

## Esercizio 151

[ file scaricato da <http://www.extrabyte.info> ]

Assegnati gli infinitesimi per  $x \rightarrow 0^+$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= \lambda^2 \sqrt{x^3 + 2x^2} + (1 - 2\lambda) \sqrt{\sin x} \tan \sqrt{x} \\g(x) &= x,\end{aligned}$$

determinare i valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  tali che  $f, g$  sono dello stesso ordine

\*\*\*

### Soluzione

Calcoliamo il limite del rapporto:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^2 \sqrt{x^3 + 2x^2} + (1 - 2\lambda) \sqrt{\sin x} \tan \sqrt{x}}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \lambda^2 \sqrt{x+1} + (1 - 2\lambda) \sqrt{\frac{\sin x}{x} \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \right] \\&= \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\&= (\lambda - 1)^2\end{aligned}$$

Abbiamo:

$$f, g \text{ dello stesso ordine} \iff \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff (\lambda - 1)^2 \neq 0 \iff \lambda \neq 1$$

## Esercizio 152

Confrontare gli infinitesimi (per  $x \rightarrow +\infty$ ):

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{3 + \sin x}{x} \\g(x) &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

\*\*\*

### Soluzione

Il rapporto è:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 3 + \sin x,$$

ed è manifestamente non regolare (per  $x \rightarrow +\infty$ ).

Altrettanto non regolare è il rapporto:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = |3 + \sin x|$$

Come è noto, in casi come questi si controlla se  $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$  verifica la proprietà:

$$\left( \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \forall x \in X_1 \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}, \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \right) \quad (1)$$

$$\implies \left( \begin{array}{l} f \text{ e } g \text{ sono infiniti} \\ \text{dello stesso ordine} \end{array} \right),$$

essendo  $X_1$  l'insieme di definizione di  $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ , cioè  $X_1 = \mathbb{R}$ . Si osservi che qui è  $x_0 = +\infty$ , per cui è

$I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I(+\infty) = (a, +\infty)$ . Perciò la condizione precedente si scrive

$$\left( \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \forall x \in (a, +\infty), \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \right) \quad (2)$$

$$\implies \left( \begin{array}{l} f \text{ e } g \text{ sono infiniti} \\ \text{dello stesso ordine} \end{array} \right),$$

Ricordiamo che per una nota proprietà del valore assoluto:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq ||\alpha| + |\beta||,$$

per cui, tenendo conto che  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq 1$ , si ha:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2 \leq |3 - \sin x| \leq 3 + |\sin x| \leq 4$$

Quindi:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq 4,$$

per cui gli infinitesimi assegnati sono dello stesso ordine.

### Esercizio 153

Confrontare gli infinitesimi (per  $x \rightarrow +\infty$ ):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{x} \\ g(x) &= \frac{\cos x}{x} \end{aligned} \quad (3)$$

\*\*\*

#### Soluzione

Il rapporto è:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \tan x,$$

ed è manifestamente non regolare (per  $x \rightarrow +\infty$ ).

Altrettanto non regolare è il rapporto:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = |\tan x|$$

In casi come questi si controlla se  $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$  verifica la proprietà:

$$\begin{aligned} & \left( \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \forall x \in X_1 \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}, \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \right) \\ & \implies \left( \begin{array}{l} f \text{ e } g \text{ sono infiniti} \\ \text{dello stesso ordine} \end{array} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

essendo  $X_1$  l'insieme di definizione di  $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = |\tan x|$ , cioè  $X_1 = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}(1+2k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Si osservi che qui è  $x_0 = +\infty$ , per cui è  $I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I(+\infty) = (a, +\infty)$ . Perciò la condizione precedente si scrive

$$\begin{aligned} & \left( \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \forall x \in X_1 \cap (a, +\infty), \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \right) \\ & \implies \left( \begin{array}{l} f \text{ e } g \text{ sono infiniti} \\ \text{dello stesso ordine} \end{array} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

Evidentemente:

$$\begin{aligned} & \left( \nexists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \forall x \in X_1 \cap (a, +\infty), \varepsilon_1 \leq |\tan x| \leq \varepsilon_2 \right) \\ & \implies \left( \begin{array}{l} f \text{ e } g \text{ sono} \\ \text{non confrontabili} \end{array} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

