Esercizio 146

Determinare l'ordine dell'infinitesimo (in $x = 0$)

$$f(x) = a^x - 1$$

assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x$.

***

Soluzione

Abbiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{u(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \neq 0,$$

poichè è $a \neq 1$. Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1.

La parte principale di $f(x)$ è $x \ln a$, e lo sviluppo dell'infinitesimo è:

$$a^x - 1 = x \ln a + \varepsilon(x),$$

essendo $\varepsilon(x)$ un infinitesimo di ordine superiore a 1. Pertanto:

$$x \to 0 \Longrightarrow a^x - 1 \simeq x \ln a$$

Esercizio 160

Determinare l'ordine dell'infinitesimo (in $x = 0$)

$$f(x) = x - \sin x \tag{1}$$

assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x$.

***

Soluzione

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} &= \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^\alpha} = \frac{0}{0} \\ &\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\alpha x^{\alpha - 1}} \\ &= l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha - 1 = 2 \end{aligned} \tag{2}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = 3$.

Per (2) il limite (2) vale $l = \frac{1}{6}$, per cui la parte principale di $f(x)$ è $x^3/6$ e lo sviluppo dell'infinitesimo è:

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x),$$

essendo $\varepsilon(x)$ un infinitesimo di ordine superiore a 3. Pertanto:

$$x \to 0 \Longrightarrow x - \sin x \simeq \frac{x^3}{6}$$

Esercizio 161

Determinare l'ordine dell'infinitesimo (in $x = 0$)

$$f(x) = x - \sin x$$

assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x$.

***

Soluzione
Abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^\alpha} = \frac{0}{0} \\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\alpha x^{\alpha-1}} \\
&= l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha - 1 = 2
\end{aligned} \tag{3}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = 3$.
Per $\alpha = 3$ il limite (3) vale $l = \frac{1}{6}$, per cui la parte principale di $f(x)$ è $x^3/6$ e lo sviluppo dell'infinitesimo è:

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x),$$

essendo $\varepsilon(x)$ un infinitesimo di ordine superiore a 3. Pertanto:

$$x \to 0 \Longrightarrow x - \sin x \simeq \frac{x^3}{6}$$

Esercizio 162

Determinare l'ordine dell'infinitesimo

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x^2, \quad \text{per } x \to +\infty$$

assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x) = \frac{1}{x}$.

***

Soluzione
Abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x^2}{\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{\infty}{\infty} \\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{2x}{1+x^4}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\
&= \frac{2}{\alpha} \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\alpha+2}}{1+x^4} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha + 2 = 4
\end{aligned} \tag{4}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = 2$.
Per $\alpha = 2$ Il limite (4) vale $l = 1$, per cui la parte principale di $f(x)$ è $\frac{1}{x^2}$ e lo sviluppo dell'infinitesimo è:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x^2 = \frac{1}{x^2} + \varepsilon(x),$$

essendo $\varepsilon(x)$ un infinitesimo di ordine maggiore di 3. Pertanto:

$$x \to +\infty \Longrightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan x^2 \simeq \frac{1}{x^2}$$

Esercizio 163

Determinare l'ordine dell'infinitesimo

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x}}, \quad \text{per } x \to 0^+$$

assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x$.

***

Soluzione
La funzione assegnata è un infinitesimo in quanto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} 3 \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2/3}}{1+x} = 0$$

Inoltre:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{u(x)^{\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{1}{3}+\alpha}} = \frac{0}{0} \tag{5}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{\left(\frac{1}{3}+\alpha\right) x^{\alpha-\frac{2}{3}}} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = \frac{2}{3}$.
Per $\alpha = \frac{2}{3}$ Il limite (5) vale $l = 1$, per cui la parte principale di $f(x)$ è $x^{2/3}$ e lo sviluppo dell'infinitesimo è:

$$\frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x}} = x^{2/3} + \varepsilon(x),$$

essendo $\varepsilon(x)$ un infinitesimo di ordine maggiore di $2/3$. Pertanto:

$$x \to 0^+ \Longrightarrow \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x}} \simeq x^{2/3}$$

Esercizio 164

Determinare l'ordine dell'infinitesimo

$$f(x) = \ln x, \quad \text{per } x \to 1^+$$

assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x) = |x-1|$.

