$

ove x_i è un qualsiasi punto dell'intervallo $[a_i, a_{i+1})$. e quindi che

$$s_{N,L} = \sum_{i,j} \left[\min_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x,y) \right] \cdot \frac{M-m}{L} \cdot \frac{b-a}{N} = \sum_i \frac{b-a}{N} \int_0^{g(x_i)} f(x_i, y) dy + \epsilon(L, N)$$

con

$$\lim \epsilon(L, N) = 0;$$

Ma, per $N \rightarrow +\infty$, le somme

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} \int_0^{g(x_i)} f(x_i, y) dy$$

convergono all'integrale della funzione di x

$$\int_0^{g(x)} f(x, y) dy,$$

ossia all'integrale iterato di $f(x, y)$. Dunque, per calcolare $\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ si può procedere come segue:

1. Si proietta ortogonalmente \mathcal{D} sull'asse delle ascisse, ottenendo un intervallo $[a, b]$;
2. Si traccia la retta parallela all'asse delle ordinate e che passa da $x \in [a, b]$. Si indica con \mathcal{S}_x l'intersezione di tale retta con \mathcal{D} . L'insieme \mathcal{S}_x è unione di un numero finito di intervalli.
3. Si ha: $\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\mathcal{S}_x} f(x, y) dy \right] dx$.

Naturalmente la stessa procedura vale anche scambiando il ruolo dell'asse delle ascisse con quello dell'asse delle ordinate.

Consideriamo un caso particolare: supponiamo che \mathcal{D} sia il trapezoide della funzione $k(x)$, $x \in [a, b]$, e che la funzione integranda sia identicamente uguale ad 1. Sia inoltre $k(x)$ non negativa. In tal caso,

$$\int_{\mathcal{D}} 1 dx dy = \int_a^b \left[\int_0^{k(x)} 1 dy \right] dx = \int_a^b k(x) dx.$$

Si risponde così positivamente alla questione sollevata nell'Osservazione 2.

Il metodo visto "riduce" il calcolo di un integrale doppio a quello di un integrale iterato, e quindi a quello di due integrali semplici. Però esso può anche usarsi al contrario, per ricondurre il calcolo di un integrale iterato calcolato **prima** rispetto ad x e **poi** rispetto ad y al calcolo di un integrale doppio; e quindi al calcolo di un integrale iterato calcolato **prima** rispetto ad y e **poi** rispetto ad x . Quando si opera in questo modo su un integrale iterato si dice che si *scambia l'ordine d'integrazione*.

2 Integrazione delle funzioni di tre variabili

L'integrazione delle funzioni di tre variabili si introduce in modo del tutto analogo a quella relativa a funzioni di due variabili. Prima di tutto si scelgono i domini di integrazione "elementari": questi sono i solidi delimitati dai grafici di due funzioni, per esempio

$$\phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$$

con $(x, y) \in \mathcal{D}$, dove \mathcal{D} è un dominio di integrazione per funzioni di due variabili. Come *dominio di integrazione* per funzioni di tre variabili intendiamo l'unione di un numero finito di tali "domini elementari". Ciò detto è facile dividere un dominio di integrazione in "piccoli" parallelepipedi e costruire le analoghe delle somme s_N ed S_N e quindi definire

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz$$

come limite comune alle due successioni s_N ed S_N .

Si ottiene così un integrale che si chiama anche *integrale triplo* e per cui valgono tutte le proprietà elencate al paragrafo 1.1, intendendo ora che le funzioni dipendano da tre variabili, continue su un dominio di integrazione contenuto in \mathbf{R}^3 .

Anche il Teorema 5 vale per gli integrali tripli. Invece, la formula di riduzione da integrali tripli ad integrali iterati va riesaminata esplicitamente.

3 Formula di riduzione per gli integrali tripli

Il calcolo degli integrali tripli si può ricondurre al calcolo di integrali iterati. Illustriamo il metodo nel caso particolare in cui il dominio di integrazione \mathcal{D} è compreso tra due grafici

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

Indichiamo con

$$\mathcal{D}_z = \{(x, y) \mid \exists w \text{ per cui } (x, y, w) \in \mathcal{D}\}$$

ossia la proiezione ortogonale di \mathcal{D} sul piano $z = 0$. Dunque:

- se $(x, y) \notin \mathcal{D}_z$ allora la retta verticale per (x, y) non interseca \mathcal{D} ;

- se $(x, y) \in \mathcal{D}_z$ allora la retta verticale per (x, y) interseca \mathcal{D} nel segmento verticale di estremi $(x, y, \phi(x, y))$ e $(x, y, \psi(x, y))$. Si noti che questo segmento potrebbe essere ridotto ad un punto.