Come è noto, se  $f, g$  sono non confrontabili, non è possibile asserire che  $f$  è di ordine inferiore o superiore a  $g$ ; però è possibile asserire che  $f$  è di ordine non superiore o non inferiore a  $g$ , in base a certe proprietà verificate intorno al punto di accumulazione  $x_0$ . Più precisamente, per vedere se  $f$  è di ordine non inferiore a  $g$ , si controlla questa condizione:

$$\exists I(+\infty) \mid x \in X_1 \cap I(+\infty) \implies \inf_{I(x_0)} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0, \quad \sup_{I(x_0)} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < +\infty, \quad (7)$$

Nel caso di  $|\tan x|$ , tale condizione non è verificata. Infatti:

$$\nexists I(+\infty) \mid x \in X_1 \cap I(+\infty) \implies \inf_{I(x_0)} |\tan x| = 0, \quad \sup_{I(x_0)} |\tan x| < +\infty, \quad (8)$$

Per vedere invece se  $f$  è di ordine non superiore a  $g$ , si controlla questa condizione:

$$\forall I(x_0), \exists \varepsilon > 0 \mid x \in X_1 \cap I(x_0) - \{x_0\} \implies \frac{|f(x)|}{|g(x)|} > \varepsilon, \quad \sup_{I(x_0)} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty, \quad (9)$$

Nel caso di  $|\tan x|$ :

$$\forall I(+\infty), \sup_{I(x_0)} |\tan x| = +\infty$$

Ma:

$$\nexists \varepsilon > 0 \mid x \in X_1 \cap I(+\infty) \implies |\tan x| > \varepsilon$$

Si conclude che gli infinitesimi (3) non sono confrontabili, e non verificano nemmeno limitazioni del tipo (5),(9).

## Esercizio 169

Determinare l'ordine dell'infinitesimo

$$f(x) = \frac{(1 - \cos x)^4 + x^5 + \sqrt{x} \sin^3 x}{\sin x + 7x^4}, \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

assumendo come infinitesimo di riferimento  $u(x) = x$ .

\*\*\*

### Soluzione

Anzichè calcolare il limite del rapporto  $f(x)/u(x)^\alpha$ , utilizziamo alcune proprietà note. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} 1 - \cos x \text{ ha ordine } 2 &\implies (1 - \cos x)^4 \text{ ha ordine } 2 \cdot 4 = 8 \\ x^5 &\text{ ha ordine } 5 \\ \left( \sqrt{x} \text{ ha ordine } \frac{1}{2}, \sin^3 x \text{ ha ordine } 3 \right) &\implies \sqrt{x} \sin^3 x \text{ ha ordine } \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} \\ \sin x + 7x^4 &\text{ ha ordine } \alpha_2 = 1 \end{aligned}$$

Dalle prime tre si ricava che il numeratore  $(1 - \cos x)^4 + x^5 + \sqrt{x} \sin^3 x$  ha ordine  $\alpha_1 = \min \{8, 5, \frac{7}{2}\} = \frac{7}{2}$ , quindi:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{5}{2}$$

## Esercizio 170

Determinare il valore del parametro reale  $\lambda$ , tale che

$$f(x) = (1 + x^2)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}}, \quad (10)$$

è per  $x \rightarrow +\infty$ , un infinitesimo di ordine  $\max$  (assumendo come infinitesimo di riferimento  $u(x) = \frac{1}{x}$ ).

\*\*\*

## Soluzione

Osserviamo innanzitutto che:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}} = 0^+$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^{\frac{1}{1+\lambda^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha - \frac{2}{1+\lambda^2}}}{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^{\frac{1}{1+\lambda^2}}} \\ &= l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha - \frac{2}{1+\lambda^2} = 0 \\ &\iff \alpha = \frac{2}{1+\lambda^2} \end{aligned}$$

Come ci si aspettava l'ordine dell'infinitesimo (10) è una funzione di  $\lambda$ :

$$\alpha(\lambda) = \frac{2}{1+\lambda^2} \quad (11)$$

Dalla (11) vediamo che:

$$\alpha_{\max} = \alpha(0) = 2 \quad (12)$$

Si conclude che l'infinitesimo (10) è di ordine massimo per  $\lambda = 0$ .

