

L. Pandolfi
Spazi di Hilbert

CAF in Matematica per Le Scienze dell'Ingegneria

Corso di Elementi di Analisi Reale e Complessa

19 gennaio 2006

Indice

1	Spazi di Hilbert	3
1.1	Prodotto interno e norma	3
1.1.1	Esempi di prodotti interni e di spazi di Hilbert	6
1.2	Teorema delle proiezioni	8
1.3	Complementi ortogonali e proiezioni ortogonali	13
1.3.1	Sistemi ortonormali e calcolo di proiezioni	16
1.3.2	Serie di Fourier astratte	19
1.4	Il duale di uno spazio di Hilbert	21
1.5	L'operatore aggiunto di un operatore tra spazi di Hilbert	23
1.5.1	L'aggiunto di un operatore limitato	24
1.5.2	Operatori aggiunti ed operatori chiusi	25
1.5.3	Operatori da H in sé; operatori autoaggiunti	26
1.5.4	Dimostrazioni posposte	28
1.6	Operatori compatti	31
1.6.1	Lo spettro degli operatori compatti	34
1.6.2	Operatori compatti tra spazi diversi. Valori singolari	36
1.6.3	Proprietà geometriche degli autovalori e valori singolari	39
1.6.4	Operatori compatti ed equazioni integrali di Fredholm	41
1.6.5	Dimostrazioni posposte	42
2	La trasformata di Fourier	53
2.1	La trasformata di Fourier di funzioni	53
2.2	Le proprietà della trasformata di Fourier	55
2.2.1	Il teorema di Riemann-Lebesgue	55
2.3	L'antitrasformata di Fourier	58
2.4	La trasformata di Fourier su $L^2(\mathbb{R})$	61
2.5	Lo spazio \mathcal{S} e il suo duale	64
2.6	La trasformata di Fourier su \mathcal{S}'	67
2.6.1	Le operazioni sulle distribuzioni	71
2.6.2	Operazioni e trasformata di Fourier	73
2.6.3	Convoluzione di distribuzioni	74
2.7	Il caso delle funzioni di più variabili	79

Capitolo 1

Spazi di Hilbert

1.1 Prodotto interno e norma

Gli *spazi di Hilbert* sono particolari spazi di Banach, che generalizzano \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n con l'usuale distanza euclidea.

Conviene introdurre prima di tutto la definizione di *prodotto interno*. Sia X uno spazio lineare. Si chiama prodotto interno su X una funzione $f(x, y)$ su $X \times X$, a valori nel campo scalare, con queste proprietà:

- per ogni fissato y , la funzione $x \rightarrow f(x, y)$ è lineare:

$$f(\alpha x + \beta x', y) = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y).$$

- per ogni x ed y vale $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$. Questa proprietà implica in particolare che la parte immaginaria di $f(x, x)$ è nulla per ogni x .
- vale $f(x, x) > 0$ per ogni $x \neq 0$.

La prima proprietà mostra che

$$f(0, 0) = f(r \cdot 0, 0) = rf(0, 0)$$

per ogni numero r ; e quindi

$$f(0, 0) = 0.$$

Si noti che la funzione $f(x, y)$ non è lineare rispetto ad y ma, per ogni fissato x , vale

$$\begin{aligned} f(x, \alpha y + \beta y') &= \overline{f(\alpha y + \beta y', x)} = \overline{\alpha f(y, x) + \beta f(y', x)} \\ &= \bar{\alpha} f(x, y) + \bar{\beta} f(x, y'). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Se accade che $\Phi = \mathbb{R}$ allora gli scalari sono reali e quindi si ha linearità anche nella seconda componente.

Le proprietà (1.1) si chiama *antilinearità*.

In pratica per indicare il prodotto interno di x ed y si usa il simbolo $\langle x, y \rangle$ (o simboli analoghi, per esempio $\langle x|y \rangle$). Si osservi la somiglianza col simbolo $\langle\langle x^*, x \rangle\rangle$ usato per rappresentare l'azione del funzionale lineare x^* su x . Si noti però che $\langle\langle x^*, x \rangle\rangle$ è lineare sia rispetto alla prima che alla seconda variabile, anche quando $\Phi = \mathbb{C}$.

Due vettori x ed y si dicono *ortogonali* quando il loro prodotto interno è nullo:

$$x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0.$$

Proviamo che per i prodotti interni vale la *disuguaglianza di Schwarz*:

Teorema 1 *Per ogni x, y vale*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

L'uguaglianza vale se e solo se i vettori x ed y sono *colineari*, ossia se e solo se $x = \alpha y$, $\alpha \in \Phi$.

Dim. Se $\langle x, y \rangle = 0$ allora la disuguaglianza è ovvia. Supponiamo quindi esplicitamente $\langle x, y \rangle \neq 0$ e introduciamo

$$a = \frac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|}.$$

Consideriamo quindi che per ogni t (reale o complesso) vale

$$0 \leq \langle \bar{a}x + ty, \bar{a}x + ty \rangle.$$

Scegliamo t reale e introduciamo in quest'espressione la definizione di a . Si trova

$$0 \leq \langle \bar{a}x + ty, \bar{a}x + ty \rangle = \langle y, y \rangle t^2 + 2|\langle x, y \rangle|t + \langle x, x \rangle. \quad (1.2)$$

Questo è un polinomio in t , a coefficienti reali. Il segno di questo polinomio è costante e quindi il suo discriminante è negativo, ossia:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \quad (1.3)$$

Questa è la disuguaglianza che volevamo provare.

Se in (1.3) vale l'uguaglianza, allora il polinomio (1.2) è un quadrato:

$$\langle \bar{a}x + ty, \bar{a}x + ty \rangle = (mt + n)^2$$

per certi numeri m ed n . E' quindi nullo per $t = -n/m$, ossia

$$\bar{a}x + ty = 0.$$

I vettori x ed y sono quindi colineari. ■

Teorema 2 *La funzione definita su X da*

$$x \rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

è una norma su X .

Dim. Usando la disuguaglianza di Schwarz, proviamo che vale la disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\Re \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \quad (\text{usando la disuguaglianza di Schwarz}) \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2(\langle x, x \rangle)^{1/2} (\langle y, y \rangle)^{1/2} + \langle y, y \rangle = \left[\langle x, x \rangle^{1/2} + \langle y, y \rangle^{1/2} \right]^2. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Questa è la disuguaglianza triangolare. Le altre proprietà della norma sono immediate. Si noti che la proprietà $\|x\| > 0$ per $x \neq 0$ vale perché $\langle x, x \rangle \neq 0$ per $x \neq 0$. ■

Naturalmente scriveremo

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (1.4)$$

E' conseguenza della disuguaglianza di Schwarz e della definizione di norma l'asserto seguente:

Corollario 3 *Per ogni $y \in X$ fissato, il funzionale lineare*

$$x \rightarrow \langle x, y \rangle$$

è continuo sullo s.l.n. X , dotato della norma (1.4)

Dim. Infatti, dalla disuguaglianza di Schwarz,

$$|\langle x, y \rangle| \leq M\|x\|, \quad \text{con } M = \|y\|. \quad \blacksquare$$

Le norme che discendono da un prodotto interno godono di una proprietà bene particolare:

Teorema 4 *Sia $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Questa particolare norma verifica l'uguaglianza*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (1.5)$$

Dim. Si calcola immediatamente

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right). \blacksquare \end{aligned}$$

L'uguaglianza (1.5) si chiama *identità del parallelogramma*. Nella geometria piana essa si enuncia dicendo che la somma dei quadrati costruiti sulle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati.

E' importante sapere che non tutte le norme discendono da un prodotto interno. Infatti vale:

Esempio 5 Si doti \mathbb{R}^2 della norma

$$\|(\xi, \eta)\| = \max\{|\xi|, |\eta|\}.$$

Si provi che l'identità del parallelogramma non vale per la coppia dei vettori $x = (1, 0)$ ed $y = (0, 1)$. \blacksquare

Quest'osservazione suggerisce di dare un nome particolare agli s.l.n-ti la cui norma proviene da un prodotto interno. Questi si chiamano *spazi prehilbertiani* e, se sono anche **completi**, si chiamano *spazi di Hilbert*.

Lavoreremo ora esclusivamente con spazi di Hilbert, che indicheremo genericamente col simbolo H .

E' chiaro che ogni spazio di Hilbert è anche uno speciale spazio di Banach. Vedremo che le sue proprietà sono particolarmente importanti per le applicazioni. Per esempio, possiamo notare subito che in spazi prehilbertiani vale il *teorema di Pitagora*:

Teorema 6 *Siano h, k due elementi tra loro ortogonali di uno spazio di prehilbertiano H . Vale:*

$$\|h + k\|^2 = \|h\|^2 + \|k\|^2.$$

Dim. Si calcola immediatamente

$$\|h + k\|^2 = \langle h + k, h + k \rangle = \|h\|^2 + \langle h, k \rangle + \langle k, h \rangle + \|k\|^2 = \|h\|^2 + \|k\|^2$$

perché $h \perp k$. \blacksquare

1.1.1 Esempi di prodotti interni e di spazi di Hilbert

Elenchiamo gli spazi di Hilbert di uso più comune. Naturalmente essi si sono già incontrati come particolari spazi di Banach.

Lo spazio euclideo ad n dimensioni

è uno spazio di Hilbert, con prodotto interno

$$\langle h, k \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{k}_i h_i \quad \text{se } h = \text{col}[h_i], \quad k = \text{col}[k_i].$$

Lo spazio l^2

è uno spazio di Hilbert, dotato del prodotto interno

$$\langle (h_i), (k_i) \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \bar{k}_i h_i.$$

La convergenza della serie, quando h_i e k_i sono in l^2 , è stata provata nel paragrafo ???. Possiamo ora notare che la convergenza segue applicando la disuguaglianza di Schwarz alle somme finite, e passando al limite.

Si ricordi che il duale di l^2 è isometrico a l^2 stesso.

lo spazio $L^2(K)$

è uno spazio di Hilbert, il cui prodotto interno è

$$\langle f, g \rangle = \int_K \bar{f}(x)g(x) dx.$$

L'integrale dipende dagli elementi di $L^2(K)$, ossia dalle classi di equivalenza, e non dai rappresentanti delle classi stesse, e converge grazie alla disuguaglianza di Schwarz per gli integrali.

Si ricordi, dal paragrafo ??, che anche in questo caso lo spazio è una realizzazione del suo duale.

Lo spazio H^2

è uno spazio di Hilbert. Il prodotto interno nel caso di $H^2(D)$ è

$$\langle f, g \rangle = \sup_{r \in (0,1)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(re^{it})g(re^{it}) dt \right].$$

Nel caso di $H^2(\Pi)$ il prodotto interno è

$$\langle f, g \rangle = \sup_{x>0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x+iy)g(x+iy) dy \right].$$

Lo spazio $W^{12}(K)$

è uno spazio di Hilbert dotato del prodotto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_K \bar{g}(x) f(x) dx + \int_K \nabla \bar{f}(x) \cdot \nabla g(x) dx.$$

Nel caso in cui $K = [a, b]$, un prodotto interno che conduce ad una norma equivalente è

$$\langle f, g \rangle = \bar{g}(a) f(a) + \int_a^b \bar{g}'(x) f'(x) dx.$$

Uno spazio di Hilbert non separabile

Tutti gli esempi precedenti sono esempi di spazi di Hilbert separabili. Mostriamo un esempio di spazio di Hilbert non separabile. Osserviamo che se $\|x\| = \|y\| = 1$ e se $x \perp y$, allora

$$\|x - y\|^2 = 2,$$

ossia x dista $\sqrt{2}$ da y . Dunque, se in uno spazio di Hilbert si trova una famiglia non numerabile di vettori a due a due ortogonali, questo spazio non è separabile.

Consideriamo le funzioni

$$t \rightarrow e^{ist}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dove s è un parametro reale.

Consideriamo lo spazio lineare generato da queste funzioni e su esso il prodotto interno

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \bar{g}(t) f(t) dt.$$

Lo spazio che si ottiene è uno spazio prehilbertiano. Il suo completamento, introdotto nel teorema ??, è quindi uno spazio di Hilbert che non è separabile perchè se $f(t) = e^{ist}$, $g(t) = e^{irt}$, $s \neq r$, allora

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(s-r)t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{e^{i(s-r)T} - e^{-i(s-r)T}}{2T(s-r)} = 0.$$

Dunque in questo spazio c'è un sistema non numerabile di vettori due a due ortogonali. Come si è detto, ciò basta a mostrare che lo spazio non è separabile.

1.2 Teorema delle proiezioni

Gli spazi di Hilbert, come si è notato, sono particolari spazi di Banach, dotati di proprietà speciali, utili per le applicazioni. Essenzialmente esse discendono tutte dal *teorema delle* proiezioni, che è in realtà un complesso di affermazioni che

è bene studiare separatamente. In particolare è bene essere precisi, distinguendo le affermazioni che valgono in spazi prehilbertiani da quelle che richiedono la completezza.

Sia H uno spazio prehilbertiano e sia X un suo s.spazio. Sia $h \in H$. Un punto $x_0 \in X$ si chiama *proiezione ortogonale* di h su X se

$$h - x_0 \perp x \quad \forall x \in X.$$

Per indicare che $h - x_0$ è perpendicolare ad ogni elemento di X , scriveremo anche

$$h - x_0 \perp X.$$

Si noti che se $h \in X$ allora h è proiezione di se stesso su X , $h = x_0$.

In un generico spazio di Banach, una definizione analoga non può darsi perché l'ortogonalità non è definita. Anche in spazi di Hilbert però non è affatto ovvio che, dato h , la sua proiezione x_0 su X debba esistere. Se però essa esiste allora si può scrivere

$$h = (h - x_0) + x_0$$

e $h - x_0$, essendo perpendicolare ad X , è in particolare perpendicolare a $x_0 \in X$. Dunque, usando il *teorema di Pitagora*, si ha

Teorema 7 *Sia $h \in H$, H uno spazio prehilbertiano, ed esista la proiezione x_0 di h su X . Vale:*

$$\|h\|^2 = \|h - x_0\|^2 + \|x_0\|^2.$$

In particolare,

$$\|x_0\| \leq \|h\|, \quad \|h - x_0\| \leq \|h\|.$$

Abbiamo detto che l'esistenza della proiezione non è ovvia. Possiamo però immediatamente provare che, se la proiezione esiste, essa è unica:

Teorema 8 *Sia h un elemento dello spazio prehilbertiano H . Sia X un s.spazio di H . Se esiste, la proiezione di h su X è unica.*

Dim. Siano infatti x_0 ed x_1 due proiezioni di h su X . In tal caso,

$$\langle h - x_0, x \rangle = 0, \quad \langle h - x_1, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X.$$

Usando la linearità della prima componente del prodotto interno si trova

$$\langle x_1 - x_0, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X.$$

Ora, X è uno spazio lineare a cui appartengono sia x_0 che x_1 e quindi anche $x_1 - x_0 \in X$. Scegliendo $x = x_1 - x_0$ si trova

$$0 = \langle x_1 - x_0, x_1 - x_0 \rangle = \|x_1 - x_0\|^2$$

e quindi $x_1 = x_0$. ■

Il problema della proiezione è uno dei problemi che si studiano nella geometria euclidea e si sa che, in tale contesto, la proiezione x_0 di h è anche il punto di X che ha minima distanza da h . Questa proprietà vale anche in spazi prehilbertiani:

Teorema 9 *Sia H uno spazio prehilbertiano e sia X un suo sottospazio. Un punto $x_0 \in X$ è proiezione su X di $h \in H$ se e solo se*

$$\|h - x_0\| \leq \|h - x\| \quad \forall x \in X.$$

Dim. Sia x_0 la proiezione di h su X e sia $x \in X$ qualsiasi. Si scriva

$$h - x = (h - x_0) + (x_0 - x).$$

Essendo $(h - x_0) \perp (x - x_0)$, dal *teorema di Pitagora* segue

$$\|h - x\|^2 = \|h - x_0\|^2 + \|x - x_0\|^2 \geq \|h - x_0\|^2.$$

Ciò prova che x_0 è punto di minima distanza.

Viceversa, sia

$$\|h - x_0\| \leq \|h - x\| \quad \forall x \in X.$$

Mostriamo che x_0 è proiezione di h su X , procedendo per assurdo: supponiamo che ciò non valga. Esiste quindi $\xi \in X$ tale che $h - x_0$ non è ortogonale a ξ , ossia tale che

$$\delta = \langle h - x_0, \xi \rangle \neq 0.$$

Non è restrittivo assumere

$$\|\xi\| = 1.$$

Indichiamo con x_1 il punto

$$x_1 = x_0 - \delta\xi \in X$$

e calcoliamo $\|h - x_1\|$. Mostriamo che, se $\delta \neq 0$, allora si ha

$$\|h - x_1\| < \|h - x_0\|. \tag{1.6}$$

Ciò contrasta con la proprietà di x_0 e mostra quindi che $h - x_0 \perp \xi$. La (1.6) segue da:

$$\begin{aligned} \|h - x_1\|^2 &= \|h - x_0 + \delta\xi\|^2 = \langle h - x_0 + \delta\xi, h - x_0 + \delta\xi \rangle \\ &= \|h - x_0\|^2 - \bar{\delta}\langle h - x_0, \xi \rangle - \delta\langle \xi, h - x_0 \rangle + |\delta|^2\|\xi\|^2 \\ &= \|h - x_0\|^2 - \bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta} + |\delta|^2 = \|h - x_0\|^2 - |\delta|^2 < \|h - x_0\|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 10 Si osservi che la proprietà di minima distanza può anche introdursi in un generico spazio di Banach. Però in generale il punto di X che meno dista da h , se H non è uno spazio di Hilbert, né esiste né è unico.