Vale:

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathcal{D}_z} \left[\int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

In questo modo il calcolo dell'integrale triplo si è ricondotto al calcolo di un integrale semplice, seguito da quello di un integrale doppio².

Si può anche procedere in modo diverso: supponiamo di sapere che \mathcal{D}_z sia delimitato da due grafici, per esempio

$$\mathcal{D}_z = \{(x, y) \mid h(y) \leq x \leq k(y)\}$$

e sia $[a, b]$ il dominio comune ad $h(y)$ e $k(y)$. Allora vale:

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{\tilde{\mathcal{D}}_y} f(x, y, z) dx dz \right] dy$$

dove $\tilde{\mathcal{D}}_y$ è l'intersezione di \mathcal{D} col piano parallelo agli assi x e z , passante per il punto $(0, y, 0)$ ³.

4 Alcuni jacobiani che è importante ricordare

Le trasformazioni di coordinate che si usano più comunemente sono le trasformazioni a coordinate polari o ellittiche nel piano, a coordinate cilindriche o sferiche nello spazio.

Si ha:

²questo metodo di riduzione si chiama anche “metodo di riduzione per fili”.

³questo metodo di riduzione si chiama anche “metodo di riduzione per strati”.

Nel piano		
coordinate		jacobiano
polari		ρ
ellittiche		$ab\rho$
Nello spazio		
coordinate		jacobiano
cilindriche		ρ
sferiche		$\rho^2 \sin \phi$

Si noti che nella formula di cambiamento di coordinate per gli integrali multipli compare il valore assoluto dello jacobiano, mentre la tavola precedente riporta lo jacobiano per sottolineare che i sistemi di coordinate che abbiamo introdotto, con le coordinate che si susseguono nell'ordine indicato nella definizione delle coordinate, hanno jacobiano positivo. Dunque la matrice jacobiana di tali trasformazioni non altera l'orientazione di \mathbf{R}^3 .

4.1 Cambiamento di variabili negli integrali doppi

Nel caso degli integrali semplici, sotto opportune ipotesi si prova la formula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

Si noti però che $\phi^{-1}(a)$ può anche essere maggiore di $\phi^{-1}(b)$, ciò che è lecito perché nel caso degli integrali semplici abbiamo definito l'integrale orientato. D'altra parte, questa formula non si prova usando direttamente le proprietà dell'integrale. Piuttosto si prova che questa formula vale per il calcolo delle primitive, e quindi anche per il calcolo dell'integrale grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale. Mostriamo come a questa formula, sotto opportune ipotesi, si possa anche giungere direttamente dalla definizione di integrale semplice.

Sia $f(x)$ una funzione continua definita su in intervallo $[a, b]$ e sia $x = \phi(t)$ una funzione monotona strettamente crescente da un intervallo $[\alpha, \beta]$ su $[a, b]$, che è anche derivabile.

Bisogna ricordare questi fatti:

- nella definizione di integrale la suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ non è necessariamente fatta mediante punti equidistanti;

- nella definizione di integrale, si possono considerare le somme

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[a_{i+1} - a_i] \quad (1)$$

con punti $\xi_i \in (a_i, a_{i+1})$ qualsiasi.