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{(x-1)^a} = \frac{0}{0} \tag{6}$$
$$\overset{H}{=} \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x(x-1)^{a-1}} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 1$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = 1$.
Per $\alpha = 1$ il limite (6) vale $l = 1$, per cui $\ln x$ è equivalente a $|x-1|$ e lo sviluppo dell'infinitesimo è:

$$\ln x = |x-1| + \varepsilon(x),$$

essendo $\varepsilon(x)$ un infinitesimo di ordine maggiore di 1. Pertanto:

$$x \to 1^+ \Longrightarrow \ln x \simeq |x-1|$$

Esercizio 165

Determinare l'ordine dell'infinitesimo

$$f(x) = \sqrt{x} + \tan x \sqrt{\tan x} + \sqrt{x}\sin^2 x, \quad \text{per } x \to 0^+$$

assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x$.

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \tan x\sqrt{\tan x} + \sqrt{x}\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{0}{0}$$

Questo limite può essere calcolato con il principio di sostituzione degli infinitesimi. A tale scopo valutiamo l'ordine di $\tan x\sqrt{\tan x} + \sqrt{x}\sin^2 x$ rispetto a $\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x\sqrt{\tan x} + \sqrt{x}\sin^2 x}{\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \tan x \sqrt{\frac{\tan x}{x}} + \lim_{x\to 0^+} \sin^2 x \\
&= 0,
\end{aligned}$$

per cui $\tan x\sqrt{\tan x}+\sqrt{x}\sin^2 x$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\sqrt{x}$, quindi per il principio di sostituzione possiamo trascurarlo:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}+\tan x\sqrt{\tan x}+\sqrt{x}\sin^2 x}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}-\alpha}=\cancel{l}\neq 0\Longleftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha=1/2$.

Esercizio 166

Determinare l'ordine dell'infinitesimo

$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{16x^5}{x^2+2}}\quad\text{per } x\to 0$$

assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x)=x$.

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{u(x)^\alpha}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^\alpha}\sqrt[3]{\frac{16x^5}{x^2+2}}=\frac{0}{0}\\&=\sqrt[3]{16}\cdot\lim_{x\to 0}x^{\frac{5}{3}-\alpha}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+2}\right)^{1/3}=l\neq 0\Longleftrightarrow\alpha=\frac{5}{3}\end{aligned}\tag{7}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha=5/3$.
Lo sviluppo dell'infinitesimo è:

$$\sqrt[3]{\frac{16x^5}{x^2+2}}=2x^{5/3}+\varepsilon(x),$$

essendo $\varepsilon(x)$ un infinitesimo di ordine maggiore di $5/3$.

Esercizio 167

Determinare l'ordine dell'infinitesimo

$$f(x)=x\sin^3 x,\quad\text{per } x\to 0$$

assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x)=x$.

***

Soluzione
Anzichè calcolare il limite del rapporto $f(x)/u(x)^\alpha$, utilizziamo un noto teorema secondo cui se $f_1(x)$, $f_2(x)$ sono infinitesimi di ordine α_1, α_2, il prodotto

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x),$$

è un infinitesimo di ordine $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.
Nel caso in esame, abbiamo x che ha ordine 1, e $\sin^3 x$ che ha ordine 3, per cui f ha ordine $\alpha = 4$. La parte principale è $l \cdot x^4$, essendo l il limite del rapporto, e risulta $l = 1$. Quindi:

$$x \sin^3 x = x^4 + \varepsilon(x),$$

dove $\varepsilon(x)$ è un inifinitesimo di ordine maggiore di 4.

Esercizio 168

Determinare l'ordine dell'infinitesimo

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^5}{x + \sin x}}, \quad \text{per } x \to 0$$

assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x$.

***

Soluzione
Anzichè calcolare il limite del rapporto $f(x)/u(x)^{\alpha}$, utilizziamo alcune proprietà note. Poniamo:

$$g(x) = \frac{x^3 + x^5}{x + \sin x},$$

per cui se β è l'ordine di g, allora f ha ordine $\alpha = \frac{\beta}{3}$. Determiniamo β:

$$\begin{gathered} x^3 + x^5 \text{ ha ordine } \beta_1 = 3 \\ x + \sin x \text{ ha ordine } \beta_2 = 1, \end{gathered}$$

quindi è $\beta = \beta_1 - \beta_2 = 2$. Pertanto è $\alpha = \frac{2}{3}$.