Rinunciamo a presentare un esempio che mostra la non esistenza e mostriamo la non unicità. Sia per questo H lo spazio \mathbb{R}^2 , ma dotato della norma

$$\|x\| = \|(\xi, \eta)\| = \max\{|\xi|, |\eta|\}.$$

Sia $X = \{(\xi, 0) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ l'asse delle ascisse e sia $h = (0, 1)$. Si vede facilmente che

$$\|h - x\| = 1 \quad \forall x = (\xi, 0), \quad \xi \in [-1, 1].$$

Se invece $x = (\xi, 0)$ con $|\xi| > 1$ allora

$$\|h - x\| = |\xi| > 1.$$

Dunque, il punto dell'asse delle ascisse che ha minima distanza da h non è unico e i punti di minima distanza sono quelli del segmento $[-1, 1]$. ■

Esaminiamo ora il problema di minimo

$$\min\{\|h - x\| \mid x \in X\}.$$

In generale, un problema di minimo non ha soluzione, ma si possono sempre costruire "successioni minimizzanti". Nel caso nostro, sia

$$d = \inf\{\|h - x\| \mid x \in X\}$$

e, per ogni n , sia x_n tale che

$$d \leq \|h - x_n\| < d + 1/n. \quad (1.7)$$

Proviamo:

Teorema 11 *Sia H uno spazio prehilbertiano. La successione (x_n) è fondamentale.*

Dim. Fissati n ed m , si deve valutare $\|x_n - x_m\|$. Per semplicità valutiamone il quadrato. Usiamo l'identità del parallelogramma per scrivere

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= \|(x_n - h) + (h - x_m)\|^2 \\ &= 2 \left[\|x_n - h\|^2 + \|h - x_m\|^2 \right] - \|(x_n - h) - (h - x_m)\|^2 \\ &= 2 \left[\|x_n - h\|^2 + \|h - x_m\|^2 \right] - 4 \left\| \frac{x_n + x_m}{2} - h \right\|^2. \end{aligned}$$

E'

$$\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in X$$

e quindi

$$\left\| \frac{x_n + x_m}{2} - h \right\|^2 > d^2.$$

Dalla definizione di (x_n) , assegnato $\epsilon > 0$, segue l'esistenza di N_ϵ tale che, se n, m sono maggiori di N_ϵ , si ha

$$\|x_n - h\|^2 < d^2 + \epsilon/4, \quad \|x_m - h\|^2 < d^2 + \epsilon/4.$$

Dunque, per n, m maggiori di N_ϵ vale anche

$$\|x_n - x_m\|^2 < 2 \left[2d^2 + \frac{\epsilon}{2} \right] - 4 \left\| \frac{x_n + x_m}{2} - h \right\|^2 \leq 4d^2 + \epsilon - 4d^2 = \epsilon.$$

La successione (x_n) è quindi fondamentale. ■

Di conseguenza:

Teorema 12 *Sia H uno spazio di Hilbert e sia X un suo s.spazio chiuso. Per ogni $h \in H$ esiste x_0 , proiezione di h su X .*

Dim. Si costruisce la successione (x_n) , definita da (1.7). Si sa che questa è una successione fondamentale in H , e quindi convergente, perché H è completo.

Sia

$$x_0 = \lim x_n.$$

Per ogni n , si ha $x_n \in X$ e quindi $x_0 \in X$ perché X è chiuso.

Da (1.7) si ha

$$d = \lim \|h - x_n\|.$$

D'altra parte la continuità della norma mostra che

$$\|h - x_0\| = \lim \|h - x_n\|$$

e quindi x_0 è punto di minima distanza; e quindi è la proiezione di h su X . ■

1.3 Complementi ortogonali e proiezioni ortogonali

Sia A un qualsiasi sottoinsieme di uno spazio di Hilbert H . Definiamo

$$A^\perp = \{h \mid h \perp A\} = \{h \mid \langle h, a \rangle = 0 \forall a \in A\}.$$

Ovviamente:

Lemma 13 *Per ogni insieme A vale*

$$A \cap A^\perp = \{0\}.$$

Dim. Se infatti $a \in A \cap A^\perp$ allora $\langle a, a \rangle = 0$ e quindi $a = 0$. ■

Vale:

Teorema 14 *L'insieme A^\perp è un s.spazio chiuso di H . Se A è denso in H allora $A^\perp = \{0\}$.*

Se $A^\perp = \{0\}$ e se A è un s.spazio, allora A è denso in H .

Dim. Siano x, y elementi di A^\perp e siano α e β scalari. Per ogni $a \in A$ vale

$$\langle \alpha x + \beta y, a \rangle = \alpha \langle x, a \rangle + \beta \langle y, a \rangle = 0.$$

Ciò prova che A^\perp è un s.spazio (anche se A non lo è.)

Per provare che A^\perp è chiuso, sia (x_n) una successione di elementi di A^\perp e supponiamo che essa converga ad x_0 . Dobbiamo provare che $x_0 \in A^\perp$. La continuità del prodotto interno mostra che, per ogni $a \in A$,

$$\langle x_0, a \rangle = \lim \langle x_n, a \rangle = 0.$$

Dunque, $x_0 \in A^\perp$, come volevamo.

Sia ora A denso in H e sia $x \in A^\perp$. Mostriamo che

$$\langle x, h \rangle = 0 \tag{1.8}$$

per ogni $h \in H$. Da ciò, scegliendo in particolare $h = x$, seguirà $x = 0$. Proviamo quindi che vale (1.8). Se accade che $h \in A$, allora vale (1.8). Se $h \notin A$, essendo A denso, esiste una successione (a_n) in A , convergente ad h . Dunque, ancora per la continuità del prodotto interno,

$$\langle x, h \rangle = \lim \langle x, a_n \rangle = 0.$$

Ricapitolando, abbiamo provato che se A è denso in H allora $A^\perp = \{0\}$.

Viceversa sia $A^\perp = \{0\}$ e sia inoltre A un s.spazio (anche non chiuso). Mostriamo che A è denso in H . Procedendo per assurdo, se il s.spazio A non è denso in H , la sua chiusura X è un s.spazio chiuso che non contiene un elemento $h \in H$. Sia x_0

la proiezione di h su X . Il vettore $h - x_0$ è non nullo, ed ortogonale ad X e quindi anche ad A . ■

Consideriamo ora un s.spazio chiuso X di H , ed il suo ortogonale X^\perp . Associamo ad ogni $h \in H$ la sua proiezione su X , che indichiamo col simbolo Ph . Dunque P indica un operatore da H in sé. Studieremo più avanti le proprietà dell'operatore P . Per ora scriviamo x nella forma

$$x = (Px) + (x - Px) = x + y \quad \text{così che} \quad y = x - Px \perp X. \quad (1.9)$$

Vale:

Teorema 15 *Se X è un s.spazio chiuso di H , si ha:*

$$H = X \oplus X^\perp.$$

Dim. Abbiamo già notato che $X \cap X^\perp = \{0\}$. La (1.9) mostra che ogni elemento di H è somma di un elemento di X e di uno di X^\perp . ■

Osservazione 16 Grazie a quest'osservazione, la dimostrazione del teorema di Hahn-Banach in spazi di Hilbert si fa in modo elementare. Se L_0 è un funzionale lineare e continuo sul s.spazio chiuso X_0 di H , esso si estende ad H definendolo nullo su X^\perp e ponendo quindi

$$L(Px + (x - Px)) = L_0x.$$

Ovviamente, $\|L\| = \|L_0\|$. ■

Infine, esaminiamo le proprietà di $[A^\perp]^\perp$. E' chiaro che

$$A \subseteq [A^\perp]^\perp$$

e generalmente l'inclusione è propria perché $[A^\perp]^\perp$ è un s.spazio chiuso, mentre A generalmente non lo è. Però:

Teorema 17 *Se X è un s.spazio chiuso allora*

$$X = [X^\perp]^\perp.$$

Dim. Per assurdo, l'inclusione sia propria, esista cioè $\xi \in [X^\perp]^\perp$, che non appartiene ad X . Sia ξ_0 la proiezione ortogonale di ξ su X . In tal caso $\xi - \xi_0 \perp X$, ossia $\xi - \xi_0 \in X^\perp$ ed anche $\xi - \xi_0 \in [X^\perp]^\perp$, dato che sia ξ che ξ_0 sono in $[X^\perp]^\perp$. E quindi $\xi - \xi_0$ appartiene sia ad X^\perp che al suo ortogonale. E' dunque nullo, ossia $\xi = \xi_0 \in X$. ■

Studiamo ora le proprietà dell'operatore P , proiezione ortogonale di H sul suo s.spazio chiuso X . L'operatore P è ovviamente una proiezione, ed è naturalmente

associato alla proiezione su X^\perp , che è data da $Q = I - P$, ove I è l'operatore identità. Dal teorema di Pitagora, per ogni $h \in H$ vale

$$\|h\|^2 = \|Ph + (I - P)h\|^2 = \|Ph\|^2 + \|(I - P)h\|^2.$$

Dunque,

$$\|P\| \leq 1, \quad \|(I - P)\| \leq 1. \tag{1.10}$$

L'operatore P ha un'ulteriore proprietà interessante. Vale

$$\langle Ph, k \rangle = \langle h, Pk \rangle \quad h, k \in H. \tag{1.11}$$

Infatti,

$$\langle Ph, k \rangle = \langle Ph, Pk + (I - P)k \rangle = \langle Ph, Pk \rangle$$

perché $P(I - P) = 0$. Per questa stessa ragione,

$$\langle h, Pk \rangle = \langle Ph + (I - P)h, Pk \rangle = \langle Ph, Pk \rangle$$

e quindi vale (1.11). ■

Seguendo la terminologia nota dalla dimensione finita, un operatore lineare continuo per cui vale la (1.11) si dice simmetrico. Dunque, ogni proiezione ortogonale è un operatore simmetrico. Si vede facilmente che vale anche il viceversa:

Teorema 18 *Sia $P \in \mathcal{L}(H)$ una proiezione. L'operatore P è la proiezione ortogonale sul s.spazio $X = PH$ se e solo se è simmetrico.*

Dim. Basta mostrare che se $P \in \mathcal{L}(H)$ è un operatore di proiezione che è anche simmetrico allora P è proiezione ortogonale. Sia per questo $X = \text{im } P$. Mostriamo prima di tutto che X è un s.spazio chiuso. Sia per questo (x_n) una successione in X , convergente ad un $h \in H$. Dobbiamo provare che $h \in X$.

Essendo $x_n \in X$, si ha

$$x_n = Px_n.$$

Passando al limite, grazie alla continuità di P , si trova

$$h = \lim x_n = \lim Px_n = Ph \in \text{im } P = X.$$

Ciò prova che X è chiuso.

Sia ora $h \in H$. Mostriamo che

$$h - Ph \perp X,$$

così che Ph è effettivamente la proiezione ortogonale di h su X . Sia per questo x un generico element di X , ossia un generico elemento Pk dell'immagine di P . Si ha

$$\langle h - Ph, x \rangle = \langle h - Ph, Pk \rangle = \langle P(h - Ph), k \rangle = \langle Ph - Ph, k \rangle = 0$$

(si noti che in questo calcolo si è usato il fatto che P è sia una proiezione che un operatore simmetrico.)

Ciò è quanto volevamo provare. ■

1.3.1 Sistemi ortonormali e calcolo di proiezioni

Un insieme S di vettori di uno spazio di Hilbert si chiama ortogonale se

$$x, y \in S, \quad x \neq y \implies x \perp y.$$

Se ogni elemento di S ha norma 1, l'insieme S si chiama ortonormale.

Ovviamente, un sistema ortogonale che non contiene 0 è linearmente indipendente, e quindi un sistema ortonormale è linearmente indipendente.

Esponiamo un metodo, detto *metodo di Gram-Schmidt* Gram-Schmidt che permette di costruire sistemi ortonormali a partire da un qualsiasi insieme numerabile $X \subseteq H$. Supponiamo per semplicità che $X = \{x_n\}$ sia linearmente indipendente. In tal caso, in particolare, ciascun suo elemento è non nullo.

Associamo a x_1 l'elemento

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

Ad x_2 associamo

$$e_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} \quad \text{ove} \quad z_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1.$$

Scelti e_1, \dots, e_{n-1} definiamo

$$e_n = \frac{z_n}{\|z_n\|} \quad \text{ove} \quad z_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k.$$

E' immediato vedere che gli e_i sono due a due ortogonali ed ovviamente di norma 1. Inoltre,

Teorema 19 *Per ogni n vale*

$$\text{span} \{e_1, \dots, e_n\} = \text{span} \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Osservazione 20 Abbiamo visto che la sfera di uno spazio di Banach di dimensione infinita non è compatta. Ovviamente ciò vale in particolare per gli spazi di Hilbert. Però nel caso degli spazi di Hilbert si può dare una dimostrazione elementare: col metodo precedente si costruisce un sistema numerabile ed ortonormale $\{e_n\}$. Si nota quindi che la successione (e_n) non ha s.successioni convergenti. Infatti, per $n \neq m$ si ha

$$\|e_n - e_m\|^2 = 2. \quad \blacksquare$$

Mostriamo ora come i sistemi ortonormali numerabili si possano usare per il calcolo di proiezioni. Consideriamo prima di tutto il caso in cui X sia un s.spazio di H , di dimensione finita k .

Sia

$$e_1, \dots, e_k$$

una base ortonormale di X .

In tal caso la proiezione x_0 di h su X è data da

$$x_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$$

perché ogni elemento di X ha questa forma.

I numeri α_i si calcolano facilmente:

$$\langle h, e_r \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i, e_r \right\rangle = \alpha_r,$$

con un calcolo del tutto analogo a quello noto in dimensione finita. Dunque,

$$x_0 = \sum_{i=1}^k \langle h, e_i \rangle e_i.$$

E' utile calcolare ora

$$\|x_0\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^k \alpha_i \bar{\alpha}_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2$$

perché i vettori e_i sono due a due ortogonali e di norma 1.

Ricordando l'espressione di α_i e la (1.10) si trova

$$\sum_{i=1}^n |\langle h, e_i \rangle|^2 = \|x_0\|^2 \leq \|h\|^2. \quad (1.12)$$

Sia ora $S = \{e_i\}$ un sistema ortonormale numerabile. Il s.spazio di H

$$\text{span } S = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

non è chiuso. Indichiamo con X la sua chiusura. Vogliamo rappresentare x_0 , la proiezione su X di un generico elemento $h \in H$.

Notiamo prima di tutto:

Lemma 21 *Vale*

$$\left\| \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i|^2$$

Dim. La somma di una serie è il limite della successione delle somme parziali,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i e_i = \lim_n \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

e, per la continuità della norma,

$$\left\| \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i e_i \right\|^2 = \left\| \lim_n \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|^2 = \lim_n \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|^2.$$

L'asserto segue dall'uguaglianza

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2. \blacksquare$$

Inoltre

Teorema 22 (di Riesz–Fischer) Sia $\mathcal{S} = \{e_i\}$ un sistema ortonormale numerabile. La serie

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

converge in H se e solo se la successione (α_n) è in l^2 .

Dim. Dal Lemma 21, se la serie converge in H si ha

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i e_i \right\|^2 < +\infty.$$

Il viceversa segue notando che se $(\alpha_n) \in l^2$ allora la successione delle somme parziali è fondamentale. Infatti,

$$\left\| \sum_{i=n}^m \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=n}^m |\alpha_i|^2$$

e, per ipotesi, la successione (α_n) è in l^2 . \blacksquare

Indichiamo ora con X_n lo spazio lineare (di dimensione finita) generato dai vettori e_1, \dots, e_n . Come si è visto, la proiezione x_n di h su X_n è

$$x_n = \sum_{i=1}^n \langle h, e_i \rangle e_i$$

e, dalla (1.12), per ogni n vale

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle h, e_i \rangle|^2 \leq \|h\|^2.$$

Dunque la successione (α_i) è in l^2 e quindi

$$x_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle h, e_i \rangle e_i \tag{1.13}$$

converge in H . E' facile immaginare che valga:

Teorema 23 Il vettore x_0 definito in (1.13) è la proiezione di h su X .