Quando la finezza della partizione tende a zero, le somme (1) tendono all'integrale

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Essendo la funzione ϕ monotona e suriettiva, ogni a_i proviene da un unico α_i ,

$$a_i = \phi(\alpha_i).$$

Dunque la somma (1) è anche uguale a

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[\phi(\alpha_{i+1}) - \phi(\alpha_i)].$$

Questa non è una somma di quelle che conducono alla definizione di un integrale, ma ad essa facilmente si riconduce. Infatti, dal Teorema di Lagrange, esiste un punto c_i tale che

$$[\phi(\alpha_{i+1}) - \phi(\alpha_i)] = \phi'(c_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

Ricordando che i numeri ξ_i si possono scegliere in modo arbitrario, scegliamo $\xi_i = \phi(c_i)$. La monotonia di ϕ mostra che $c_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$. In questo modo la (1) diviene

$$\sum_{i=1}^n f(\phi(c_i))\phi'(c_i)[\alpha_{i+1} - \alpha_i]. \quad (2)$$

La finezza della partizione di $[a, b]$ tende a zero se e solo se tende a zero la finezza della partizione di $[\alpha, \beta]$. Quando la finezza della partizione tende a zero, le somme (1) tendono all'integrale di $f(x)$, quelle di (2) tendono all'integrale di $f(\phi(t))\phi'(t)$. D'altra parte le due somme hanno lo stesso valore e quindi si trova

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

Osservazione 4 Notiamo esplicitamente:

- in questo calcolo la **crescenza** di ϕ si è usata: è $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ proprio perchè ϕ è crescente. Se invece ϕ decresce, sarà $\beta < \alpha$ e in (2) si ha $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ e quindi al limite si trova

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

Ma ora $\beta < \alpha$ e quindi riordinando l'ordine degli estremi di integrazione si trova

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - \int_\beta^\alpha f(\phi(t))\phi'(t) dt \\ &= \int_\beta^\alpha f(\phi(t))[-\phi'(t)] dt = \int_\beta^\alpha f(\phi(t))|\phi'(t)| dt. \end{aligned}$$

- il ruolo del numero $\phi'(c)$: è il coefficiente che trasforma la lunghezza di $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ nella lunghezza di $[a_i, a_{i+1}]$. Si noti che se ϕ' non si annulla su $[a, b]$ (estremi inclusi) esistono numeri m, M tali che

$$m|\alpha_i - \alpha_{i+1}| \leq |a_i - a_{i+1}| \leq M|\alpha_i - \alpha_{i+1}|. \quad \blacksquare$$

- Nel caso degli integrali semplici, la formula vale anche senza richiedere la monotonia di ϕ perchè, intuitivamente, se per t che percorre $[\alpha, \beta]$ il punto $\phi(t)$ percorre più volte un intervallo $[x', x''] \subseteq [a, b]$; deve percorrerlo un numero dispari di volte, in versi opposti; e grazie all'esistenza dell'integrale orientato, i contributi dei passaggi 2 e 3 si elidono, lo stesso per i passaggi 4 e 5 ecc. Un fenomeno analogo non potrà aversi per funzioni di più variabili e quindi in tal caso dovremo imporre a ϕ di essere biunivoca. \blacksquare

Vediamo ora quali problemi si incontrano nel cercare di estendere il ragionamento appena fatto a funzioni di più variabili. In questo caso dovremo avere $f(x, y)$ definita su un dominio di integrazione \mathcal{D} e dovremo avere una trasformazione $(x, y) = \Phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$ da un dominio di integrazione \mathcal{D}' nel dominio di integrazione \mathcal{T} .

La Φ dovrà essere biunivoca da \mathcal{D}' su \mathcal{D} e differenziabile (un'ulteriore condizione si dirà in seguito).

L'integrale di $f(x, y)$ si definisce suddividendo \mathcal{D} in tanti piccoli rettangoli, diciamo R_i . Un rettangolo R_i è immagine mediante Φ di un sottoinsieme R'_i di \mathcal{D}' che però non è un rettangolo. Se la Φ è lineare R' è un parallelogramma, altrimenti è una figura più complessa. Ciò nonostante, si potrà tentare di ripetere gli argomenti visti sopra se:

- si potrà trovare una relazione tra l'area di R_i e quella di R'_i ;
- l'area dei rettangoli R_i tende a zero se e solo se l'area degli insiemi R'_i tende a zero.

La relazione tra l'area di R_i e quella di R'_i è nota nel caso in cui la trasformazione Φ sia lineare: è

$$(\text{area di } R_i) = |\det \Phi|(\text{area di } R'_i).$$

Qui Φ indica la matrice della trasformazione Φ , calcolata rispetto a coordinate ortogonali.