Esercizio 151

Assegnati gli infinitesimi per $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned} &f(x) = \lambda^2 \sqrt{x^3 + 2x^2} + (1 - 2\lambda) \sqrt{\sin x} \tan \sqrt{x} \\ &g(x) = x, \end{aligned}$$

determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che f, g sono dello stesso ordine

***

Soluzione
Calcoliamo il limite del rapporto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to0^+}\frac{\lambda^2\sqrt{x^3+x^2}+(1-2\lambda)\sqrt{\sin x}\tan\sqrt{x}}{x}\\
&= \lim_{x\to0^+}\left[\lambda^2\sqrt{x+1}+(1-2\lambda)\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]\\
&= \lambda^2-2\lambda+1\\
&= (\lambda-1)^2
\end{aligned}$$

Abbiamo:

$$f,g \text{ dello stesso ordine } \Longleftrightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l\in\mathbb{R}-\{0\}\Longleftrightarrow(\lambda-1)^2\neq0\Longleftrightarrow\lambda\neq1$$

Esercizio 152

Confrontare gli infinitesimi (per $x\to+\infty$):

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3+\sin x}{x}\\
g(x) &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

***

Soluzione
Il rapporto è:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=3+\sin x,$$

ed è manifestamente non regolare (per $x\to+\infty$).
Altrettanto non regolare è il rapporto:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=|3+\sin x|$$

Come è noto, in casi come questi si controlla se $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ verifica la proprietà:

$$\begin{aligned}
&\left(\exists\varepsilon_1,\varepsilon_2>0\mid\forall x\in X_1\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}\,,\ \varepsilon_1\leq\frac{|f(x)|}{|g(x)|}\leq\varepsilon_2\right)\\
&\Longrightarrow\left(\begin{array}{c}f\text{ e }g\text{ sono infiniti}\\\text{dello stesso ordine}\end{array}\right),
\end{aligned}\tag{8}$$

essendo X_1 l'insieme di definizione di $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$, cioè $X_1=\mathbb{R}$. Si osservi che qui è $x_0=+\infty$, per cui è

$I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I(+\infty) = (a, +\infty)$. Perciò la condizione precedente si scrive

$$\left(\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \forall x \in (a, +\infty),\ \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2\right) \tag{9}$$
$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{l} f \text{ e } g \text{ sono infiniti} \\ \text{dello stesso ordine} \end{array}\right),$$

Ricordiamo che per una nota proprietà del valore assoluto:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq ||\alpha| + |\beta||,$$

per cui, tenendo conto che $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq 1$, si ha:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ 2 \leq |3 - \sin x| \leq 3 + |\sin x| \leq 4$$

Quindi:

$$\forall x \in \mathbb{R},\, 2 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq 4,$$

per cui gli infinitesimi assegnati sono dello stesso ordine.

Esercizio 153

Confrontare gli infinitesimi (per $x \to +\infty$):

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{10}$$
$$g(x) = \frac{\cos x}{x}$$

***

Soluzione
Il rapporto è:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \tan x,$$

ed è manifestamente non regolare (per $x \to +\infty$).
Altrettanto non regolare è il rapporto:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = |\tan x|$$

In casi come questi si controlla se $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ verifica la proprietà:

$$\left(\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \forall x \in X_1 \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\},\ \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2\right) \tag{11}$$
$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{l} f \text{ e } g \text{ sono infiniti} \\ \text{dello stesso ordine} \end{array}\right),$$

essendo X_1 l'insieme di definizione di $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = |\tan x|$, cioè $X_1 = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}(1+2k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Si osservi che qui è $x_0 = +\infty$, per cui è
$I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I(+\infty) = (a, +\infty)$. Perciò la condizione precedente si scrive

$$\left(\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \forall x \in X_1 \cap (a, +\infty), \ \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2\right) \tag{12}$$
$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ e } g \text{ sono infiniti} \\ \text{dello stesso ordine} \end{array}\right),$$

Evidentemente:

$$(\nexists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \forall x \in X_1 \cap (a, +\infty), \ \varepsilon_1 \leq |\tan x| \leq \varepsilon_2) \tag{13}$$
$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ e } g \text{ sono} \\ \text{non confrontabili} \end{array}\right),$$

Come è noto, se f, g sono non confrontabili, non è possibile asserire che f è di ordine inferiore o superiore a g; però è possibile asserire che f è di ordine non superiore o non inferiore a g, in base a certe proprietà verificate intorno al punto di accumulazione x_0. Più precisamente, per vedere se f è di ordine non inferiore a g, si controlla questa condizione:

$$\exists I(+\infty) \mid x \in X_1 \cap I(+\infty) \Longrightarrow \inf_{I(x_0)} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0, \ \sup_{I(x_0)} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < +\infty, \tag{14}$$

Nel caso di $|\tan x|$, tale condizione non è verificata. Infatti:

$$\nexists I(+\infty) \mid x \in X_1 \cap I(+\infty) \Longrightarrow \inf_{I(x_0)} |\tan x| = 0, \ \sup_{I(x_0)} |\tan x| < +\infty, \tag{15}$$

Per vedere invece se f è di ordine non superiore a g, si controlla questa condizione:

$$\forall I(x_0), \exists \varepsilon > 0 \mid x \in X_1 \cap I(x_0) - \{x_0\} \Longrightarrow \frac{|f(x)|}{|g(x)|} > \varepsilon, \ \sup_{I(x_0)} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty, \tag{16}$$

Nel caso di $|\tan x|$:

$$\forall I(+\infty), \sup_{I(x_0)} |\tan x| = +\infty$$

Ma:

$$\nexists \varepsilon > 0 \mid x \in X_1 \cap I(+\infty) \Longrightarrow |\tan x| > \varepsilon$$

Si conclude che gli infinitesimi (10) non sono confrontabili, e non verificano nemmeno limitazioni del tipo (12),(16).