## Esercizio 171

Determinare il valore del parametro reale  $\lambda$ , tale che

$$f(x) = 1 - \cos x + \lambda \sin^2 x, \quad (13)$$

è per  $x \rightarrow 0$ , un infinitesimo di ordine superiore al secondo (assumendo come infinitesimo di riferimento  $u(x) = x$ ).

\*\*\*

## Soluzione

Deve essere:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \lambda \sin^2 x}{x^2} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lambda \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 0$$

Cioè:

$$\frac{1}{2} + \lambda = 0$$

Si conclude che l'infinitesimo (13) è di ordine superiore al secondo se e solo se  $\lambda = -\frac{1}{2}$ .

## Esercizio 172

Confrontare gli infinitesimi (per  $x \rightarrow 0$ ):

$$f_1(x) = x - \ln(1+x), \quad f_2(x) = 1 - \cos x$$

\*\*\*

### Soluzione

Calcoliamo il limite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x} &= \frac{0}{0} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x) \sin x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Quindi  $f_1$  ed  $f_2$  oltre ad essere dello stesso ordine, sono equivalenti:  $f_1 \sim f_2$ .

La sviluppo di  $f_1$  nella sua parte principale (rispetto a  $f_2$ ) ed in un infinitesimo di ordine superiore (rispetto a  $f_2$ ) è:

$$x - \ln(1+x) = 1 - \cos x + \varepsilon(x)$$

## Esercizio 173

Determinare l'ordine dell'infinito:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}}, \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

assumendo  $v(x) = x$  come infinito di riferimento.

\*\*\*

### Soluzione

Calcoliamo il limite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\alpha}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} & (14) \\ &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^{-2\alpha}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-2\alpha}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-2\alpha}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} = \frac{0}{0}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \frac{\pi}{2} - \arctan x \implies x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-2\alpha}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\cot t)^{-2\alpha}}{t} \\ &= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} 2\alpha \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\sin t)^{1-2\alpha} (\cos t)^{1+2\alpha}} \\ &\neq 0 \iff 1 - 2\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Perciò l'infinitesimo assegnato è di ordine  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Per tale valore di  $\alpha$  il limite (14) vale 1, per cui

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \sqrt{x} + \eta(x),$$

essendo  $\eta(x)$  un infinito di ordine inferiore a  $\frac{1}{2}$ . Quindi:

$$x \rightarrow +\infty \implies \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \simeq \sqrt{x}$$

In altri termini, nel limite  $x \rightarrow +\infty$ , la funzione  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}}$  si comporta come  $\sqrt{x}$ , come possiamo vedere dal grafico in figura. (1)

## Esercizio 174

Confrontare gli infinitesimi (per  $x \rightarrow 0$ ):