Nel caso non lineare una formula analoga alla precedente ancora vale, con un errore che è di ordine superiore rispetto all'area di R' , quando questa tende a zero.

Questo risponde alla prima questione. La seconda richiesta, l'area degli R_i tende a zero se e solo se l'area degli R'_i tende a zero, è soddisfatta quando $\det \Phi \neq 0$ su \mathcal{D}' .

Con queste informazioni, nel caso in cui Φ sia una trasformazione lineare è relativamente facile provare il risultato seguente, mimando la dimostrazione vista sopra per il caso di funzioni di una variabile. Nel caso in cui Φ sia non lineare, il risultato seguente vale ancora ma la dimostrazione è piuttosto complessa:

Teorema 5 *Siano \mathcal{D} e \mathcal{D}' due domini di integrazione. Sia*

$$(x, y) = \Phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$$

una trasformazione invertibile da \mathcal{D}' su \mathcal{D} . Supponiamo che questa trasformazione sia di classe C^1 su una regione Ω che contiene \mathcal{D}' .

Sia $\det J(u, v)$ lo jacobiano della trasformazione. Supponiamo che $\det J(u, v)$ non si annulli su \mathcal{D}' . Sotto queste condizioni vale:

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{D}'} f(\phi_1(u, v), \phi_2(u, v)) \cdot |\det J(u, v)| du dv.$$

Come abbiamo detto, questo teorema estende il teorema di cambiamento di variabili negli integrali semplici. Nell'uso però esso ha un ruolo diverso. Nel caso degli integrali semplici il metodo di cambiamento di variabili si usa per trasformare la funzione in una di cui sia più facile trovare la primitiva. Nel caso degli integrali doppi si usa la trasformazione di variabili per passare da un dominio più complicato ad uno più semplice. Per esempio, si voglia calcolare

$$\int_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

con \mathcal{D} la circonferenza $x^2 + y^2 \leq 1$. Esprimendo x ed y mediante le coordinate polari ρ e θ , si trova

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Notando che lo jacobiano della trasformazione è semplicemente ρ , il calcolo richiesto si riduce a quello dell'integrale iterato

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \rho^2 d\rho \right] d\theta = \frac{2}{3}\pi.$$

Osservazione 6 Si noti che lo jacobiano della trasformazione a coordinate polari si annulla nell'origine e quindi il Teorema 5 a rigore non può applicarsi. Si applichi però il teorema ad una corona circolare $\epsilon \leq \rho \leq 1$ e poi si mandi ϵ a zero. Il Teorema 3 mostra che il contributo della circonferenza di raggio ϵ tende a zero e ciò giustifica l'uso delle coordinate polari per il calcolo precedente. ■

4.2 Volumi delimitati da superfici di rotazione

Consideriamo il grafico di una funzione sul piano (y, z) , descritto dall'equazione $z = f(y)$.

Per fissare le idee, supponiamo che la funzione sia definita (e continua) su $[0, Y]$ e che prenda valori positivi.

Facendo ruotare i punti del grafico intorno all'asse z , si trova la superficie descritta dall'equazione

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Si vuol calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \right\};$$

ossia il volume dell'insieme compreso tra il piano $z = 0$ e la superficie.

Vogliamo quindi calcolare

$$\int_V dx dy dz.$$

Passiamo a coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z. \end{cases}$$

Si calcola facilmente che lo jacobiano della trasformazione è r . Dunque va calcolato

$$\int_{\mathcal{R}} r \, dr \, dz \, d\theta.$$

L'insieme \mathcal{R} è ora

$$\mathcal{R} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq Y, 0 \leq z \leq f(r)\}.$$

Dunque, riducendo l'integrale triplo ad integrali iterati si trova

$$V = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^Y \left[\int_0^{f(r)} r \, dz \right] dr \right] d\theta = 2\pi \int_0^Y r f(r) \, dr.$$

Supponiamo invece che il grafico che si fa ruotare sia dato mediante una funzione $y = f(z)$, $0 \leq z \leq Z$. Procedendo in modo analogo si trova per il volume la formula

$$V = \pi \int_0^Z f^2(z) \, dz$$

il cui significato geometrico è ovvio se si nota che $f(z)$ è il raggio della circonferenza di cui ruota il punto di coordinate $(z, f(z))$.