Esercizio 169

Determinare l'ordine dell'infinitesimo

$$f(x) = \frac{(1-\cos x)^4 + x^5 + \sqrt{x}\sin^3 x}{\sin x + 7x^4}, \quad \text{per } x \to 0^+$$

assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x) = x$.

***

Soluzione
Anzichè calcolare il limite del rapporto $f(x)/u(x)^\alpha$, utilizziamo alcune proprietà note. Osserviamo che:

$$1-\cos x \text{ ha ordine } 2 \Longrightarrow (1-\cos x)^4 \text{ ha ordine } 2\cdot 4 = 8$$
$$x^5 \text{ ha ordine } 5$$
$$\left(\sqrt{x} \text{ ha ordine } \frac{1}{2}, \sin^3 x \text{ ha ordine } 3\right) \Longrightarrow \sqrt{x}\sin^3 x \text{ ha ordine } \frac{1}{2}+3 = \frac{7}{2}$$
$$\sin x + 7x^4 \text{ ha ordine } \alpha_2 = 1$$

Dalle prime tre si ricava che il numeratore $(1-\cos x)^4 + x^5 + \sqrt{x}\sin^3 x$ ha ordine $\alpha_1 = \min\left\{8, 5, \frac{7}{2}\right\} = \frac{7}{2}$, quindi:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{5}{2}$$

Esercizio 170

Determinare il valore del parametro reale λ, tale che

$$f(x) = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}}, \tag{17}$$

è per $x \to +\infty$, un infinitesimo di ordine max (assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x) = \frac{1}{x}$).

***

Soluzione
Osserviamo innanzitutto che:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lim_{x\to+\infty} \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{1+\lambda^2}} = 0^+$$

Inoltre:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{u(x)^{\alpha}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{(1+x^2)^{\frac{1}{1+\lambda^2}}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-\frac{2}{1+\lambda^2}}}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{1}{1+\lambda^2}}}\\
&= l\in\mathbb{R}-\{0\}\Longleftrightarrow \alpha-\frac{2}{1+\lambda^2}=0\\
&\Longleftrightarrow \alpha=\frac{2}{1+\lambda^2}
\end{aligned}
$$

Come ci si aspettava l'ordine dell'infinitesimo (17) è una funzione di λ:

$$\alpha(\lambda)=\frac{2}{1+\lambda^2} \tag{18}$$

Dalla (18) vediamo che:

$$\alpha_{\max}=\alpha(0)=2 \tag{19}$$

Si conclude che l'infinitesimo (17) è di ordine massimo per $\lambda=0$.

Esercizio 171

Determinare il valore del parametro reale λ, tale che

$$f(x)=1-\cos x+\lambda\sin^2 x, \tag{20}$$

è per $x\to 0$, un infinitesimo di ordine superiore al secondo (assumendo come infinitesimo di riferimento $u(x)=x$).

***

Soluzione
Deve essere:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\lambda\sin^2 x}{x^2}=0\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lambda\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=0$$

Cioè:

$$\frac{1}{2}+\lambda=0$$

Si conclude che l'infinitesimo (20) è di ordine superiore al secondo se e solo se $\lambda=-\frac{1}{2}$.

Esercizio 172

Confrontare gli infinitesimi (per $x \to 0$):

$$f_1(x) = x - \ln(1+x), \quad f_2\ (x) = 1 - \cos x$$

***

Soluzione
Calcoliamo il limite

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{1-\cos x} \\
&= \frac{0}{0} \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x)\sin x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Quindi f_1 ed f_2 oltre ad essere dello stesso ordine, sono equivalenti: $f_1 \sim f_2$.
La sviluppo di f_1 nella sua parte principale (rispetto a f_2) ed in un infinitesimo di ordine superiore (rispetto a f_2) è:

$$x - \ln(1+x) = 1 - \cos x + \varepsilon(x)$$

Esercizio 173

Determinare l'ordine dell'infinito:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}}, \quad \text{per } x \to +\infty$$

assumendo $v(x) = x$ come infinito di riferimento.

