Insiemi di punti dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Assegnato lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ consideriamo $X \subseteq \mathbb{R}^n \mid X \neq \emptyset$.

Definizione. $P_0 \in \mathbb{R}^n$ è ***interno*** a $X) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} (\exists I(P_0) \mid I(P_0) \subseteq X$,
essendo $I(P_0)$ un *intorno* del punto P_0. La nozione di intorno di un punto in $\mathbb{R}^n$ è la naturale generalizzazione della medesima nozione nello spazio euclideo $\mathbb{R}^1$. Più avanti vedremo una definzione più rigorosa.

Evidentemente:

$$P_0 \in \mathbb{R}^n \text{ è interno a } X) \Longrightarrow (P_0 \in X$$

Definizione. $P_0 \in \mathbb{R}^n$ è ***esterno*** a $X) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} (\exists I(P_0) \mid I(P_0) \cap X = \emptyset$

Inidichiamo con $C(X)$ il complementare di X:

$$C(X) = \mathbb{R}^n - X$$

Abbiamo:

$$P_0 \in \mathbb{R}^n \text{ è esterno a } X) \Longrightarrow (P_0 \text{ è interno a } C(X)$$

Definizione. $P_0 \in \mathbb{R}^n$ è ***di frontiera*** per $X)$
$\stackrel{def}{\Longleftrightarrow} (P_0$ non nè interno, nè esterno a $X)$
$\Longleftrightarrow (\forall I(P_0),\ \ I(P_0) \cap X \neq \emptyset,\ I(P_0) \cap C(X) \neq \emptyset$

$$\overset{\circ}{X} \stackrel{def}{=} \{P \in \mathbb{R}^n \mid P \text{ è interno a } X\}$$
$$\partial X \stackrel{def}{=} \{P \in \mathbb{R}^n \mid P \text{ è di frontiera per } X\}$$

Si legge:

$$\overset{\circ}{X} \quad \textbf{interno di } X$$
$$\partial X \ \textbf{frontiera di } X$$

Si osservi che $\overset{\circ}{X} \subseteq X$, mentre non sempre ∂X è un sottoinsieme di X.
Evidentemente:

$$\overset{\circ}{X} = X - \partial X$$
$$\partial X = \partial C(X)$$

Proposizione.

$$\partial X = \emptyset \Longleftrightarrow X = \emptyset, \mathbb{R}^n$$

Proof. Omessa. $\square$

Esempio

$$X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

Poniamo

$$x_n \stackrel{def}{=} \frac{1}{n}$$

Si ha:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, \exists \delta > 0 \mid I\left(x\right) = \left(x - \delta, x + \delta\right) \nsubseteq X) \Longrightarrow \mathring{X} = \emptyset$$

cioè l'insieme (1) è privo di punti interni.
Inoltre:

$$\forall x_n \in X, \, \exists \delta_n > 0 \mid I\left(x_n\right) = \left(x_n - \delta_n, x_n + \delta_n\right) \cap X \neq \emptyset, \, I\left(x_n\right) \cap C\left(X\right) \neq \emptyset,$$

Cioè

$$\forall x_n \in X, \, x_n \in \partial X \Longrightarrow X \subseteq \partial X$$

Quindi ogni punto di X è di frontiera per X.
Il complementare di X:

$$C\left(X\right) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$$

Abbiamo:

$$\forall x \in C\left(X\right) - \{0\}, \, \exists I\left(x\right) \mid I\left(x\right) \cap X = \emptyset \Longrightarrow x \notin \partial X$$

Il punto $\bar{x} = 0$ è tale che

$$\exists I\left(\bar{x}\right) = \left(-\delta, \delta\right) \mid I\left(\bar{x}\right) \cap X \neq \emptyset, \, I\left(\bar{x}\right) \cap C\left(X\right) \neq \emptyset,$$

donde $\bar{x} \in \partial X$. Si conclude che:

$$\partial X = X \cup \{0\}$$

***

Definizione. X è ***chiuso***$) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\partial X \subseteq X$

Definizione. X è ***aperto***$) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (X \cap \partial X = \emptyset) \Longleftrightarrow X = \mathring{X}$

Definizione. Dicesi ***campo*** ogni insieme aperto.

Esempio.

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2 \right\} \\
\partial\Gamma &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2 \right\} \\
C(\Gamma) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > R^2 \right\}
\end{aligned}$$

Γ è chiuso: $\partial\Gamma \subset \Gamma$.
Esempio in $\mathbb{R}^1$:

$$(a, b]$$

non è nè chiuso, nè aperto. Infatti:

$$\partial (a, b] = \{a, b\}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
(a, b] \cap \partial (a, b] &= \{b\} \neq \emptyset \\
\partial (a, b] &\nsubseteq (a, b]
\end{aligned}$$