Dim. Per mostrare ciò si prova che $h - x_0$ è ortogonale ad ogni elemento di X . Ricordiamo che per definizione ogni $x \in X$ è limite di una successione (s_n) in $\text{span } \mathcal{S}$ e, per la continuità del prodotto interno,

$$\langle x, h - x_0 \rangle = \langle \lim s_n, h - x_0 \rangle = \lim \langle s_n, h - x_0 \rangle.$$

Dunque basta provare che $h - x_0$ è ortogonale a $\text{span } \mathcal{S}$ e per questo basta provare che è ortogonale ad ogni elemento e_k . Ciò si vede immediatamente perchè¹

$$\begin{aligned} \langle h - x_0, e_k \rangle &= \langle h, e_k \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{+\infty} \langle h, e_i \rangle e_i, e_k \right\rangle \\ &= \langle h, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{+\infty} \langle \langle h, e_i \rangle e_i, e_k \rangle = \langle h, e_k \rangle - \langle h, e_k \rangle = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Abbiamo così identificato la proiezione x_0 di h su X ,

$$x_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle h, e_i \rangle e_i.$$

Dalla (1.12), vale

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle h, e_i \rangle|^2 \leq \|h\|^2.$$

Questa disuguaglianza si chiama *disuguaglianza di Bessel*.

1.3.2 Serie di Fourier astratte

Le considerazioni svolte al paragrafo precedente si possono interpretare come segue: in uno spazio di Hilbert H è dato un s.spazio X separabile, generato da un sistema ortonormale $\mathcal{S} = \{e_i\}$ (niente vieta che sia $X = H$. In tal caso \mathcal{S} si chiama un *sistema ortonormale massimale* o *completo*.) Si vuole sviluppare un elemento h di H in serie degli e_i . Questi problemi sono stati studiati prima di tutto nel caso concreto in cui $H = L^2(-\pi, \pi)$ e $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right\}$ e quindi si parla in generale di *serie di Fourier astratte* per riferirsi allo sviluppo di h in serie degli e_i .

E' possibile provare, usando il lemma di Zorn, che ogni spazio di Hilbert ha un sistema ortonormale massimale, e che questo è numerabile se e solo se H è separabile. E' utile conoscere alcuni test utili per verificare se un sistema ortonormale numerabile in uno spazio di Hilbert è massimale o meno. Vale:

¹si noti l'uso della linearità e continuità della prima componente del prodotto interno, per scambiare i segni di serie e di prodotto interno.

Teorema 24 Sia $\mathcal{S} = \{e_i\}$ un sistema ortonormale finito o numerabile in uno spazio di Hilbert H . Si equivalgono le affermazioni seguenti:

- i) il sistema \mathcal{S} è massimale;
- ii) ogni $h \in H$ si sviluppa in serie degli e_i ,

$$h = \sum \alpha_i e_i;$$

- iii) per ogni $h \in H$ vale l'uguaglianza

$$\|h\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\langle h, e_i \rangle|^2; \quad (1.14)$$

- iv) se $\langle h, e_i \rangle = 0$ per ogni i allora $h = 0$.

Dim. Si è già visto che **i)** implica **ii)** e quindi **iii)** vale per il lemma 21. In particolare, se $\langle h, e_i \rangle = 0$ per ogni i allora $h = 0$, ossia vale **iv)**. La dimostrazione si completa provando che se vale **iv)** allora \mathcal{S} è massimale.

La condizione **iv)** significa

$$[\text{span } \mathcal{S}]^\perp = \{0\}$$

Si sa, dal teorema 14 che in tal caso $\text{span } \mathcal{S}$ è denso in H . Dunque, \mathcal{S} è massimale. ■

L'uguaglianza (1.14) si chiama *identità di Parseval*.

1.4 Il duale di uno spazio di Hilbert

Abbiamo già notato che, per ogni k fissato, il funzionale lineare

$$h \rightarrow \langle h, k \rangle$$

è continuo grazie alla *disuguaglianza di Schwarz*

$$|\langle h, k \rangle| \leq M \|h\| \quad \text{con} \quad M = \|k\|.$$

Dunque la norma di questo funzionale non supera $\|k\|$ e in realtà è uguale a $\|k\|$, come si vede scegliendo

$$h = \frac{k}{\|k\|}.$$

Così come in dimensione finita, si mostra che questi funzionali esauriscono tutto il duale di H , ossia che H è un modello per il suo duale. Più precisamente vale:

Teorema 25 (teorema di Riesz) *Sia ϕ un funzionale lineare e continuo su H . Esiste un unico $x_\phi \in H$ tale che*

$$\phi(h) = \langle h, x_\phi \rangle \quad \forall h \in H. \quad (1.15)$$

La corrispondenza che a ϕ fa corrispondere x_ϕ è antilineare e inoltre

$$\|\phi\|_{H^*} = \|x_\phi\|_H.$$

Dim. Si è appena detto che la trasformazione $h \rightarrow \langle h, y \rangle$ è lineare e continua su H , per ogni fissato $y \in H$. Ossia, almeno alcuni elementi del duale di H possono rappresentarsi come

$$\phi(h) = \langle h, y \rangle.$$

Mostriamo che questa rappresentazione, se esiste, è unica. Infatti sia

$$\phi(h) = \langle h, y \rangle = \langle h, x \rangle \quad \forall h \in H.$$

Sottraendo, si trova $\langle h, x - y \rangle = 0$ per ogni $h \in H$ e quindi $x - y \perp H$, ossia $x - y = 0$.

Proviamo ora che ogni elemento ϕ di H^* si rappresenta come in (1.15).

Se $\phi = 0$ allora $x_\phi = 0$. Se $\phi \neq 0$,

$$\ker \phi \neq H$$

e la continuità di ϕ mostra che $\ker \phi$ è un s.spazio chiuso di H , diverso da H stesso. Dunque esiste $z \neq 0$, $z \perp \ker \phi$. Non è restrittivo assumere

$$\|z\| = 1.$$

Si sa che $\ker \phi$ ha complementare di dimensione 1, si veda il teorema ???. Quindi

$$H = (\ker \phi) \oplus \text{span} \{z\}.$$

Si rappresenti ogni $h \in H$ nella forma

$$h = \left(h - \frac{\phi(h)}{\phi(z)} z \right) + \frac{\phi(h)}{\phi(z)} z.$$

Essendo

$$\left(h - \frac{\phi(h)}{\phi(z)} z \right) \in \ker \phi, \quad z \in [\ker \phi]^\perp$$

si ha

$$\langle h, [\overline{\phi(z)}z] \rangle = \left\langle \frac{\phi(h)}{\phi(z)} z, \overline{\phi(z)}z \right\rangle = \phi(h).$$

Dunque,

$$x_\phi = \overline{\phi(z)}z.$$

Ciò prova che ogni $\phi \in H^*$ si rappresenta come in (1.15)

E' immediato verificare che la trasformazione $\phi \rightarrow x_\phi$, definita su H^* , è antilineare. Inoltre, si è notato che la norma della trasformazione $h \rightarrow \langle h, x_\phi \rangle$ è uguale a $\|x_\phi\|$. ■

Osservazione 26 E' importante notare che nella dimostrazione precedente il funzionale continuo ϕ potrebbe anche avere soltanto dominio denso in X . Anche in tal caso l'elemento x_ϕ può costruirsi, e il funzionale $h \rightarrow \langle h, x_\phi \rangle$ è l'estensione per continuità di ϕ ad H . Useremo quest'osservazione al teorema 30.

Notiamo inoltre che con le notazioni del paragrafo ??, la (1.15) si scrive

$$\phi(h) = \langle \phi, h \rangle = \langle h, x_\phi \rangle. \quad \blacksquare$$

I risultati precedenti provano in particolare che ogni spazio di Hilbert è uno spazio di Banach riflessivo. A questo proposito, concludiamo con un'osservazione relativa alla convergenza debole:

Teorema 27 *Sia*

$$w\text{-}\lim h_n = h_0 \quad \text{ed anche} \quad \lim \|h_n\| = \|h_0\|.$$

In tal caso la successione (h_n) converge ad h_0 in norma.

Dim. Si valuti

$$\|h_n - h_0\|^2 = \langle h_n - h_0, h_n - h_0 \rangle = -\langle h_n - h_0, h_0 \rangle + \langle h_n, h_n \rangle - \langle h_0, h_n \rangle.$$

Il primo addendo tende a zero perché $w\text{-}\lim h_n = h_0$ e per la stessa ragione $\lim \langle h_0, h_n \rangle = \|h_0\|^2$; il secondo addendo tende a $\|h_0\|^2$ perché $\lim \|h_n\|^2 = \|h_0\|^2$. Dunque, $\lim \|h_n - h_0\|^2 = 0$. ■

1.5 L'operatore aggiunto di un operatore tra spazi di Hilbert

Siano ora H e K due spazi di Hilbert e sia A un operatore lineare da H in K anche NON continuo, ma con dominio denso in H . Associamogli un operatore lineare da K in H che chiameremo *operatore aggiunto*. L'operatore aggiunto di A si indica col simbolo A^* .

Dobbiamo definire prima di tutto il dominio di A^* . Per definizione,

$$\text{dom } A^* = \{k \in K \mid \exists z \in H \text{ per cui } \langle Ah, k \rangle_K = \langle h, z \rangle_H\}.$$

Vale:

Teorema 28 *L'elemento z , se esiste, è unico.*

Dim. Ne esistano due, z e ζ . Per ogni $h \in \text{dom } A$ vale

$$\langle Ah, k \rangle_K = \langle h, z \rangle_H = \langle h, \zeta \rangle_H$$

e quindi

$$\langle h, z - \zeta \rangle_H = 0.$$

Quest'uguaglianza vale per ogni $h \in \text{dom } A$, che è *denso* in H . ciò implica che $\zeta = z$. ■

E' quindi lecito definire

$$A^*k = z.$$

E' immediato verificare che l'operatore A^* , da K in H , è lineare.

E' facile vedere che $\text{dom } A^*$ può essere "molto piccolo":

Esempio 29 Sia $H = L^2(0, 1)$ e sia

$$\text{dom } A = \{x \in L^2(0, 1) \text{ con rappresentante continuo}\}.$$

Sia x il rappresentante continuo e

$$Ax = x(0).$$

Ossia, A è un funzionale. Se $k \in \mathbb{C}$ è nel dominio di A^* , esiste $z \in L^2(0, 1)$ per cui

$$\bar{k}h(0) = \int_0^1 \bar{z}(s)h(s) \, ds \quad \forall h \in L^2(0, 1).$$

Ciò può solo aversi se $k = 0$ (e allora anche $z = 0$); ossia, $\text{dom } A^* = \{0\}$. ■

E' chiaro che, se $\text{dom } A^*$ è "troppo piccolo" allora A^* conterrà "poche informazioni" e sarà di scarsa utilità. E' quindi importante individuare classi di operatori il cui aggiunto ha dominio denso. A questo proposito vale:

Teorema 30 *Se A è lineare e continuo da H in K , con dominio denso in H , allora il suo aggiunto ha dominio uguale a K .*

Dim. Infatti, il funzionale

$$h \rightarrow \langle Ah, k \rangle$$

è continuo per ogni k e quindi, per il *teorema di Riesz*, si rappresenta nella forma $\langle h, z \rangle$. ■

Prima di studiare casi più generali, conviene studiare più in dettaglio l'aggiunto di un operatore limitato.

1.5.1 L'aggiunto di un operatore limitato

Vale:

Lemma 31 *Sia A lineare e continuo da H in K , con dominio denso in H . Allora, $A^* \in \mathcal{L}(K, H)$ e $\|A^*\|_{\mathcal{L}(K, H)} \leq \|A\|$.*

Dim. Si è già notato che A^* è definito su K . Dalla disuguaglianza di Schwarz,

$$\|A^*k\| = \sup_{\|h\|=1} \langle h, A^*k \rangle = \sup_{\|h\|=1} \langle Ah, k \rangle \leq \sup_{\|h\|=1} \|Ah\| \cdot \|k\| = \|A\| \cdot \|k\|.$$

Dunque, A^* è un operatore limitato e

$$\|A^*\| \leq \|A\|. \quad \blacksquare$$

Possiamo quindi calcolare $A^{**} = (A^*)^*$. Dal lemma precedente, $\|A^{**}\| \leq \|A^*\|$. Proviamo ora:

Teorema 32 *Sia A lineare e continuo da H in K , con dominio denso in H . L'operatore A^{**} è l'estensione continua di A ad H e quindi, in particolare,*

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Dim. Si sa già che A^{**} è definito su H . Proviamo che estende A . Per questo consideriamo il funzionale

$$k \rightarrow \langle A^*k, h \rangle_H.$$

Per definizione, se $h \in \text{dom } A$, questo è uguale a

$$\langle k, Ah \rangle_H$$

e quindi $h \in \text{dom } A^{**}$, con $A^{**}h = Ah$, ossia A^{**} estende A .

Di conseguenza vale anche $\|A^*\| \leq \|A\| = \|A^{**}\| \leq \|A^*\|$ e quindi $\|A\| = \|A^*\|$. ■

Se in particolare $A \in \mathcal{L}(H, K)$ (e quindi con dominio H) vale

$$\langle Ah, k \rangle_K = \langle h, A^*k \rangle_H \quad \forall h \in H, k \in K.$$

E' inoltre facile verificare che valgono le seguenti regole di calcolo:

Teorema 33 Sia $A \in \mathcal{L}(H, K)$. Vale:

$$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*; \quad (A + B)^* = A^* + B^* .$$

Se A^{-1} esiste allora esiste anche $(A^*)^{-1}$ e vale

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} . \quad (1.16)$$

Se $B \in \mathcal{L}(K, Z)$ allora vale

$$(BA)^* = A^* B^* .$$

Una forma più generale della (1.16) sarà provata nel teorema 39. Le altre proprietà sono ovvie.

1.5.2 Operatori aggiunti ed operatori chiusi

Proviamo:

Teorema 34 Ogni operatore aggiunto è chiuso.

Dim. Sia A un operatore lineare da H in K , con dominio denso in H , e sia A^* il suo aggiunto. Dobbiamo provare che il grafico di A^* è chiuso. Sia per questo $((y_n, A^* y_n))$ una successione che appartiene al grafico di A^* e che è convergente,

$$\lim y_n = \eta, \quad \lim A^* y_n = \xi .$$

Dobbiamo provare che (η, ξ) appartiene al grafico di A^* , ossia che $\eta \in \text{dom } A^*$ e che inoltre $\xi = A^* \eta$.

Per ogni $x \in \text{dom } A$ vale

$$\langle Ax, y_n \rangle = \langle x, A^* y_n \rangle .$$

Passando al limite rispetto ad n si ha:

$$\langle Ax, \eta \rangle = \langle x, \xi \rangle \quad \forall x \in \text{dom } A .$$

Dunque, $\eta \in \text{dom } A^*$ e $A^* \eta = \xi$. Ciò volevamo provare. ■

Si noti: nel teorema precedente non si è supposto che A sia continuo oppure chiuso.

Osservazione 35 Si è notato che se A è continuo allora A^* ha dominio K . Abbiamo ora visto che A^* è chiuso e quindi è continuo per il teorema ???. E' questa una diversa dimostrazione di una parte del lemma 31.

Se anche A^* ha dominio denso in K allora si può definire A^{**} . Vale:

Teorema 36 L'operatore A^{**} estende A .

Dim. Sia $h \in \text{dom } A$, $k \in \text{dom } A^*$. Da

$$\langle Ah, k \rangle = \langle h, A^*k \rangle$$

si vede dunque che la funzione $k \rightarrow \langle h, A^*k \rangle$ è continua, così che $h \in \text{dom } A^{**}$ e inoltre $A^{**}h = Ah$. ■

Dunque, A^{**} è un'estensione *chiusa* di A e si potrebbe provare che è la *minima* estensione chiusa.

Osservazione 37 Si noti quindi che se A^* è continuo con dominio denso anche A è continuo; e ciò spiega perché nel caso dell'esempio 29 il dominio dell'aggiunto deve essere 0. Infatti, ogni operatore lineare su \mathbb{R} è continuo. Se A^* fosse definito su \mathbb{R} il suo aggiunto sarebbe esso stesso continuo; e quindi A sarebbe continuo. ■

Supponiamo ora che A sia esso stesso chiuso. In tal caso vale

Teorema 38 *Se A è chiuso con dominio denso anche A^* è chiuso con dominio denso; e quindi A^{**} può definirsi, ed è uguale ad A .*

La dimostrazione è posposta.

Abbiamo così identificato una classe di operatori, più generale di $\mathcal{L}(H, K)$, nella quale il calcolo dell'aggiunto ha buone proprietà.

Concludiamo infine con alcune regole di calcolo per gli operatori aggiunti. E' immediato verificare che

$$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*.$$

Valgono inoltre le regole

$$(A + B)^*k = A^*k + B^*k, \quad (AB)^*k = B^*A^*k,$$

ma soltanto per gli elementi k per cui le espressioni hanno senso, per esempio nel caso della prima regola per $k \in (\text{dom } A^*) \cap (\text{dom } B^*)$.

E' più precisa, e più importante, la regola per l'aggiunto dell'inverso:

Teorema 39 *Sia A lineare da H in K con dominio denso e supponiamo che A^{-1} sia continuo su K . Allora A^* ha inverso continuo su H e vale*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*. \quad (1.17)$$

1.5.3 Operatori da H in sé; operatori autoaggiunti

Nel caso particolare in cui $H = K$ il teorema 39 si riformula dicendo:

Corollario 40 $0 \in \rho(A)$ se e solo se $0 \in \rho(A^*)$.