***

Soluzione
Calcoliamo il limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{v(x)^{\alpha}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-\alpha}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \\
&= \frac{0}{0} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^{-2\alpha}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-2\alpha}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x}}
\end{aligned} \tag{21}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-2\alpha}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}=\frac{0}{0}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t=\frac{\pi}{2}-\arctan x\Longrightarrow x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cot t$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-2\alpha}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}&=\lim_{t\to0^+}\frac{(\cot t)^{-2\alpha}}{t}\\&=\frac{0}{0}\stackrel{H}{=}2\alpha\lim_{t\to0^+}\frac{1}{(\sin t)^{1-2\alpha}(\cos t)^{1+2\alpha}}\\&\neq0\Longleftrightarrow1-2\alpha=0\Longleftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Perciò l'infinitesimo assegnato è di ordine $\alpha=\frac{1}{2}$. Per tale valore di α il limite (21) vale 1, per cui

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}=\sqrt{x}+\eta(x),$$

essendo $\eta(x)$ un infinito di ordine inferiore a $\frac{1}{2}$. Quindi:

$$x\to+\infty\Longrightarrow\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}\simeq\sqrt{x}$$

In altri termini, nel limite $x\to+\infty$, la funzione $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}$ si comporta come $\sqrt{x}$, come possiamo vedere dal grafico in figura. (1)

Esercizio 174

Confrontare gli infinitesimi (per $x\to0$):

$$f_1(x)=x-\sin x,\ f_2(x)=\tan^2x-\sin^2x$$

***

Soluzione
Calcoliamo il limite

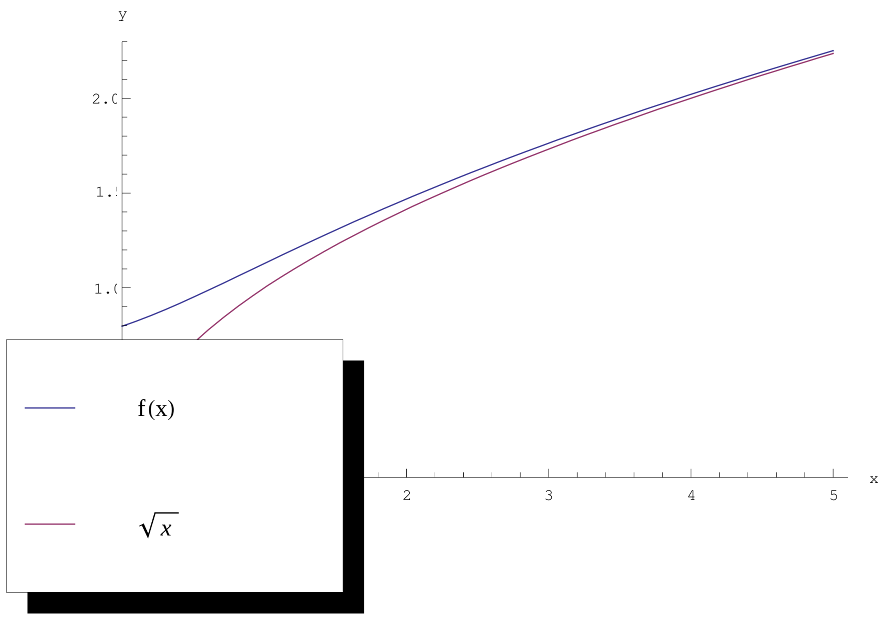


Figure 1: Confronto tra $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}}$ e $\sqrt{x}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^2 x-\sin^2 x}\\
&= \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\cos^2 x}{\sin^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\cos^2 x}{\sin^4 x}\\
&= \left[\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\cos^2 x}{\sin^4 x}\right]\cdot\left(\lim_{x\to 0}\cos^2 x\right) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Calcoliamo a parte:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\cos^2 x}{\sin^4 x} &= \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4\sin^3 x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{4\frac{\sin^2 x}{x^2}\sin x\cos x}\\
&= \frac{\frac{1}{2}}{4\cdot 1\cdot 0\cdot 1} = \infty
\end{aligned}
$$

Tenendo conto che $\lim_{x\to 0}\cos^2 x = 1$, si ha:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty
$$

Quindi $f_2(x)$ è di ordine superiore rispetto a $f_1(x)$.

Esercizio 175

Determinare l'ordine dell'infinito (per $x\to+\infty$):

$$
f(x) = 3x^2 - 2x\cos x + \sin x,
$$

assumendo come infinito di riferimento $v(x) = x$.