$$f_1(x) = x - \sin x, \quad f_2(x) = \tan^2 x - \sin^2 x$$

\*\*\*

### Soluzione

Calcoliamo il limite

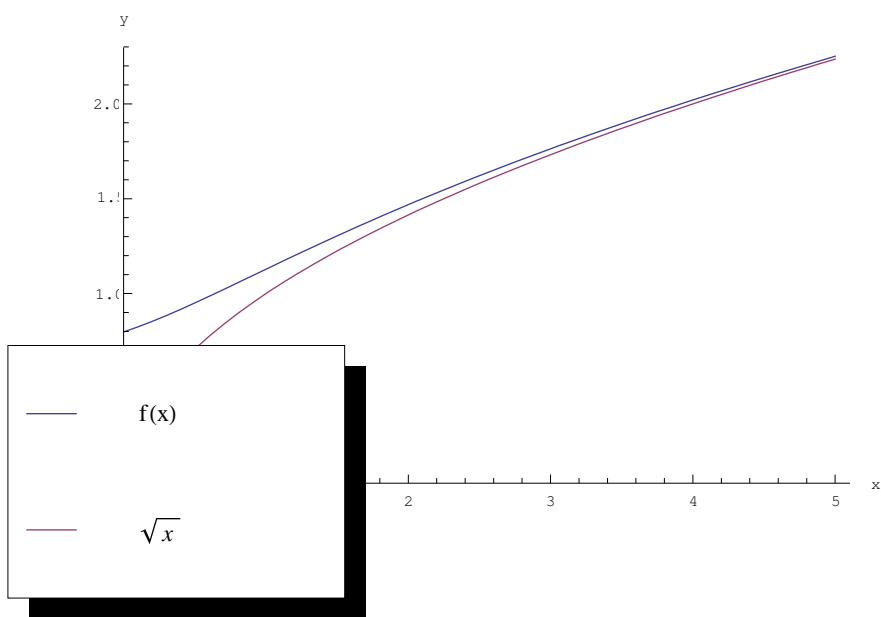


Figure 1: Confronto tra  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}}$  e  $\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan^2 x - \sin^2 x} \\
&= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) \cos^2 x}{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) \cos^2 x}{\sin^4 x} \\
&= \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) \cos^2 x}{\sin^4 x} \right] \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x \right)
\end{aligned} \tag{15}$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x) \cos^2 x}{\sin^4 x} &= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4 \sin^3 x \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x^2}}{4 \frac{\sin^2 x}{x^2} \sin x \cos x} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{4 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1} = \infty
\end{aligned}$$

Tenendo conto che  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1$ , si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$$

Quindi  $f_2(x)$  è di ordine superiore rispetto a  $f_1(x)$ .

### Esercizio 175

Determinare l'ordine dell'infinito (per  $x \rightarrow +\infty$ ):

$$f(x) = 3x^2 - 2x \cos x + \sin x,$$

assumendo come infinito di riferimento  $v(x) = x$ .

\*\*\*

#### Soluzione

È evidente che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Quindi calcoliamo il limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x \cos x + \sin x}{x^\alpha} \\
&= 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2-\alpha} - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha-1}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}
\end{aligned}$$

Per  $\alpha = 2$ :

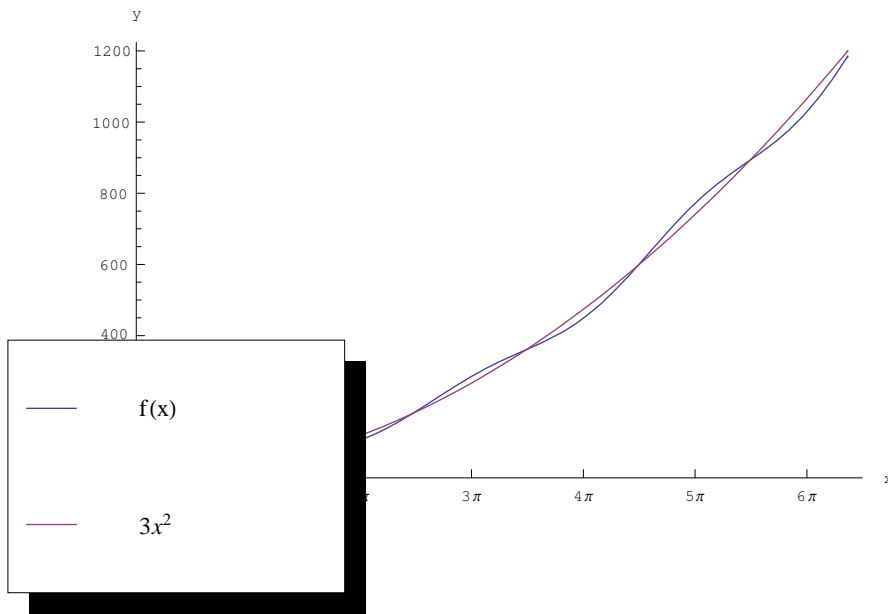


Figure 2: confronto asintotico tra  $f(x) = 3x^2 - 2x \cos x + \sin x$  e  $3x^2$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2-\alpha} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha-1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

Per cui  $f(x)$  è di ordine 2. Il suo comportamento asintotico è:

$$3x^2 - 2x \cos x + \sin x \simeq 3x^2, \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Quindi nel limite  $x \rightarrow +\infty$ , la funzione  $f(x) = 3x^2 - 2x \cos x + \sin x$  si comporta come  $3x^2$ , come possiamo vedere dal grafico in figura (2)