1.5. L'OPERATORE AGGIUNTO DI UN OPERATORE TRA SPAZI DI HILBERT 27

Dim. Se $0 \in \rho(A)$ allora $0 \in \rho(A^*)$ per il Teorema 39. Se $0 \in \rho(A^*)$, ancora per il Teorema 39, $0 \in \rho(A^{**})$, ossia $(A^{**})^{-1}$ è continuo. Ma, si sa che A^{**} estende A e quindi $(A^{**})^{-1}$ estende A^{-1} , che pertanto è continuo. ■

Ciò suggerisce di studiare con maggiori dettagli le relazioni tra lo spettro di un operatore e quello del suo aggiunto. Dato che $\lambda \in \rho(A)$ equivale a $0 \in \rho(\lambda I - A)$ si vede che:

Teorema 41 Vale: $\lambda \in \rho(A)$ se e solo se $\bar{\lambda} \in \rho(A^*)$; $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se $\bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$.

Invece, le singole componenti dello spettro non si conservano. Si ha invece:

Teorema 42 Se $\lambda \in \sigma_p(A)$ allora $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$; se $\lambda \in \sigma_r(A)$ allora $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$; se $\lambda \in \sigma_c(A)$ allora $\bar{\lambda} \in \sigma_c(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$.

La dimostrazione della seconda proprietà è immediata: se $\lambda \in \sigma_r(A)$ allora esiste $h \perp \text{im}(\lambda I - A)$ e per esso

$$0 = \langle h, (\lambda I - A)x \rangle = \langle (\bar{\lambda} I - A^*)h, x \rangle \quad \forall x \in \text{dom } A.$$

E quindi $(\bar{\lambda} I - A^*)h = 0$.

Proviamo la prima. Se $\lambda \in \sigma_p(A)$ allora esiste x_0 per cui

$$0 = \langle (\lambda I - A)x_0, h \rangle = \langle x_0, (\bar{\lambda} I - A^*)h \rangle \quad \forall h \in \text{dom } A^*.$$

Ciò vuol dire che $\text{im}(\bar{\lambda} I - A^*)$ non è densa e quindi se $\bar{\lambda} \notin \sigma_p(A^*)$ allora $\bar{\lambda} \in \sigma_r(A^*)$.

Sia ora $0 \in \sigma_c(\lambda I - A)$. In questo caso $(\lambda I - A)^{-1}$ non è continuo e quindi $(\bar{\lambda} I - A^*)^{-1}$ non è continuo, si veda il Teorema 41. Se $(\bar{\lambda} I - A^*)^{-1}$ non ha dominio denso in H allora $\bar{\lambda} \in \sigma_r(A^*)$, altrimenti $\bar{\lambda} \in \sigma_c(A^*)$. ■

La situazione è riassunta nello specchio seguente:

$\lambda \in \rho(A)$	\iff	$\bar{\lambda} \in \rho(A^*)$
$\lambda \in \sigma(A)$	\iff	$\bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$
$\lambda \in \sigma_p(A)$	\implies	$\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$
$\lambda \in \sigma_r(A)$	\implies	$\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$
$\lambda \in \sigma_c(A)$	\implies	$\bar{\lambda} \in \sigma_c(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$

Un corollario interessante del teorema (42) è:

Corollario 43 *Si sappia che $\sigma(A)$ è reale e che $A^* = A$. In tal caso $\sigma_r(A) = \emptyset$.*

Dim. Infatti, se $\lambda \in \sigma_r(A)$ allora deve aversi anche $\lambda = \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) = \sigma_p(A)$. Ciò è impossibile perché le tre componenti dello spettro sono disgiunte. ■

E' importante sapere che il corollario precedente contiene un'ipotesi ridondante. Infatti

Teorema 44 *Se $A = A^*$ allora $\sigma(A)$ è reale.*

La dimostrazione è posposta.

Gli operatori per cui $A = A^*$ si chiamano autoaggiunti e sono importantissimi nelle applicazioni. Per essi vale anche

Teorema 45 *Sia A autoaggiunto e siano λ e μ autovalori tra loro diversi. Siano x ed y non nulli e tali che*

$$Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu x.$$

Allora, $x \perp y$.

Dim. Dal Teorema 44 si sa che λ e μ sono reali. Come nel caso delle matrici, si moltiplichi scalarmente la prima per y , la seconda per x e si sommi. Si trova:

$$(\lambda - \mu)\langle x, y \rangle = 0.$$

Dato che $\lambda \neq \mu$, deve essere $x \perp y$. ■

Osservazione 46 E' bene notare che la condizione $A = A^*$ in particolare richiede l'uguaglianza dei domini. Se invece A^* estende A , senza che si abbia l'uguaglianza, l'operatore A si chiama simmetrico. Esattamente come in dimensione finita, si prova che se A è simmetrico i suoi autovalori sono reali e che autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.

Notiamo infine che le due definizioni di operatore simmetrico e di operatore autoaggiunto coincidono nel caso degli elementi di $\mathcal{L}(X)$. ■

1.5.4 Dimostrazioni posposte

Dimostrazione del TEOREMA 38. In questa dimostrazione useremo più volte il teorema 17:

$$[X^\perp]^\perp = X$$

se X è un s.spazio chiuso. Useremo inoltre questa proprietà, provata nel lemma 47: se X ed Y sono due s.spazi di H , con $X \subseteq Y$, allora $X^\perp \supseteq Y^\perp$.

Se A^* non ha dominio denso, esiste $k \in K$ non nullo ed ortogonale a $\text{dom } A^*$. In tal caso,

$$(k, 0) \in [\mathcal{G}(A^*)]^\perp.$$

1.5. L'OPERATORE AGGIUNTO DI UN OPERATORE TRA SPAZI DI HILBERT 29

Si prova che ciò non può darsi identificando esplicitamente lo spazio $[\mathcal{G}(A^*)]^\perp$. Indichiamo per questo con $\hat{\mathcal{G}}$ l'insieme $\{(-Ah, h) \mid h \in \text{dom } A\}$. Ovviamente,

$$\hat{\mathcal{G}} \subseteq [\mathcal{G}(A^*)]^\perp \quad \text{e quindi} \quad \mathcal{G}(A^*) = [\mathcal{G}(A^*)^\perp]^\perp \supseteq \hat{\mathcal{G}}^\perp \quad (1.18)$$

perché A^* è un operatore chiuso. Mostriamo che in realtà vale l'uguaglianza, così che $(k, 0) = (-A0, 0)$ e quindi $k = 0$.

Essendo l'operatore A chiuso, $\hat{\mathcal{G}}$ è un s.spazio chiuso di $K \times H$ e quindi

$$[\hat{\mathcal{G}}^\perp]^\perp = \hat{\mathcal{G}}.$$

Da (1.18) segue

$$[\mathcal{G}(A^*)]^\perp \supseteq \hat{\mathcal{G}} = [\hat{\mathcal{G}}^\perp]^\perp \supseteq [\mathcal{G}(A^*)]^\perp$$

e quindi l'uguaglianza che volevamo. ■

Per completare la dimostrazione notiamo:

Lemma 47 *Siano X ed Y due s.spazi di H , con $X \subseteq Y$, allora $X^\perp \supseteq Y^\perp$.*

Dim. Se $h \perp Y$ allora $\langle h, y \rangle = 0$ per ogni $y \in Y$; in particolare ciò vale anche per ogni $x \in X$, dato che $X \subseteq Y$. Dunque ogni $h \in Y^\perp$ è anche in X^\perp . ■

Dimostrazione del TEOREMA 39.

L'operatore $(A^{-1})^*$ è definito da

$$\langle h, A^{-1}k \rangle = \langle (A^{-1})^*h, k \rangle \quad \forall h \in H, k \in K.$$

Indichiamo con ξ il vettore $\xi = (A^{-1})k \in \text{dom } A$. L'uguaglianza precedente diviene

$$\langle h, \xi \rangle = \langle (A^{-1})^*h, A\xi \rangle \quad \forall \xi \in \text{dom } A.$$

Ciò mostra che $(A^{-1})^*h$ è nel dominio di A^* e inoltre che

$$A^*(A^{-1})^*h = h \quad \forall h \in H. \quad (1.19)$$

Mostriamo ora che

$$(A^{-1})^*A^*\xi = \xi \quad \forall \xi \in \text{dom } A^*. \quad (1.20)$$

Sia $h = A^{-1}\xi$ un generico elemento di $\text{dom } A$. Essendo

$$\langle h, A^*k \rangle = \langle Ah, k \rangle \quad \forall h \in \text{dom } A, k \in \text{dom } A^*$$

si ha

$$\langle A^{-1}\xi, A^*k \rangle = \langle \xi, k \rangle.$$

Ciò prova che $A^*k \in \text{dom}(A^{-1})^*$ per ogni $k \in \text{dom}A^*$ e che

$$(A^{-1})^*A^*k = k \quad \forall k \in \text{dom}A^*.$$

Vale dunque (1.20). Le uguaglianze (1.19) e (1.20) insieme equivalgono a (1.17). ■

Dimostrazione del TEOREMA 44.

Sia $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A)$. Si deve provare che $\beta = 0$.

Per ogni $x \in \text{dom}A$ vale

$$\langle (\lambda I - A)x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle$$

Ma ora, essendo $A = A^*$, $\langle Ax, x \rangle$ è reale. Infatti,

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}.$$

Dunque si trova

$$\overline{\langle (\lambda I - A)x, x \rangle} = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle.$$

Sottraendo,

$$2i\beta \|x\|^2 = \overline{\langle (\lambda I - A)x, x \rangle} - \langle (\lambda I - A)x, x \rangle = 2i \text{Im} \langle (\lambda I - A)x, x \rangle.$$

Passando ai moduli si vede che

$$|\beta| \cdot \|x\|^2 \leq |\text{Im} \langle (\lambda I - A)x, x \rangle| \leq |\langle (\lambda I - A)x, x \rangle| \leq \|(\lambda I - A)x\| \cdot \|x\|. \quad (1.21)$$

Ciò implica che l'inverso sinistro di $(\lambda I - A)$ è continuo, si veda la (??).

Proviamo ora che le proprietà precedenti implicano che $\beta = 0$.

Per ipotesi, $\lambda \in \sigma(A)$ e quindi $\text{im}(\lambda I - A)$ non può essere densa. Altrimenti, dalla (1.21), avremmo $\lambda \in \rho(A)$. Esiste quindi $\xi \neq 0$ per cui

$$0 = \langle \xi, (\lambda I - A)x \rangle \quad \forall x \in \text{dom}A.$$

Ciò in particolare implica che $\xi \in \text{dom}A^* = \text{dom}A$. Dunque, con $x = \xi$ si ha:

$$|\beta| \|\xi\| \leq |\langle \xi, (\lambda I - A)\xi \rangle| = 0$$

e quindi $\beta = 0$, come si voleva. ■

1.6 Operatori compatti

Siano H e K spazi di Hilbert e sia $C \in \mathcal{L}(H, K)$. Essendo C continuo, il suo nucleo è un s.spazio chiuso di H e inoltre la restrizione di C a $[\ker C]^\perp$ è iniettiva. Se in particolare $[\ker C]^\perp$ ha dimensione finita allora anche $\text{im } C$ è uno spazio di dimensione finita e lo studio di C si fa semplicemente lavorando tra spazi di dimensione finita. In particolare, esistono basi $\{e_1, \dots, e_n\}$ di $[\ker C]^\perp$ ed $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ di $\text{im } C$ tali che

$$Cx = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \epsilon_i$$

per ogni $x \in H$ (e non solo per ogni $x \in [\ker C]^\perp$).

Osservazione 48 Si ha quindi una “diagonalizzazione” di C , ma rispetto a basi diverse. Si noti che le basi possono essere diverse anche se $H = K$. Per esempio sia $H = K = \mathbb{C}^2$ e sia C rappresentato dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica. L'operatore C non è diagonalizzabile scegliendo una medesima base per rappresentare \mathbb{C}^2 sia come spazio di partenza che d'arrivo; se però si sceglie come e_1 ed e_2 gli elementi della base canonica e invece

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

allora

$$C[x_1e_1 + x_2e_2] = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2. \blacksquare$$

La classe degli operatori C il cui nucleo ha codimensione finita ha quindi proprietà ben particolari. Sfortunatamente essa è troppo piccola per le applicazioni. Una classe più vasta di operatori, che ha proprietà ancora ben particolari e che però si incontra in numerose applicazioni è quella degli *operatori compatti*. Per definizione, un operatore si dice *compatto* quando ogni insieme limitato di H è trasformato in un insieme relativamente compatto nella topologia della norma di K .

Naturalmente, per vedere se un operatore è compatto basta verificare che una sfera ha per immagine un insieme relativamente compatto.

Osservazione 49 Ricordiamo che ogni insieme relativamente compatto è limitato. Dunque la sola proprietà di trasformare limitati in relativamente compatti implica la limitatezza e quindi la continuità dell'operatore. \blacksquare

Ricordiamo che una successione è compatta quando ogni sua s.successione ammette punti limite. Ovviamente:

Teorema 50 *L'operatore $C \in \mathcal{L}(H, K)$ è compatto se e solo se trasforma ogni successione limitata di H in una successione compatta di K (con la topologia della norma).*

Chiaramente tutti gli operatori con nucleo di codimensione finita, ossia con immagine di dimensione finita, trasformano insiemi limitati in insiemi relativamente compatti e inoltre:

Teorema 51 *Sia (C_n) una successione di operatori compatti. Se*

$$C = \lim C_n$$

(il limite nel senso di $\mathcal{L}(K, H)$), allora C è compatto.

In particolare ciò vale se per ciascun C_n si ha:

$$\dim [\text{im } C_n] = c_n < +\infty.$$

Dim. Proviamo il teorema nel caso generale in cui ogni operatore C_n è compatto, senza fare ipotesi sul suo nucleo.

Proviamo che ogni successione (x_n) limitata di H ha per immagine una successione $(C_n x_n)$ compatta in K (dotato della topologia della norma). Usiamo il procedimento diagonale di Cantor: si consideri la successione

$$n \rightarrow C_1 x_n.$$

Questa ammette s.successioni convergenti, perché l'operatore C_1 è compatto. Indichiamo col simbolo $(x_{1,n})$ una s.successione di (x_n) per cui $(C_1 x_{1,n})$ converge. La s.successione $(x_{1,n})$ è limitata perché la successione (x_n) è limitata. Dunque $(C_2 x_{1,n})$ ammette una s.successione convergente che indichiamo col simbolo $(C_2 x_{2,n})$.

Proseguendo in questo modo si costruiscono successioni $(x_{r,n})$ tali che:

- $(x_{r,n})$ è s.successione di $(x_{r-1,n})$;
- per ogni fissato i , la successione (di indice n) $(C_i x_{i,n})$ è convergente.
- Dunque, $(C_j x_{i,n})$ è convergente per ogni indice $j < i$, perché $(x_{i,n})$ con $i > j$ è s.successione di $(x_{j,n})$.

Si consideri ora la tabella seguente.

$C_1 x_{1,1}$	$C_1 x_{1,2}$	$C_1 x_{1,3}$	$C_1 x_{1,4}$	$C_1 x_{1,5}$...
$C_2 x_{2,1}$	$C_2 x_{2,2}$	$C_2 x_{2,3}$	$C_2 x_{2,4}$	$C_2 x_{2,5}$...
$C_3 x_{3,1}$	$C_3 x_{3,2}$	$C_3 x_{3,3}$	$C_3 x_{3,4}$	$C_3 x_{3,5}$...
$C_4 x_{4,1}$	$C_4 x_{4,2}$	$C_4 x_{4,3}$	$C_4 x_{4,4}$	$C_4 x_{4,5}$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Proviamo che la successione diagonale $(Cx_{r,r})$ è convergente. Scriviamo per questo

$$\begin{aligned} \|Cx_{n,n} - Cx_{m,m}\| &\leq \|Cx_{n,n} - C_r x_{n,n}\| + \|C_r x_{n,n} - C_r x_{m,m}\| \\ &+ \|C_r x_{m,m} - Cx_{m,m}\| \leq \|C - C_r\| \{\|x_{n,n}\| + \|x_{m,m}\|\} + \|C_r x_{n,n} - C_r x_{m,m}\|. \end{aligned}$$

Per ipotesi, (x_n) è limitata,

$$\|x_n\| < M \quad \forall n.$$

Sia $\epsilon > 0$ fissato e sia r_ϵ tale che

$$\|C - C_r\| < \epsilon/4M$$

Con questo valore di r fissato, si ha

$$\|C - C_r\| \{\|x_{n,n}\| + \|x_{m,m}\|\} < \epsilon/2.$$

Il numero r è ormai fissato e si sa che $(C_r x_{n,n})$ converge. Dunque si trova N_ϵ tale che, per n, m maggiori di N_ϵ vale

$$\|C_r x_{n,n} - C_r x_{m,m}\| < \epsilon/2.$$

Dunque la successione $(Cx_{n,n})$ è fondamentale e quindi convergente.