***

Soluzione
È evidente che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Quindi calcoliamo il limite:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{v(x)^\alpha} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x\cos x+\sin x}{x^\alpha}\\
&= 3\lim_{x\to+\infty}x^{2-\alpha} - 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha-1}} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}
\end{aligned}
$$

Per $\alpha = 2$:

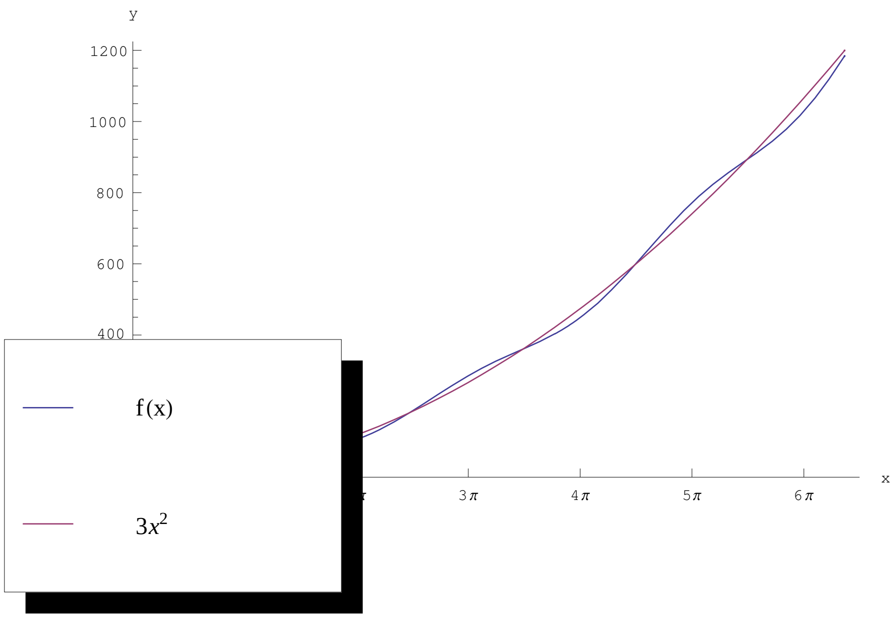


Figure 2: confronto asintotico tra $f(x) = 3x^2 - 2x\cos x + \sin x$ e$3x^2$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2-\alpha} = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$$

Per cui $f(x)$ è di ordine 2. Il suo comportamento asintotico è:

$$3x^2 - 2x\cos x + \sin x \simeq 3x^2, \quad (x \to +\infty)$$

Quindi nel limite $x \to +\infty$, la funzione $f(x) = 3x^2 - 2x\cos x + \sin x$ si comporta come $3x^2$, come possiamo vedere dal grafico in figura (2)

Esercizio 176

Determinare l'ordine dell'infinito (per $x \to +\infty$):

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x^3+1}{2x-1}}, \tag{23}$$

assumendo come infinito di riferimento $v(x) = x$.

***

Soluzione
Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{v(x)^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\sqrt{\frac{4x^3+1}{2x-1}} \tag{24}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x^3+1}{x^{2\alpha}(2x-1)}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3(1-\alpha)}\left(4+\frac{1}{x^3}\right)}{2-\frac{1}{x^{3\alpha}}}} \tag{25}$$

$$= l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = 1 \tag{26}$$

Si conclude che $f(x)$ è di ordine 1. La sua decomposizione è

$$\sqrt{\frac{4x^3+1}{2x-1}} = \sqrt{2}x + \eta(x)$$

Il comportamento asintotico è perciò:

$$\sqrt{\frac{4x^3+1}{2x-1}} \simeq \sqrt{2}x, \quad (x\to+\infty)$$

Quindi nel limite $x \to +\infty$, la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{4x^3+1}{2x-1}}$ si comporta come $\sqrt{2}x$, come possiamo vedere dal grafico in figura ().

Esercizio 177

Determinare l'ordine dell'infinito (per $x \to +\infty$):

$$f(x) = x^5\left(1+\frac{\sin x^3}{x}\right), \tag{27}$$

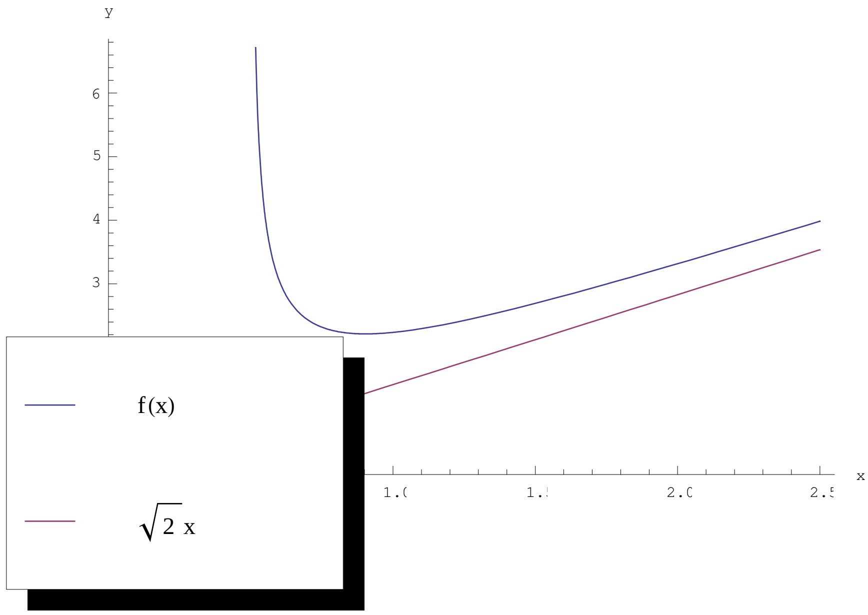
assumendo come infinito di riferimento $v(x) = x$.

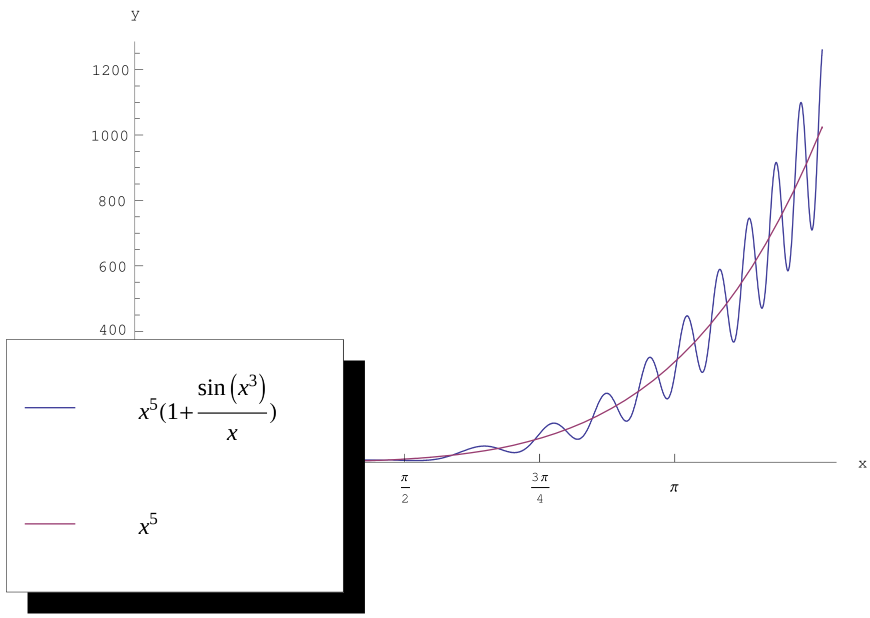
***

Soluzione
Questa funzione è la somma di x^5 e di $x^4 \sin x^3$. Quest'ultimo è un'oscillazione sinusoidale modulata da x^4, e come tale diverge positivamente per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 \sin x^3 = +\infty$$

Per determinare l'ordine di $f(x)$, calcoliamo il limite:


y
6
5
4
3
f(x)
$\sqrt{2}\,x$
1.0
1.5
2.0
2.5
x



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{v(x)^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}x^{5-\alpha}\left(1+\frac{\sin x^3}{x}\right) \tag{28}$$
$$=\begin{cases} +\infty, & \text{se } 0<\alpha<5 \\ 1, & \text{se } \alpha=5 \\ 0, & \text{se } \alpha>5 \end{cases}$$

Si conclude che $f(x)$ è di ordine 5. La sua parte principale è x^5. Il comportamento asintotico è perciò:

$$x^5\left(1+\frac{\sin x^3}{x}\right)\simeq x^5, \quad (x\to+\infty)$$

Quindi nel limite $x\to+\infty$, la funzione $f(x)$ si comporta come x^5,e ciò è visibile dal grafico in figura.

Esercizio 178

Determinare l'ordine dell'infinito di $\tan x$ per $x\to\frac{\pi}{2}^-$, assumendo come infinito di riferimento $v(x)=\frac{1}{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|}$.