Ciò prova che la successione (Cx_n) è compatta in K , come volevamo. ■

In particolare,

Corollario 52 *L'insieme degli operatori compatti è un s.spazio chiuso di $\mathcal{L}(H, K)$.*

Infatti, che è un insieme chiuso discende dalla dimostrazione precedente. Che è un s.spazio si vede facilmente.

In realtà vale di più: si ricordi che un operatore lineare continuo trasforma limitati in limitati e compatti in compatti. Dunque, se C è compatto, la sua composizione, a destra o a sinistra, con un operatore continuo è un operatore compatto. Dunque:

Teorema 53 *L'insieme degli operatori compatti di $\mathcal{L}(K)$ è un ideale chiuso.*

Vale inoltre:

Teorema 54 *L'operatore $C \in \mathcal{L}(H, K)$ è compatto se e solo se $C^* \in \mathcal{L}(K, H)$ è compatto.*

Dim. Dato che $C = C^{**}$, basta provare che se C è compatto il suo aggiunto lo è.

Per assurdo, supponiamo che C^* non sia compatto. In tal caso esiste una successione (k_n) limitata in K , e tale che $(C^* k_n)$ non ammette s.successioni convergenti. Dunque, per ogni successione di indici (n_k) esiste almeno un $\epsilon > 0$ tale che

$$\|C^* x_{n_k} - C^* x_{n_m}\| > \epsilon$$

per infiniti indici n ed m . Passando ad una ulteriore s.successione, non è restrittivo assumere che ciò avvenga per ogni n e per ogni m .

Sia ora $h_{k,m}$ con $\|h_{k,m}\| = 1$ e tale che

$$\epsilon/2 \leq \langle h_{k,m}, C^* x_{n_k} - C^* x_{n_m} \rangle = \langle Ch_{k,m}, x_{n_k} - x_{n_m} \rangle. \quad (1.22)$$

Per ipotesi, l'operatore C è compatto. Dunque, l'insieme $\{Ch_{k,m}\}$ o è finito o ammette punti di accumulazione. Nel primo caso esiste z_0 ed esiste una successione (k_r, m_r) per cui

$$Ch_{k_r, m_r} = z_0.$$

Nel secondo caso esiste una successione (k_r, m_r) per cui

$$\lim Ch_{k_r, m_r} = z_0.$$

Limitandoci a considerare tale successione, si ha, per r sufficientemente grande,

$$\langle z_0, x_{n_{k_r}} - x_{n_{m_r}} \rangle = \langle z_0 - Ch_{k_r, m_r}, x_{n_{k_r}} - x_{n_{m_r}} \rangle + \langle Ch_{k_r, m_r}, x_{n_{k_r}} - x_{n_{m_r}} \rangle > \epsilon/4$$

perché vale (1.22) e il primo addendo tende a zero.

Ciò non può darsi perché la successione $(\langle z_0, x_{n_{k_r}} - x_{n_{m_r}} \rangle)$ è una successione limitata di numeri, e quindi deve avere s.successioni convergenti per il teorema di Bolzano–Weierstrass. ■

1.6.1 Lo spettro degli operatori compatti

Consideriamo un operatore compatto C da uno spazio di Hilbert di dimensione infinita H in sé e studiamone lo spettro. Esponiamo i risultati, posponendo le dimostrazioni.

Essendo C continuo, il suo spettro è non vuoto e limitato. Si sa inoltre che

$$\lambda \in \sigma(C) \implies |\lambda| \leq \|C\|.$$

Dunque, o lo spettro è finito oppure è dotato di punti di accumulazione. Mostriamo prima di tutto che $\sigma(C)$ può essere finito:

Esempio 55 Sia $H = L^2(0, 1)$ e sia C l'operatore da H in sé definito da

$$(Ch)(t) = \int_0^t h(s) ds.$$

E' noto che $\sigma(C) = \{0\}$, si veda l'Esempio ???. Mostriamo che C è compatto. Notiamo per questo che l'immagine di C contiene soltanto funzioni continue e che C è anche continuo da $L^2(0, 1)$ in $C(0, 1)$. Inoltre, ogni s.insieme compatto di $C(0, 1)$ è anche un s.insieme compatto di $L^2(0, 1)$. Dunque basta provare che è compatto l'operatore

$$C : L^2(0, 1) \rightarrow C(0, 1), \quad (Ch)(t) = \int_0^t h(s) ds.$$

Come si è notato, è sufficiente provare che l'immagine della sfera unità di $L^2(0,1)$ è compatta in $C(0,1)$. La continuità di C mostra che l'immagine è limitata. La disuguaglianza

$$|(Ch)(r) - (Ch)(t)| \leq \left| \int_r^t |h(s)| ds \right| \leq \sqrt{|t-r|} \left[\int_0^1 |h(s)|^2 ds \right]^{1/2}$$

mostra l'equicontinuità dell'immagine, e quindi la compattezza per il teorema di Ascoli-Arzelà. ■

Nell'esempio precedente, $0 \in \sigma(C)$. Ciò non per caso. Infatti vale

Teorema 56 *Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Se C è compatto, il suo spettro contiene il punto 0.*

Se lo spettro di C è infinito, esso è numerabile ed ha 0 come unico punto di accumulazione.

Il risultato seguente va sotto il nome di *alternativa di Fredholm*.

Teorema 57 *Se $\lambda \neq 0$, allora $\text{im}(\lambda I - C)$ è chiusa e λ appartiene al risolvente di C oppure appartiene allo spettro di punti di C .*

Ossia, gli elementi non nulli dello spettro sono *autovalori*. Invece, il punto 0 può essere o meno un autovalore: nel caso dell'operatore visto nell'esempio 55 si ha $0 \in \sigma_c(C)$.

Ad ogni autovalore si associano i corrispondenti autovettori, uno o più, e ad ogni autovettore si associa una *catena di Jordan*. E' questa una successione, oppure una sequenza finita, (x_n) di vettori tali che

$$Ax_0 = \lambda x_0, \quad Ax_n = x_{n-1} + \lambda x_n \text{ per } n > 0.$$

Dunque, il primo elemento x_0 della catena è un autovettore relativo all'autovalore λ .

Lo spazio generato da tutti gli elementi di catene di Jordan che corrispondono all'autovettore λ si chiama *autospazio generalizzato* di λ .

Vale:

Teorema 58 *Gli autospazi generalizzati di autovalori non nulli hanno dimensione finita.*

Naturalmente, se 0 è l'unico punto dello spettro, o anche se lo spettro è finito, lo spettro darà poche informazioni sull'operatore. Il caso in cui lo spettro dà informazioni "complete" sull'operatore è il caso in cui le catene di Jordan costituiscono un sistema massimale in H o almeno in $[\ker C]^\perp$, perché in tal caso l'operatore può rappresentarsi mediante "blocchi di Jordan". Un caso in cui ciò avviene è quello degli operatori compatti e autoaggiunti:

Teorema 59 Sia C compatto e autoaggiunto sullo spazio di Hilbert H di dimensione infinita. Esiste una famiglia ortonormale $(\{v_n\})$ (finita o numerabile) di autovettori di C ,

$$Cv_n = \lambda_n v_n \quad \lambda_n \neq 0,$$

tale che

$$Cx = \sum \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n$$

per ogni $x \in H$.

La famiglia $\{v_n\}$ è massimale in $[\ker C]^\perp$.

Questo risultato generalizza la diagonalizzazione delle matrici simmetriche: rispetto a una base di autovettori l'operatore C può "scriversi in forma diagonale".

Chiameremo questa la diagonalizzazione di C .

1.6.2 Operatori compatti tra spazi diversi. Valori singolari

Studiamo ora il caso di un operatore C compatto tra due spazi di Hilbert H e K . Niente vieta che possa essere $H = K$ e ciò è utile nel caso in cui l'operatore C non è autoaggiunto. Ciascuno degli operatori

$$CC^* \in \mathcal{L}(K), \quad C^*C \in \mathcal{L}(H)$$

è compatto autoaggiunto e quindi si rappresenta rispettivamente come

$$C^*Ch = \sum_{i=1}^{+\infty} m_i \langle h, v_i \rangle v_i, \quad CC^*k = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i \langle k, w_i \rangle w_i. \quad (1.23)$$

Naturalmente, m_i e μ_i sono gli autovalori non nulli rispettivamente di C^*C e di CC^* mentre v_i e w_i rappresentano corrispondenti autovettori normalizzati.

I numeri m_i e μ_i sono reali e positivi. Infatti,

$$0 \leq \langle CC^*v_i, v_i \rangle = m_i \|v_i\|^2 = m_i, \quad 0 \leq \langle C^*Cw_i, w_i \rangle = \mu_i \|w_i\|^2 = \mu_i.$$

E' inoltre immediato vedere che i numeri m_i (ricordiamo, tutti non nulli) coincidono con i μ_i (ricordiamo: anch'essi non nulli). Infatti, sia $\mu \neq 0$ tale che

$$CC^*v = \mu v.$$

Essendo $\mu \neq 0$, C^*v non è 0 e applicando C^* ai due membri si trova

$$(C^*C)C^*v = \mu C^*v$$

e quindi il numero μ (non nullo) è uno degli m (non nulli). In modo analogo si vede che ciascuno degli m_i coincide con uno dei numeri μ_i .

Osservazione 60 Nelle rappresentazioni (1.23) figurano i soli autovalori non nulli, ed abbiamo provato che essi sono i medesimi per CC^* come per C^*C . E' però possibile che 0 sia nello spettro di uno solo di questi operatori, come accade se $H = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. ■

Introduciamo i numeri non nulli

$$\sigma_i = \sqrt{m_i}.$$

che si possono anche ottenere a partire dai μ_i e che si chiamano i *valori* singolari di C .

Generalmente si assume di ordinare i valori singolari in modo non crescente.

Indichiamo con ω_i il vettore

$$\omega_i = \frac{1}{\sigma_i} C v_i$$

(si ricordi che i valori singolari sono non nulli.)

Vale:

Lemma 61 *L'insieme $\{\omega_i\}$ è ortonormale in K .*

Dim. Infatti,

$$\langle \omega_r, \omega_s \rangle = \left\langle \frac{1}{\sigma_r} C v_r, \frac{1}{\sigma_s} C v_s \right\rangle = \frac{1}{\sigma_r \sigma_s} \langle C^* C v_r, v_s \rangle = \frac{1}{\sigma_r \sigma_s} m_r \langle v_r, v_s \rangle$$

nullo se $r \neq s$ perché $v_r \perp v_s$, altrimenti uguale a 1. ■

Poiché i $\{v_i\}$ sono un sistema ortonormale massimale in $[\ker C^*C]^\perp$, si può scrivere

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, v_i \rangle v_i + n, \quad n \in \ker C = \ker C^*C$$

e quindi

$$Cx = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, v_i \rangle C v_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i \langle x, v_i \rangle \omega_i. \quad (1.24)$$

In particolare ciò mostra una “diagonalizzazione” per operatori compatti tra spazi diversi (in particolare, operanti nello stesso spazio, ma rispetto a basi diverse) e mostra che ogni operatore compatto si approssima nella norma di $\mathcal{L}(H, K)$ mediante operatori con immagine di dimensione finita. Combinando ciò col teorema 51 si trova:

Teorema 62 *Un operatore $C \in \mathcal{L}(H, K)$ è compatto se e solo se è limite, in $\mathcal{L}(H, K)$, di una successione di operatori con immagine di dimensione finita.*

Osservazione 63 Gli operatori compatti possono definirsi anche in spazi di Banach e il teorema 51 vale anche in spazi di Banach. Però in spazi di Banach esistono operatori compatti che non possono approssimarsi con operatori la cui immagine ha dimensione finita. ■

Per concludere, mostriamo una particolare rappresentazione sotto cui si possono porre gli operatori compatti da H in K .

Sia prima di tutto $C \in \mathcal{L}(H)$ compatto autoaggiunto e *positivo*. Ciò vuol dire che

$$\langle Cx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x.$$

In tal caso si definisce

$$C^{1/2}x = \sum_{i=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_i} \langle x, v_i \rangle v_i.$$

Sia ora C compatto da H in K . Si definisce l'operatore *modulo* di C ponendo

$$|C|x = (C^*C)^{1/2}x = \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i \langle x, v_i \rangle v_i.$$

Si noti che il simbolo $|C|$ indica un operatore, e non un numero.

Dato ora un generico operatore compatto, diciamo A , tra spazi diversi,

$$Ax = \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i \langle x, v_i \rangle \omega_i$$

introduciamo l'operatore (continuo ma generalmente non compatto)

$$U_Ax = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, v_i \rangle \omega_i.$$

Le proprietà importanti di U_A sono:

- se $x \in [\text{span} \{ v_i \}]^\perp$ allora $U_Ax = 0$;
- se $x \in \text{cl span} \{ v_i \}$ allora

$$\|U_Ax\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, v_i \rangle \omega_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\langle x, v_i \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

E' ora facile verificare che l'operatore compatto A si rappresenta come

$$A = U_A|A|.$$

Questa rappresentazione si chiama la *rappresentazione polare* dell'operatore A .

1.6.3 Proprietà geometriche degli autovalori e valori singolari

Sia C compatto da H in K . Si è visto che

$$Cx = \sum \sigma_i \langle x, v_i \rangle \omega_i.$$

Dunque,

$$\|Cx\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i \langle x, v_i \rangle \omega_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^2 |\langle x, v_i \rangle|^2 \leq \sigma_1^2 \|x\|^2$$

e l'uguaglianza vale se $x = v_1$. Dunque,

Teorema 64 *Il numero σ_1 , massimo valor singolare di C , è uguale a $\|C\|$. In particolare, se C è compatto ed autoaggiunto, $\|C\|$ è anche uguale a $\max\{\lambda_i\}$.*

Vogliamo estendere questa caratterizzazione al caso di generici autovalori. Consideriamo un operatore compatto autoaggiunto C , limitandoci a considerare il caso in cui tutti i suoi autovalori sono non negativi. In questo caso, ordiniamo quelli strettamente positivi in modo non crescente, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$. Gli autovalori si elencano più volte quando ad essi corrispondono più autovettori linearmente indipendenti. Indichiamo con v_i un autovettore di norma 1 di λ_i , in modo da avere un sistema ortonormale $\{v_i\}$ massimale in $[\ker C]^\perp$.

Indichiamo con $\mathcal{L}[n]$ la famiglia di tutti i s.spazi di H di dimensione n . Un generico elemento di $\mathcal{L}[n]$ è

$$L = \text{span} \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Con \tilde{L}_n indichiamo il particolare s.spazio generato dai primi n autovettori:

$$\tilde{L}_n = \text{span} \{v_1, \dots, v_n\}.$$

Ricordiamo che stiamo studiando gli autovalori λ_i con $i > 1$. Un primo risultato è il seguente:

Lemma 65 *Sia C compatto autoaggiunto, con autovalori non negativi. Vale:*

$$\lambda_{n+1} = \max \left\{ \langle Cx, x \rangle \mid \|x\| = 1, x \in [\tilde{L}_n]^\perp \right\}.$$

Dim. Se $x \in [\tilde{L}_n]^\perp$, si ha

$$x = \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i v_i + n, \quad x_i = \langle x, v_i \rangle, \quad n \in \ker C$$

e quindi

$$\langle Cx, x \rangle = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_{n+1} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 \right) \geq \lambda_{n+1}.$$

L'ultima uguaglianza vale perché $x = \sum_{i=n+1}^{+\infty} x_i v_i$ ha norma 1. ■

Il risultato precedente richiede l'esplicita conoscenza degli autospazi. In pratica interessano risultati che non fanno uso esplicito degli autospazi. Tra questi:

Teorema 66 *Sia C come nel Lemma 65. Si ha:*

$$\lambda_{n+1} = \min \left\{ \max \left\{ \langle Cx, x \rangle \mid \|x\| = 1, x \in L^\perp \right\}, L \in \mathcal{L}[n] \right\}.$$

Dim. Il lemma 65 mostra che

$$\lambda_{n+1} = \max \left\{ \langle Cx, x \rangle, \mid \|x\| = 1, x \in [\tilde{L}_n]^\perp \right\}.$$

Per provare il teorema basta mostrare che per ogni altra scelta di $L \in \mathcal{L}[n]$ si ha

$$\lambda_{n+1} \leq \max \left\{ \langle Cx, x \rangle, \mid \|x\| = 1, x \in L^\perp \right\}. \quad (1.25)$$

Sia $L = \text{span} \{h_1, \dots, h_n\}$ e sia

$$\phi = \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i v_i.$$

Scegliamo coefficienti ϕ_i non tutti nulli in modo da avere $\phi \in L^\perp$. Per avere ciò si deve richiedere

$$\sum_{i=1}^{n+1} \phi_i \langle h_j, v_i \rangle = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Questo è un sistema di n equazioni in $(n+1)$ incognite e quindi ammette soluzione non nulla. Si può quindi effettivamente trovare $\phi \perp L$ e, dividendo per $\|\phi\| \neq 0$, si può assumere $\|\phi\| = 1$. Per questo particolare elemento ϕ vale

$$\langle C\phi, \phi \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \phi_i^2 \geq \lambda_{n+1} \|\phi\|^2 = \lambda_{n+1}.$$

Dunque vale (1.25), come volevamo. ■

Proviamo ora una caratterizzazione importante dei valori singolari. In questo caso C è compatto tra spazi di Hilbert H e K , può essere tra loro diversi. Con $\mathcal{A}[n]$ indichiamo la famiglia degli operatori lineari da H in K , ciascuno dei quali ha immagine di dimensione n al più.

Ricordiamo che i valori singolari per definizione sono non nulli ed ordinati in modo decrescente.

Teorema 67 *Vale:*

$$\sigma_{n+1} = \min \{ \|C - A\| \mid A \in \mathcal{A}[n] \}.$$

Dim. Consideriamo l'operatore \tilde{A} definito da

$$\tilde{A}x = \sum_{i=1}^n \sigma_i \langle x, v_i \rangle \omega_i.$$

Per quest'operatore si ha

$$(C - \tilde{A})x = \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i \langle x, v_i \rangle \omega_i$$

e quindi $\|C - \tilde{A}\| = \sigma_{n+1}$. Ovviamente, $\tilde{A} \in \mathcal{A}[n]$.

Sia ora A un generico operatore che appartiene ad $\mathcal{A}[n]$. La sua restrizione a $\text{span}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ non è iniettiva, perché A ha immagine di dimensione n al più, minore di quella del dominio. Dunque esiste $x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i v_i$ tale che $Ax = 0$ e inoltre $\|x\| = 1$. Per quest'elemento x vale

$$\|(C - A)x\| = \|Cx\| \geq \sigma_{n+1}$$

e ciò completa la dimostrazione. ■

1.6.4 Operatori compatti ed equazioni integrali di Fredholm

Consideriamo una funzione $K(t, s)$ continua su $[a, b] \times [a, b]$ e l'operatore da $L^2(a, b)$ in sé definito da

$$x \rightarrow Kx = \int_a^b K(t, s)x(s) ds.$$

Si sa già che quest'operatore è continuo. Mostriamo che esso è addirittura compatto, facendo uso del teorema di Ascoli–Arzelà. Ciò generalizza l'osservazione usata nell'Esempio 55.

Sia $x \in B$,

$$B = \{x \mid \|x\| < 1\}.$$

Se possiamo provare che KB è un insieme relativamente compatto di $L^2(a, b)$ allora K è un operatore compatto.

Si sa anche che K trasforma $L^2(a, b)$ in $C(a, b)$ e, come si è già visto, basta provare che KB è un s.insieme compatto di $C(a, b)$. La uniforme limitatezza di KB discende dalla continuità di K . Proviamo quindi l'equicontinuità. Notiamo:

$$\begin{aligned} |(Kx)(t) - (Kx)(t')| &= \left| \int_a^b [K(t, s) - K(t', s)]x(s) ds \right| \\ &\leq \left[\int_a^b |K(t, s) - K(t', s)|^2 \right]^{1/2} \left[\int_a^b |x(s)|^2 \right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b |K(t, s) - K(t', s)|^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Sia $\epsilon > 0$. L'uniforme continuità di K mostra che esiste $\delta > 0$ tale che

$$|t - t'| < \delta \implies |K(t, s) - K(t', s)| < \epsilon^2$$

e quindi, per $|t - t'| < \delta$,

$$|(Kx)(t) - (Kx)(t')| < \epsilon.$$

Ciò prova l'equicontinuità e quindi la compattezza.

Consideriamo ora l'equazione integrale

$$x = \mu Kx + \phi = \mu \int_a^b K(t, x)x(s) ds + \phi(t).$$

Nel caso in cui K sia autoaggiunto, ossia nel caso in cui

$$K(t, s) = \overline{K(s, t)},$$

l'operatore K si può diagonalizzare rispetto ad un sistema ortonormale, mentre in generale si potrà scrivere

$$Kx = \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i \langle x, v_i \rangle \omega_i.$$

Se accade che questa somma è finita, l'equazione integrale di Fredholm ha nucleo degenere; altrimenti, l'equazione integrale diviene

$$x(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i \left[\int_a^b x(s) \bar{v}_i(s) ds \right] \omega_i(t) + \phi(t),$$

forma che generalizza quella che abbiamo introdotto, per le equazioni con nucleo degenere, al paragrafo ??.

1.6.5 Dimostrazioni posposte

Si provano ora i teoremi relativi agli operatori compatti. Per questo avremo bisogno di introdurre alcune proprietà che valgono anche per operatori non compatti. Per chiarezza, indicheremo con A un generico operatore lineare e con C uno che è anche compatto.

Conviene seguire un'ordine un po' diverso da quello del paragrafo 1.6.1 e spezzare le dimostrazioni in vari lemmi.

Avremo spesso bisogno di lavorare con successioni limitate o addirittura convergenti (v_n) di elementi dell'immagine di $\lambda I - C$,

$$v_n = (\lambda I - C)x_n.$$

La successione (x_n) in generale non sarà né convergente né limitata. Però:

Lemma 68 Sia (v_n) una successione limitata che appartiene ad $\text{im}(\lambda I - C)$, con C compatto e $\lambda \neq 0$:

$$v_n = \lim(\lambda I - C)x_n, \quad \lambda \neq 0. \quad (1.26)$$

Esiste una successione (k_n) limitata e tale che

$$v_n = (\lambda I - C)k_n.$$

Dim. Se (x_n) stessa è limitata, niente è da provare. Consideriamo il caso in cui l'uguaglianza (1.26) vale, con (x_n) successione illimitata.

Si rappresenti

$$X = \ker(\lambda I - C) \oplus [\ker(\lambda I - C)]^\perp, \quad x_n = h_n + k_n.$$

Ovviamente, $(\lambda I - C)x_n = (\lambda I - C)k_n$ e quindi si può sostituire x_n con k_n . Basta dunque provare che la successione (k_n) è limitata.

Sia per assurdo la successione (k_n) illimitata. In tal caso,

$$y_n = \lim \frac{v_n}{\|k_n\|} = 0$$

perché (v_n) è limitata.

Usiamo l'ipotesi che l'operatore C è compatto, e la limitatezza di $(k_n/\|k_n\|)$, per estrarre dalla successione $(C \frac{k_n}{\|k_n\|})$ una s.successione convergente. Cambiando nome agli indici, si può supporre

$$\lim C \frac{k_n}{\|k_n\|} = w_0.$$

Essendo

$$(\lambda I - C) \frac{k_n}{\|k_n\|} = \frac{v_n}{\|k_n\|} = y_n \longrightarrow 0,$$

si ha anche

$$\lim \lambda \frac{k_n}{\|k_n\|} = \lim C \frac{k_n}{\|k_n\|} = w_0. \quad (1.27)$$

Poiché $\lambda \neq 0$ e $k_n/\|k_n\|$ ha norma 1, segue che $\|w_0\| = |\lambda| \neq 0$, e dunque $w_0 \neq 0$.

Inoltre, $w_0 \in [\ker(\lambda I - C)]^\perp$ perchè $k_n \in [\ker(\lambda I - C)]^\perp$. Usando ambedue le uguaglianze in (1.27), mostriamo ora che si ha anche $w_0 \in \ker(\lambda I - C)$ così che si arriva alla contraddizione $w_0 = 0$.

$$\begin{aligned} (\lambda I - C)w_0 &= \lambda w_0 - Cw_0 = \lim_n \left\{ \lambda^2 I - C^2 \right\} \frac{k_n}{\|k_n\|} \\ &= \lim(\lambda I + C)(\lambda I - C) \frac{k_n}{\|k_n\|} = (\lambda I + C) \left\{ \lim(\lambda I - C) \frac{k_n}{\|k_n\|} \right\} = 0. \end{aligned}$$

La contraddizione trovata mostra che la successione (k_n) è limitata. ■

Osservazione 69 Si noti che l'ipotesi della compattezza di C si è esplicitamente usata. L'asserto precedente non vale per generici operatori. ■

Usiamo questo lemma per provare:

Teorema 70 *Se C è compatto e $\lambda \neq 0$ allora $(\lambda I - C)$ ha immagine chiusa.*

Dim. Sia (v_n) una successione in $\text{im}(\lambda I - C)$, convergente a v_0 . Dobbiamo provare $v_0 \in \text{im}(\lambda I - C)$ ossia che, per un opportuno x_0 , si ha

$$v_0 = (\lambda I - C)x_0.$$

Assumiamo quindi che valga (1.26). Come si è visto al Lemma 68, possiamo assumere che la successione (x_n) sia limitata. In questo caso, passando ad una s.successione, si può assumere $\lim Cx_n = y$, perché C è compatto. Si ha quindi che

$$x_n = \frac{1}{\lambda} [v_n + Cx_n], \quad \lim x_n = \frac{1}{\lambda} [v_0 + y] = x_0,$$

ossia (x_n) converge ad x_0 . D'altra parte C , essendo compatto, è continuo. Dunque, da $v_n = (\lambda I - C)x_n$, si ha $v_0 = (\lambda I - C)x_0$. Ciò prova che $v_0 \in \text{im}(\lambda I - C)$, come volevamo. ■

Proviamo ora:

Teorema 71 *Se l'operatore $C \in \mathcal{L}(H, K)$ è compatto e se lo spazio di Hilbert K ha dimensione infinita, allora $0 \in \sigma(C)$.*

Dim. Supponiamo che 0 sia nel risolvente di C . In questo caso, C^{-1} è continuo e quindi

$$I = CC^{-1}$$

è un operatore compatto. Dunque, la sfera $\{x \mid \|x\| \leq 1\}$ è compatta. Ciò non può essere se lo spazio di Hilbert H ha dimensione infinita, si veda il Teorema ?? . ■

Proviamo ora un lemma che sarà reso più preciso in seguito:

Lemma 72 *Sia C compatto. Se $\lambda \in \sigma(C)$ non è zero, allora $\lambda \in \sigma_p(C) \cup \sigma_r(C)$.*

Dim. Sia $\lambda \neq 0$, e sia $\lambda \notin \sigma_p(C)$. Si è visto che l'immagine di $(\lambda I - C)$, con $\lambda \neq 0$, è chiusa. Se questa è diversa da X allora $\lambda \in \sigma_r(C)$. Se l'immagine è X allora, per il teorema di Banach, Teorema ??, $(\lambda I - C)^{-1}$ è continuo e quindi $\lambda \in \rho(C)$. ■

Osservazione 73 In particolare si è provato che lo spettro continuo di un operatore compatto, se non è vuoto, contiene il solo elemento 0. ■

Notiamo che non abbiamo ancora provato che gli elementi non nulli di $\sigma(C)$ sono autovalori. Possiamo però provare:

Lemma 74 *L'insieme degli autovalori dell'operatore compatto C , se non è finito, ha per unico punto di accumulazione il punto 0.*

Dim. Ricordiamo che autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti. Questo risultato, noto dai corsi di algebra lineare, è provato per completezza nel Lemma 77.

Essendo C continuo, il suo spettro è un insieme limitato e quindi se C ha infiniti autovalori, si trova una successione (λ_k) di autovalori tra loro diversi, che converge a λ_0 . Supponiamo per assurdo che sia $\lambda_0 \neq 0$. Indichiamo con x_k un autovettore di λ_k di norma 1 e sia $X_n = \text{span} \{x_1, \dots, x_n\}$.

Lo spazio lineare X_n è trasformato in sé dall'operatore C ,

$$CX_n \subseteq X_n$$

ed inoltre

$$(\lambda_n I - C) X_n \subseteq X_{n-1}$$

perché $(\lambda_n I - C)x_n = 0$.

Grazie al Lemma 77, la dimensione di X_n è esattamente n e quindi $X_{n-1} \subseteq X_n$, l'inclusione essendo stretta. Dunque in X_n può trovarsi un vettore e_n di norma 1, che dista 1 da X_{n-1} . Mostriamo che se $\lambda_0 \neq 0$, la successione $(C \frac{e_n}{\lambda_n})$ non ammette s.successioni convergenti. Ciò contrasta con la compattezza di C e mostra che $\lambda_0 = 0$. Per ottenere ciò, basta provare che per ogni n, m vale

$$\left\| C \frac{e_n}{\lambda_n} - C \frac{e_m}{\lambda_m} \right\| > 1.$$

Per fissare le idee, sia $n > m$ e si scriva

$$C \frac{e_n}{\lambda_n} - C \frac{e_m}{\lambda_m} = e_n - \left\{ C \frac{e_m}{\lambda_m} + \left(I - \frac{C}{\lambda_n} \right) e_n \right\}.$$

I due vettori

$$\left(I - \frac{C}{\lambda_n} \right) e_n, \quad C \frac{e_m}{\lambda_m}$$

appartengono a X_{n-1} mentre $e_n \in X_n$. Dunque,

$$\left\| C \frac{e_n}{\lambda_n} - C \frac{e_m}{\lambda_m} \right\| \geq \text{dist}(e_n, X_{n-1}) \geq 1.$$

Si trova quindi che la successione limitata (e_n/λ_n) ha immagine priva di s.successioni convergenti. Ciò contrasta con la compattezza di C . La contraddizione trovata mostra che l'insieme degli autovalori di C , se non è finito, ha 0 come unico punto di accumulazione. ■

Vorremo provare che

$$\sigma_r(C) - \{0\} = \emptyset.$$

Per ora però proviamo:

Corollario 75 *Sia C compatto. L'insieme $\sigma_r(C)$ è finito oppure ha 0 come unico punto di accumulazione.*

Dim. Infatti, si sa dal teorema 42 che se $\lambda \in \sigma_r(C)$ allora $\bar{\lambda} \in \sigma_p(C^*)$ e C^* è compatto, si veda il Teorema 54; e quindi l'unico punto che può essere di accumulazione per $\sigma_r(C)$ è il punto 0. ■

Per completare le dimostrazioni dei risultati relativi allo spettro di operatori compatti, dobbiamo far intervenire le proiezioni spettrali introdotte al teorema ??.

Per i risultati già provati, si può trovare una successione di numeri positivi (r_n) , $r_n \rightarrow 0$, tali che

$$\{\lambda : |\lambda| = r_n\} \subseteq \rho(C).$$

Infatti, 0 è l'unico punto di accumulazione sia di $\sigma_p(C)$ che di $\sigma_r(C)$; e si è già visto che $\sigma_c(C) \subseteq \{0\}$.

Con un abuso di linguaggio comune nella teoria delle funzioni olomorfe, indichiamo con Γ_n la “curva” costituita dalle due circonferenze di centro 0 e di raggio rispettivamente r_n, r_{n+1} . Sia Ω_n la corona circolare delimitata da Γ_n . Consideriamo l'operatore

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} (zI - C)^{-1} dz.$$

Ricordiamo, dal teorema ??:

- I due s.spazio in P_n ed $\text{im}(I - P_n)$ sono complementari;
- L'insieme $\sigma_n = \sigma(C) \cap \Omega_n$ è lo spettro della restrizione di C ad $\text{im} P_n$ (che è un s.spazio invariante per C).

Proviamo ora:

Teorema 76 *Sia C compatto. La proiezione P_n ha immagine di dimensione finita e quindi ogni elemento non nullo di $\sigma(C)$ è un autovettore il cui autospazio generalizzato ha dimensione finita.*

Dim. Notiamo che la funzione $1/z$ è olomorfa in Ω_n e quindi

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} (zI - C)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \left\{ (zI - C)^{-1} - \frac{1}{z} \right\} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} (zI - C)^{-1} \frac{C}{z} dz. \end{aligned}$$

L'ultimo integrale si approssima nella topologia di $\mathcal{L}(X)$, mediante le somme di Riemann

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_r (z_r I - C)^{-1} \frac{z_r - z_{r-1}}{z_r} \right\} C$$

(i punti z_r sono quelli di una partizione del sostegno di Γ_n). Per il Teorema 53, ciascuno degli operatori P_n è compatto e quindi anche P lo è, si ricordi il teorema 51.