***

Soluzione
Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)}{v(x)^\alpha}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan x}{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{-\alpha}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{\alpha}}{\cot x}\tag{29}$$

Esegiamo il cambio di variabile $t=x-\frac{\pi}{2}$, per cui è $\cot x=-\tan t$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)}{v(x)^\alpha}=\lim_{t\to 0^-}\frac{t^\alpha}{\tan t}=l\neq 0\Longleftrightarrow\alpha=1$$

Si conclude che $\tan x$ è un infinito del prim'ordine per $x\to\frac{\pi}{2}^-$:

$$\tan x\simeq\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\quad\text{per } x\to\frac{\pi}{2}^-$$

Esercizio 179

Applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi, calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan^2\sqrt{5^{2x}-1}+\left(1-\cos^3 x\right)^2}{\tan^3(\arcsin x)+\left[1-\sqrt[5]{(1+x)^4}\right]\ln(1+3x)}$$

***

Soluzione
Dai limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1,$$

cioè $\arctan x$ è un infinitesimo (per $x\to 0$) del primo ordine rispetto a x, per cui possiamo scrivere:

$$\arctan x\simeq x,\ \ (x\to 0)$$

Quindi:

$$\arctan^2\sqrt{5^{2x}-1}\simeq 5^{2x}-1,\ \ (x\to 0),$$

che a sua volta implica:

$$x\arctan^2\sqrt{5^{2x}-1}\simeq x\left(5^{2x}-1\right),\quad (x\to 0)\tag{30}$$

Ma

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-1}{x}=2\ln 5\Longrightarrow 5^{2x}-1\simeq 2x\ln 5,\quad (x\to 0)$$

La (30) diventa:

$$x\arctan^2\sqrt{5^{2x}-1}\simeq 2x^2\ln 5,\quad (x\to 0)$$

Passiamo a $(1-\cos^3 x)^2$. Abbiamo:

$$1-\cos^3 x=(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)$$

$(1+\cos x+\cos^2 x)$ non è un infinitesimo per $x\to 0$, poichè è convergente a 3, pertanto dà contributo nullo all'ordine di infinitesimo di $1-\cos^3 x$. Inoltre, $(1-\cos x)$ è di ordine 2, per cui l'ordine di $(1-\cos^3 x)^2$ è $2\cdot 2=4$. Ciò implica che è trascurabile rispetto a $x\arctan^2\sqrt{5^{2x}-1}$.
Al denominatore troviamo $\tan^3(\arcsin x)$, che è di ordine 3 rispetto a $\arcsin x$, e quindi rispetto a x. Valutiamo l'ordine di $\left[1-\sqrt[5]{(1+x)^4}\right]\ln(1+3x)$. A tale scopo osserviamo che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[5]{(1+x)^4}}{x^\alpha}=\frac{0}{0}\overset{H}{=}-\frac{4}{5\alpha}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-\frac{4}{5}}}{x^{\alpha-1}}\neq 0\Longleftrightarrow\alpha=1$$

Quindi:

$$1-\sqrt[5]{(1+x)^4}\simeq -\frac{4}{5}x,\quad (x\to 0)\tag{31}$$

Inoltre:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x^\beta}=\frac{0}{0}\overset{H}{=}\frac{3}{\beta}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\beta-1}(1+3x)}\neq 0\Longleftrightarrow\beta=1$$

Quindi:

$$\ln(1+3x)\simeq 3x,\quad (x\to 0)\tag{32}$$

Dalle (31)-(32):

$$\left[1-\sqrt[5]{(1+x)^4}\right]\ln(1+3x)\simeq -\frac{12}{5}x^2,\quad (x\to 0)$$

Da tutto ciò vediamo che $\tan^3(\arcsin x)$ è trascurabile rispetto a $\left[1-\sqrt[5]{(1+x)^4}\right]\ln(1+3x)$. In definitiva:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan^2\sqrt{5^{2x}-1}+(1-\cos^3 x)^2}{\tan^3(\arcsin x)+\left[1-\sqrt[5]{(1+x)^4}\right]\ln(1+3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\ln 5}{-\frac{12}{5}x^2}=-\frac{5}{6}\ln 5$$

Esercizio 180

Applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi, calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x^5 + \sin^3 x - x^2\tan x}{x - x^3 + x\sin^2 x}$$

***

Soluzione
Risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5 + \sin^3 x - x^2\tan x}{\sin x} = 0,$$

cioè $x^5 + \sin^3 x - x^2\tan x$ è un infinitesimo (per $x \to 0$) di ordine superiore rispetto a $\sin x$, per cui possiamo trascurarlo.
Inoltre:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2 x - x^3}{x} = 0,$$

cioè $x\sin^2 x - x^3$ è un infinitesimo (per $x \to 0$) di ordine superiore rispetto a x, per cui possiamo trascurarlo.
Quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x^5 + \sin^3 x - x^2\tan x}{x - x^3 + x\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$