Dunque, la palla di $\text{im } P$ è compatta e quindi, per il Teorema ??, in P ha dimensione finita. ■

Infine, per completezza, proviamo:

Lemma 77 *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti di un operatore lineare A e sia x_k un autovettore di λ_k . Gli autovettori x_k sono linearmente indipendenti.*

Dim. Ricordiamo che gli autovettori, per definizione, sono non nulli. Dunque, in particolare $x_1 \neq 0$ così che l'insieme $\{x_1\}$ è linearmente indipendente e, se gli autovettori non sono linearmente indipendenti, esiste un primo n_0 per cui

$$x_{n_0+1} = \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i x_i.$$

Applicando l'operatore A ai due membri dell'uguaglianza si trova

$$\lambda_{n_0+1} x_{n_0+1} = \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i \lambda_i x_i.$$

Moltiplicando i due membri della prima uguaglianza per λ_{n_0+1} e sottraendo la seconda, si trova

$$\sum_{i=1}^{n_0} [\lambda_{n_0+1} - \lambda_i] \alpha_i x_i = 0.$$

Ciò mostra che x_{n_0+1} non è il primo degli autovettori linearmente dipendente dai precedenti. Ciò contraddice la scelta di n_0 e prova l'asserto. ■

Osservazione 78 Si noti che l'asserto precedente vale per ogni operatore lineare A , anche non compatto ed anche non continuo. ■

Il caso degli operatori compatti autoaggiunti

Premettiamo due osservazioni:

Lemma 79 *Sia $A \in \mathcal{L}(K)$ e sia X un s.spazio invariante per A : sia cioè $AX \subseteq X$. Allora, X^\perp è invariante per A^* .*

Dim. Bisogna provare che $A^* X^\perp \subseteq X^\perp$. Sia per questo $h \in X^\perp$ e sia $x \in X$. Si ha:

$$\langle x, A^* h \rangle = \langle Ax, h \rangle = 0.$$

Ciò vale per ogni $x \in X$ e quindi $A^* h \in X^\perp$. ■

Lemma 80 *Sia $A \in \mathcal{L}(K)$ e sia X_0 invariante per A : $AX_0 \subseteq X_0$. Sia $X = \text{cl } X_0$. Il s.spazio chiuso X è invariante per A .*

Dim. Sia infatti $x \in H$,

$$x = \lim x_n, \quad x_n \in X_0.$$

Vale:

$$Ax = \lim Ax_n \in X$$

perché $Ax_n \in X_0$ per ogni n e $X = \text{cl } X_0$. ■

Gli operatori compatti autoaggiunti godono della proprietà seguente:

Teorema 81 *Sia $C \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto e autoaggiunto. Almeno uno dei due numeri $\|C\|$ oppure $-\|C\|$ appartiene a $\sigma(C)$.*

Proveremo in seguito questo teorema. Per ora illustriamone le conseguenze.

Una prima conseguenza è che il raggio spettrale di un operatore compatto autoaggiunto è uguale a $\|C\|$. In generale invece il raggio spettrale di un generico operatore lineare A è minore della sua norma: $r(A) \leq \|A\|$. La disuguaglianza può essere stretta, anche se l'operatore è compatto (non autoaggiunto) come prova l'esempio della trasformazione da \mathbb{R}^2 in sé rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In questo caso lo spettro è $\{0\}$ mentre la norma dell'operatore è 1.

Notiamo ora che $\|C\| = 0$ se e solo se $C = 0$ e in questo caso $\sigma_p(C) \neq \emptyset$. Se $C \neq 0$,

$$\{+\|C\|, -\|C\|\} \cap \sigma(C) = \{+\|C\|, -\|C\|\} \cap \sigma_p(C).$$

Corollario 82 *Se $C \in \mathcal{L}(H)$ è compatto autoaggiunto allora $\sigma_p(C) \neq \emptyset$.*

Da ora in poi, assumiamo esplicitamente $C \neq 0$. Il corollario precedente mostra che esistono autovalori non nulli dell'operatore C . Indichiamo con X_0 lo spazio lineare generato dagli autovettori di C relativi ad autovalori non nulli. Questo è un s.spazio di H invariante per C :

$$CX_0 \subseteq X_0.$$

Sia $X = \text{cl } X_0$ così che X stesso è invariante per C .

Lemma 83 *Siano X_0 ed X gli spazi appena definiti. E': $X = \text{cl } X_0 = [\ker C]^\perp$.*

Dim. Sia per assurdo $X \neq [\ker C]^\perp$ e quindi $X^\perp \neq \ker C$. Essendo X invariante per C , allora X^\perp è invariante per C^* ed essendo $C = C^*$, X^\perp è anch'esso invariante per C . La restrizione di C ad X^\perp è essa stessa un operatore autoaggiunto e quindi ammette un autovalore, per il Corollario 82 e se $X^\perp \neq \ker C$ allora l'autovalore è non nullo. Il corrispondente autovettore è autovettore anche di C . Ciò contrasta con la definizione di X che, per costruzione, contiene tutti gli autovettori di C relativi ad autovalori non nulli. La contraddizione trovata prova il teorema. ■

Per costruzione, l'insieme degli autovettori (normalizzati) di C che corrispondono ad autovalori non nulli genera X_0 ed è quindi un sistema ortonormale massimale in X . Mostriamo:

Teorema 84 *Sia C compatto autoaggiunto. Si possono scegliere gli autovettori di C , di autovalore non nullo, in modo da avere un sistema ortonormale massimale di $X = [\ker C]^\perp$.*

Dim. Basta provare che gli autovettori si possono scegliere due a due ortogonali. Si è già visto al Teorema 45 che l'ortogonalità è automatica per autovettori che corrispondono ad autovalori diversi. Sia ora $\lambda_0 \neq 0$ un autovettore di molteplicità maggiore di 1 e sia N_0 il relativo autospazio. Essendo C compatto, la dimensione di N_0 è finita e quindi N_0 ammette una base ortonormale di autovettori. ■

Osservazione 85 Supponiamo che $X \neq H$, ossia che $0 \in \sigma_p(C)$. Sia F la famiglia ortonormale degli autovettori costruita sopra, e sia F_0 una famiglia linearmente indipendente di autovettori tutti con autovalore 0. Si sa che F è una famiglia numerabile mentre F_0 potrebbe anche essere non numerabile. ■

In conclusione, ogni $h \in H$ può rappresentarsi come

$$h = h_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \langle h, e_i \rangle e_i$$

con

$$Ce_i = \lambda_i e_i, \quad \lambda_i \neq 0, \quad Ch_0 = 0.$$

Dunque, per ogni $h \in H$ si ha anche

$$Ch = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \langle h, e_i \rangle e_i.$$

Questa è la forma diagonale cercata dell'operatore C .

Passiamo ora a provare il Teorema 81. La dimostrazione richiede diversi passi. Proviamo prima di tutto due lemmi che valgono per operatori autoaggiunti, anche non compatti.

Lemma 86 *Siano x ed y in H e sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Si ha:*

$$4\Re \langle Ax, y \rangle = \langle A(x+y), (x+y) \rangle - \langle A(x-y), (x-y) \rangle.$$

Dim. Usando $A = A^*$, calcoliamo:

$$\begin{aligned} \langle A(x+y), (x+y) \rangle &= \langle Ax, x \rangle + \langle Ay, y \rangle + \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle \\ &= \langle Ax, x \rangle + \langle Ay, y \rangle + \langle Ax, y \rangle + \langle y, Ax \rangle \\ &= \langle Ax, x \rangle + \langle Ay, y \rangle + 2\Re \langle Ax, y \rangle. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Analogamente si vede che

$$\langle A(x - y), (x - y) \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle Ay, y \rangle - 2\Re \langle Ax, y \rangle. \quad (1.29)$$

L'asserto segue sottraendo la (1.29) da (1.28). ■

Proviamo ora:

Lemma 87 *Sia A un operatore lineare continuo ed autoaggiunto. Vale:*

$$\|A\| = \sup \{ |\langle h, Ah \rangle|, \|h\| = 1 \}.$$

Dim. Sia

$$\alpha = \sup \{ |\langle h, Ah \rangle|, \|h\| = 1 \}.$$

Per ogni operatore lineare A vale $\alpha \leq \|A\|$. Si deve provare che se A è autoaggiunto, allora la disuguaglianza non può essere stretta; ossia, si deve provare che se A è autoaggiunto, allora

$$\|A\| \leq \alpha.$$

Ricordiamo, come conseguenza del Teorema di Riesz e del Teorema ?? che

$$\|A\| = \sup \{ \langle Ah, k \rangle, \|h\| = 1, \|k\| = 1 \}.$$

D'altra parte, per il Lemma 86 e per l'identità del parallelogramma, essendo $\|h\| = 1$, $\|k\| = 1$,

$$\begin{aligned} 4\Re \langle Ah, k \rangle &\leq |\langle A(h+k), (h+k) \rangle| + |\langle A(h-k), (h-k) \rangle| \\ &\leq \alpha \{ \|h+k\|^2 + \|h-k\|^2 \} = 2\alpha \{ \|h\|^2 + \|k\|^2 \} = 4\alpha \end{aligned}$$

ossia

$$\Re \langle Ah, k \rangle \leq \alpha.$$

In generale, $\langle Ah, k \rangle$ è un numero complesso,

$$\langle Ah, k \rangle = e^{i\theta} |\langle Ah, k \rangle|.$$

Sostituendo h con $z = e^{-i\theta} h$ si trova

$$|\langle Ah, k \rangle| \leq \alpha.$$

Questo calcolo può venir ripetuto per ogni h, k di norma 1, come volevamo provare. ■

Osservazione 88 Come si è detto, per ogni operatore lineare A vale

$$\|A\| = \sup \langle Ah, k \rangle. \quad (1.30)$$

L'estremo superiore si calcola al variare di h e di k in modo indipendente nella palla di raggio 1. Se A è autoaggiunto vale di più:

$$\|A\| = \sup_{\|h\|=1} |\langle Ah, h \rangle| .$$

Si noti la presenza del modulo in quest'ultima uguaglianza.

E' indifferente mettere o meno il modulo nella (1.30). ■

Torniamo ora a considerare un operatore compatto autoaggiunto C e **proviamo il Teorema 81.**

Come si è notato, si può assumere $C \neq 0$.

Sappiamo già che lo spettro dell'operatore C è reale, perché C è autoaggiunto; e quindi

$$\sigma(C) \subseteq [-\|C\|, \|C\|] .$$

Bisogna provare che uno almeno degli estremi di quest'intervallo appartiene allo spettro.

Si è provato nel Lemma 87 che

$$\|C\| = \sup \{ |\langle h, Ch \rangle|, \|h\| = 1 \} .$$

Esiste quindi una successione (h_n) , con $\|h_n\| = 1$, tale che

$$\lim \langle Ch_n, h_n \rangle = \alpha \quad \text{dove } \alpha = \|C\| \text{ oppure } \alpha = -\|C\| .$$

Si noti che $\alpha \neq 0$ perché si suppone $C \neq 0$.

Proviamo prima di tutto che

$$\lim [Ch_n - \alpha h_n] = 0 . \tag{1.31}$$

Calcoliamo per questo

$$\|Ch_n - \alpha h_n\|^2 = \|Ch_n\|^2 - 2\alpha \langle Ch_n, h_n \rangle + \alpha^2 .$$

In questo calcolo si sono utilizzate le ipotesi che C è autoaggiunto, che α è reale e che $\|h_n\| = 1$.

Si sa che $\lim \langle Ch_n, h_n \rangle = \alpha$ così che

$$\lim \left[-2\alpha \langle Ch_n, h_n \rangle + \alpha^2 \right] = -\alpha^2 .$$

Consideriamo ora la successione $(\|Ch_n\|^2)$. Vale

$$\|Ch_n\|^2 \leq \alpha^2 ,$$

e quindi

$$0 \leq \limsup \|Ch_n - \alpha h_n\|^2 = \limsup \left\{ \|Ch_n\|^2 - 2\alpha \langle Ch_n, h_n \rangle + \alpha^2 \right\} \leq 0 .$$

Ciò prova (1.31).

La dimostrazione del Teorema 81 si completa come segue: essendo C compatto ed (h_n) limitata, esiste una s.successione (Ch_{n_r}) di (Ch_n) , convergente in norma,

$$\lim Ch_{n_r} = k. \quad (1.32)$$

Usiamo ora il fatto che $\alpha \neq 0$ e notiamo che

$$h_{n_r} = \frac{1}{\alpha} \{Ch_{n_r} - [Ch_{n_r} - \alpha h_{n_r}]\}.$$

Si è visto che il termine in parentesi quadra tende a zero, mentre (Ch_{n_r}) tende a k . Dunque,

$$\lim h_{n_r} = \frac{1}{\alpha} k \quad \text{e quindi} \quad \lim Ch_{n_r} = C \left[\frac{1}{\alpha} k \right].$$

Di conseguenza, da (1.32),

$$C \left[\frac{1}{\alpha} k \right] = k \quad \text{ossia} \quad Ck = \alpha k.$$

Ciò prova che α è un'autovalore di C . Ricordando che α è $\|C\|$ oppure $-\|C\|$, si vede che l'asserto è provato. ■

Capitolo 2

La trasformata di Fourier

2.1 La trasformata di Fourier di funzioni

Sia $f(x)$ una funzione definita su \mathbb{R} , a valori reali o complessi. La sua *trasformata di Fourier* è la funzione della variabile reale ω

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (2.1)$$

Noi ci limiteremo a studiare la trasformata di Fourier di funzioni definite su \mathbb{R} ; è però importante sapere che se $f(x)$ è definita su \mathbb{R}^n allora la sua trasformata di Fourier è

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Talvolta indicheremo la trasformata di Fourier di f col simbolo $\mathcal{F}(f)$.

Si noti che \hat{f} denota sia la trasformata di Fourier che la trasformata di Laplace di f . Il contesto chiarisce il significato del simbolo; si noti però che se $f(x) = 0$ per $x < 0$ e se la sua trasformata di Laplace esiste per $\Re \lambda > -\epsilon$, $\epsilon > 0$, allora vale

$$\mathcal{L}(f)(i\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \mathcal{F}(f)(\omega).$$

Però, in generale, la trasformata di Fourier non ammette estensione al piano complesso.

Prima di studiare la trasformata di Fourier, è necessario dire per quale classe di funzioni essa è definita. E' immediato notare che la definizione di trasformata di Fourier ha senso se f è integrabile (nel senso di Lebesgue) su \mathbb{R} e anzi per ogni ω vale

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Dunque, la trasformazione

$$f \rightarrow \hat{f}(\omega)$$

è continua da $L^1(\mathbb{R})$ in \mathbb{C} , per ogni ω fissato. Vale anche di più:

Teorema 89 Sia (f_n) una successione in $L^1(\mathbb{R})$, convergente a f_0 nella norma di $L^1(\mathbb{R})$. Allora,

$$\lim \hat{f}_n(\omega) = \hat{f}_0(\omega),$$

uniformemente su \mathbb{R} .

L'immediata dimostrazione si omette.

In realtà lo spazio $L^1(\mathbb{R})$ è troppo piccolo per la maggior parte delle applicazioni nelle quali la trasformata di Fourier interviene. Però, come primo passo, limitiamoci a studiare le proprietà della trasformata di Fourier di funzioni integrabili.

Vale:

Teorema 90 Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora la sua trasformata di Fourier è uniformemente continua su \mathbb{R} .

Dim. E':

$$\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i\omega t} - e^{i\omega' t}] f(t) dt.$$

Si impone prima di tutto la condizione $|\omega - \omega'| < 1$. Si fissa quindi $\epsilon > 0$ e T_ϵ tale che

$$\int_{|t| > T_\epsilon} |f(t)| dt < \epsilon/4.$$

Allora,

$$\begin{aligned} |f(\omega) - f(\omega')| &= \left| \int_{-\infty}^{-T_\epsilon} [e^{i\omega t} - e^{i\omega' t}] f(t) dt \right| \\ &+ \left| \int_{-T_\epsilon}^{T_\epsilon} [e^{i\omega t} - e^{i\omega' t}] f(t) dt \right| + \left| \int_{T_\epsilon}^{+\infty} [e^{i\omega t} - e^{i\omega' t}] f(t) dt \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \int_{-T_\epsilon}^{T_\epsilon} |e^{-i\omega t} - e^{-i\omega' t}| |f(t)| dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \max_{t \in [-T_\epsilon, T_\epsilon]} |e^{-i\omega t} - e^{-i\omega' t}| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

La funzione $s \rightarrow e^s$ è uniformemente continua sui compatti e quindi esiste $\sigma = \sigma_\epsilon > 0$ tale che se

$$|\omega t - \omega' t| \leq |\omega - \omega'| T_\epsilon < \sigma_\epsilon, \quad \text{ossia se} \quad |\omega - \omega'| < \sigma_\epsilon / T_\epsilon,$$

allora

$$|e^{i\omega t} - e^{i\omega' t}| < \frac{\epsilon}{[2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt]}.$$

Dunque, per $|\omega - \omega'| < \sigma_\epsilon / T_\epsilon$ vale

$$|\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega')| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

2.2 Le proprietà della trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier è ovviamente lineare,

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

e inoltre valgono le proprietà seguenti, di immediata dimostrazione:

$$\text{se } g(t) = f(t - h) \text{ allora } \hat{g}(\omega) = e^{-i\omega h} \hat{f}(\omega),$$

$$\text{se } a \neq 0 \text{ e } g(t) = f(at) \text{ allora } \hat{g}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

Si confrontino con le corrispondenti proprietà della trasformata di Laplace.

Ricordiamo ora, dal paragrafo (??) che se f e g sono integrabili su \mathbb{R} allora la convoluzione

$$h = f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - s)g(s) ds$$

esiste in $L^1(\mathbb{R})$ (non è detto che debba esistere puntualmente). Vale inoltre

$$\|h\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Dunque, \hat{h} esiste e, per il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - s)g(s) ds dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t - s) dt g(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(s+r)} f(r) dr g(s) ds = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

Osservazione 91 La formula precedente è importantissima per le applicazioni. Si osservi che la sua dimostrazione dipende dal fatto che la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni e dal fatto che $t \rightarrow e^t$ è un omomorfismo del gruppo additivo \mathbb{R} nel gruppo moltiplicativo dei reali positivi. ■

2.2.1 Il teorema di Riemann-Lebesgue

Vogliamo ora studiare

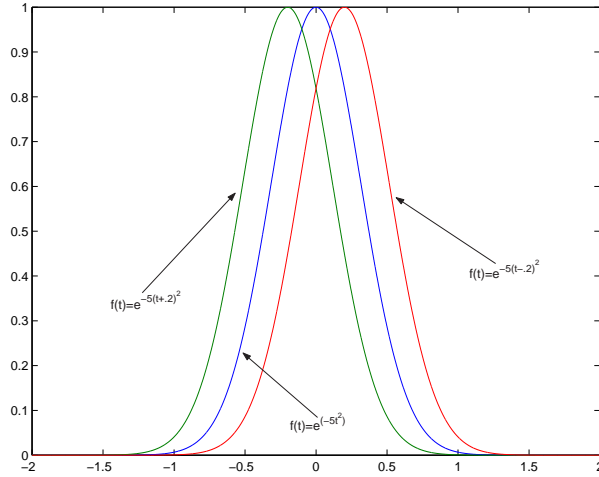
$$\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\omega)$$

quando f è integrabile. Consideriamo prima di tutto gli operatori di traslazione su $L^1(\mathbb{R})$. Se τ è fissato, con S_τ indichiamo l'operatore da $L^1(\mathbb{R})$ in sé definito da

$$(S_\tau f)(t) = f(t - \tau)$$

Ovviamente:

Figura 2.1:



Teorema 92 Sia τ fissato. L'operatore S_τ da $L^1(\mathbb{R})$ in sé è lineare e continuo.

Studiando invece la dipendenza di S_τ da τ si trova che vale il teorema seguente, di difficile dimostrazione:

Teorema 93 (di Lebesgue) Si fissi $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si consideri la funzione $\tau \rightarrow S_\tau f$ da \mathbb{R} in $L^1(\mathbb{R})$. Questa funzione è continua.

Usando il teorema 93 si prova:

Teorema 94 (di Riemann-Lebesgue) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Vale:

$$\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

Dim. Per definizione,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (2.2)$$

Si faccia la sostituzione $t = \tau + \frac{\pi}{\omega}$ e si noti che

$$e^{-i\omega(\tau + \pi/\omega)} = e^{-i\omega\tau} e^{-i\pi} = -e^{-i\omega\tau}.$$

Si trova:

$$\hat{f}(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau + \pi/\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (2.3)$$

Sommando (2.3) e (2.2) si trova

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\tau) - f(\tau + \pi/\omega)] e^{-i\omega\tau} d\tau$$

così che

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau) - f(\tau + \pi/\omega)| d\tau.$$

Essendo $f \in L^1(\mathbb{R})$, il membro destro tende a zero per $|\omega| \rightarrow +\infty$, dal teorema 93. ■

Osserviamo ora:

Teorema 95 *Sia f una funzione derivabile su \mathbb{R} e siano integrabili sia f che la sua derivata f' . Allora vale:*

$$(\mathcal{F}f')(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

Dim. L'uguaglianza

$$f(T) = f(0) + \int_0^T f'(s) ds$$

e l'integrabilità di f e di f' mostrano

$$\lim_{|T| \rightarrow +\infty} f(T) = 0.$$

Scriviamo ora

$$\int_{-T}^{+T} e^{-i\omega t} f'(t) dt = e^{-i\omega T} f(T) - e^{i\omega T} f(-T) + i\omega \int_{-T}^{+T} e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

L'asserto segue passando al limite per $|T| \rightarrow +\infty$. ■

Nelle ipotesi del teorema 95, applicando il teorema di Riemann–Lebesgue ad f' , si trova

$$\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \omega \hat{f}(\omega) = 0$$

e in generale se esistono e sono integrabili $f, f', \dots, f^{(k)}$, allora

$$\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \omega^k \hat{f}(\omega) = 0 : \quad (2.4)$$

la regolarità di f si riflette sul comportamento asintotico di \hat{f} . D'altra parte:

Teorema 96 *Se $f(t)$ e $tf(t)$ sono ambedue integrabili, allora $\hat{f}(\omega)$ è derivabile, con derivata*

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} [-itf(t)] dt.$$

Dim. L'integrabilità di $tf(t)$ permette di giustificare lo scambio della derivata rispetto ad ω con l'integrale. ■

Analogamente si vede che se f è continua e $t^k f(t)$ è integrabile allora $\hat{f}(\omega)$ è k volte derivabile. Dunque, il comportamento asintotico di $f(t)$ si riflette sulla regolarità di $\hat{f}(\omega)$.

E' importante ricordare queste proprietà, che sono la chiave per l'estensione della definizione della trasformata di Fourier.

2.3 L'antitrasformata di Fourier

Vogliamo ora capire sotto quali condizioni la conoscenza di \hat{f} permette di ricostruire f . Consideriamo prima di tutto il caso particolare

$$h(t) = e^{-|t|}.$$

In questo caso, \hat{h} si calcola facilmente usando la definizione della trasformata di Fourier,

$$\hat{h}(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

e quindi \hat{h} è integrabile.

Si noti che, se $t > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{2}{1 + \omega^2} d\omega = 2\pi i \operatorname{Res} \left[e^{izt} \frac{2}{1 + z^2}, i \right] = 2\pi e^{-t}$$

mentre se $t < 0$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{2}{1 + \omega^2} d\omega = 2\pi i \operatorname{Res} \left[e^{izt} \frac{2}{1 + z^2}, -i \right] = 2\pi e^t.$$

Dunque, in quest'esempio particolare, nota \hat{h} , la funzione h si ritrova calcolando

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{h}(\omega) d\omega.$$

Questa relazione tra h ed \hat{h} vale molto più in generale; ma non può valere per la generica funzione integrabile perché generalmente la sua trasformata **non** è integrabile.

Esempio 97 La funzione caratteristica dell'intervallo $[-T, T]$,

$$\chi_{[-T, T]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è integrabile. La sua trasformata di Fourier si calcola immediatamente ed è

$$\hat{f}(\omega) = 2 \frac{\sin \omega T}{\omega}.$$

Questa funzione non è integrabile secondo Lebesgue, perché si sa che non è assolutamente integrabile. ■

Limitiamoci dunque a provare un teorema, sotto ipotesi assai più restrittive del necessario, ma sufficiente per il seguito.

Notiamo prima di tutto che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+\omega^2} d\omega = 1$$

e quindi, come si è visto al paragrafo ??, da essa si può costruire l'identità approssimata (h_ν),

$$h_\nu(\omega) = \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{2}{1+(\omega/\nu)^2} \right].$$

Vale quindi

$$f(t) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) \frac{1}{\nu} \frac{2}{1+(s/\nu)^2} ds. \quad (2.5)$$

Inoltre, ciascuna delle funzioni h_ν è una trasformata di Fourier,

$$h_\nu(\omega) = \mathcal{F}(e^{-|\nu t|}). \quad (2.6)$$

Fatte queste premesse, possiamo provare:

Teorema 98 *Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ e siano f, f', f'' in $L^1(\mathbb{R})$. Allora vale*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (2.7)$$

Dim. Si è già notato che, nelle ipotesi del teorema,

$$\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \omega^2 \hat{f}(\omega) = 0$$

(si veda (2.4)) e quindi la funzione continua \hat{f} è integrabile su \mathbb{R} . Ciò mostra che l'integrale in (2.7) ha senso. Inoltre, l'integrabilità di f' mostra che f è limitata.

Consideriamo l'uguaglianza (2.5). Usando (2.6), questa si scrive

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\nu \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isr} e^{-\nu|r|} dr \right] ds.$$

La funzione $(s, t) \rightarrow f(t-s)e^{-isr}e^{-\nu|r|}$ è integrabile su \mathbb{R}^2 e quindi si può usare il teorema di Fubini per scambiare l'ordine di integrazione ottenendo

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) e^{-isr} ds \right] e^{-\nu|r|} dr \\ &= \lim_{\nu \rightarrow 0+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i(t-\xi)r} d\xi \right] e^{-\nu|r|} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itr} \hat{f}(-r) dr = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\omega} \hat{f}(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Lo scambio del segno di limite col segno di integrale è lecito perché

$$\left| \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\xi r} d\xi \right] e^{-it} e^{-\nu|t|} \right| \leq |\hat{f}(t)|$$

e, nelle ipotesi del teorema, \hat{f} è integrabile.

Ciò completa la dimostrazione. ■

La formula (2.7) si chiama la formula dell'*antitrasformata di Fourier*. Ripetiamo che essa vale sotto condizioni assai più generali di quelle assunte nel teorema 98. Per esempio, si è visto che essa vale per la funzione $e^{-|t|}$ che non è derivabile su \mathbb{R} . Però l'enunciato del teorema 98 è sufficiente per il seguito.

Osservazione 99 Sia

$$f(x) = e^{-x^2/2}. \quad (2.8)$$

Si può provare che la sua trasformata di Fourier è

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2},$$

una funzione integrabile su \mathbb{R} e non negativa. Si ricordi infatti l'integrale di Laplace,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Si scriva quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x} dx &= e^{-\omega^2/2} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(x/\sqrt{2}) + i(\omega/\sqrt{2})]^2} d[(x/\sqrt{2}) + i(\omega/\sqrt{2})] \\ &= e^{-\omega^2/2} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}. \end{aligned}$$

Si vede immediatamente che (h_ν) ,

$$h_\nu(x) = \frac{1}{\nu} e^{-(x/\nu)^2/2}$$

è un'identità approssimata, la cui antitrasformata di Fourier è

$$e^{-(x\nu)^2/2}.$$

Il teorema 98 si può provare anche usando quest'identità approssimata.

Si noti che l'identità approssimata costruita a partire da (2.8) è quella che permette di provare il Teorema di Weierstrass, Teorema ??.

2.4 La trasformata di Fourier su $L^2(\mathbb{R})$

Abbiamo detto che intendiamo estendere la trasformata di Fourier ad un insieme assai più grande di $L^1(\mathbb{R})$. Come primo passo, estendiamola ad $L^2(\mathbb{R})$. Notiamo però che anche $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ è ancora troppo piccolo per le applicazioni nelle quali interviene la trasformata di Fourier.

Si indica col simbolo \mathcal{D} l'insieme delle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto in \mathbb{R} . Una proprietà che non abbiamo provato, ma che non è difficile mostrare, è che \mathcal{D} è denso sia in $L^1(\mathbb{R})$ che in $L^2(\mathbb{R})$. Inoltre, ogni $f \in \mathcal{D}$ verifica le condizioni del teorema 98 e quindi per essa vale la formula dell'antitrasformata.

Introduciamo la trasformazione lineare \mathcal{F} su \mathcal{D} , definita da

$$\mathcal{F}f = \hat{f}.$$

Consideriamo questa come trasformazione su $L^2(\mathbb{R})$, con dominio \mathcal{D} denso in $L^2(\mathbb{R})$.

Si è già notato che il teorema di Riemann–Lebesgue implica che, se $f \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \omega^2 \hat{f}(\omega) = 0$$

e quindi che $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Dunque, \mathcal{F} è una trasformazione da $L^2(\mathbb{R})$ in sé, con dominio denso.

Siano ora f e g elementi di \mathcal{D} . Vale:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\omega x} \hat{g}(\omega) d\omega dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x} dx \right] \hat{g}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(-\omega) \hat{g}(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Notando che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x} dx = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x)e^{-i\omega x} dx} = \overline{\mathcal{F}(\bar{f})(\omega)},$$

l'uguaglianza precedente conduce a:

Teorema 100 *Se f, g appartengono a \mathcal{D} allora vale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{F}(\bar{f})(\omega)} \hat{g}(\omega) d\omega.$$

In particolare,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x)g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \hat{g}(\omega) d\omega. \quad (2.9)$$

Ponendo $f = g$ in (2.12) si trova l'identità di Parseval

$$\|f\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

Ciò mostra che

Teorema 101 *La trasformazione \mathcal{F} , definita su \mathcal{D} , da $L^2(\mathbb{R})$ in sé è continua, con norma $1/\sqrt{2\pi}$, e quindi ammette estensione unica ad $L^2(\mathbb{R})$.*

Un calcolo analogo a quello visto sopra mostra che vale anche l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s)g(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\hat{g}(s) ds \quad (2.10)$$

che va sotto il nome di *identità di* Plancherel. Introducendo il simbolo $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$,

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle \quad (2.11)$$

per indicare

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t) dt = \langle x, \bar{y} \rangle,$$

la (2.10) si scrive

$$\langle\langle \hat{f}, g \rangle\rangle = \langle\langle f, \hat{g} \rangle\rangle. \quad (2.12)$$

Osservazione 102 Si noti che il funzionale $\langle\langle x, y \rangle\rangle$ è lineare sia in x , tenendo y costante, che in y , tenendo x costante. ■

Indichiamo momentaneamente con $\tilde{\mathcal{F}}$ l'estensione di \mathcal{F} ad $L^2(\mathbb{R})$ (è ovvio che in pratica si userà il medesimo simbolo per le due trasformazioni). Per la trasformazione $\tilde{\mathcal{F}}$ continuano a valere le identità di Parseval e di Plancherel.

Osservazione 103 Si noti che la trasformata di Fourier $\tilde{\mathcal{F}}$ è definita su $L^2(\mathbb{R})$ come estensione per continuità. In generale, l'integrale (2.1) non converge se la funzione è a quadrato integrabile. ■

Tutti gli argomenti precedenti possono ripetersi per la trasformazione \mathcal{G} da $\mathcal{D} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{G}\phi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\omega t} \phi(\omega) d\omega.$$

Anche \mathcal{G} si estende per continuità ad $L^2(\mathbb{R})$. Provvisoriamente, indichiamo con $\tilde{\mathcal{G}}$ tale estensione. Per essa vale

$$\tilde{\mathcal{F}}\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}\tilde{\mathcal{F}} = I,$$

ossia:

Teorema 104 *La trasformazione di Fourier è biunivoca su $L^2(\mathbb{R})$.*

Si noti che una proprietà analoga non vale su $L^1(\mathbb{R})$.

Ricapitolando, abbiamo esteso la trasformata e l'antitrasformata di Fourier ad $L^2(\mathbb{R})$ per continuità. Si sa, dal teorema 32 che l'estensione per continuità può anche costruirsi calcolando aggiunti:

$$\tilde{\mathcal{F}} = [\mathcal{F}^*]^* , \quad \tilde{\mathcal{G}} = [\mathcal{G}^*]^* ;$$

ossia, $\tilde{\mathcal{F}}f$ è definita da

$$\langle \tilde{\mathcal{F}}f, \bar{\phi} \rangle = \langle f, \mathcal{F}^* \bar{\phi} \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}. \quad (2.13)$$

Ciò suggerisce di interpretare

$$\hat{f} = \tilde{\mathcal{F}}f$$

come il funzionale su $L^2(\mathbb{R})$ definito da

$$\phi \rightarrow \langle f, \mathcal{F}^* \bar{\phi} \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}. \quad (2.14)$$

Osservazione 105 Si noti che $\phi \in \mathcal{D}$ se e solo se $\bar{\phi} \in \mathcal{D}$. Il segno di coniugio è stato introdotto soltanto per avere una trasformazione lineare in (2.14). ■

Questa è una diversa interpretazione della trasformata di Fourier, equivalente a quella ottenuta estendendo per continuità. Suggerisce però un modo per estendere la trasformata di Fourier ad uno spazio molto grande: prima si identifica uno spazio con una topologia molto debole, su cui la trasformata di Fourier è continua e biunivoca. Si usa quindi un metodo “di dualità” per estenderla al duale dello spazio. L'idea intuitiva è che se lo spazio ha una topologia “molto debole” il suo duale sarà “grande”.

Notiamo che

$$\mathcal{F}^* \phi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\omega t} \phi(\omega) d\omega .$$

Dunque, con la notazione (2.12), la (2.13) si scrive

$$\langle \tilde{\mathcal{F}}f, \phi \rangle = \langle \langle f, \mathcal{F}\phi \rangle \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D} .$$

Convorrà quindi usare, come punto di partenza per l'estensione della trasformata di Fourier, la formula di Plancherel (2.12). Va notato subito però che lo spazio \mathcal{D} è troppo piccolo. In particolare, la trasformata di Fourier di una $\phi \in \mathcal{D}$ non appartiene a \mathcal{D} . La definizione di questo spazio è stata introdotta soltanto perché esso è importante in numerose applicazioni e la definizione va conosciuta. Vedremo però al paragrafo successivo lo spazio \mathcal{S} , più grande di \mathcal{D} , ancora denso sia in $L^1(\mathbb{R})$ che in $L^2(\mathbb{R})$ e su cui la trasformata di Fourier è invertibile. Gli argomenti appena presentati valgono anche sostituendo ovunque \mathcal{D} con \mathcal{S} .

Concludiamo questa parte esaminando l'esempio seguente:

Esempio 106 Applichiamo l'identità di Parseval alla funzione $\chi_{[-1,1]}$, studiata all'esempio 97. La sua trasformata di Fourier

$$2 \frac{\sin \omega}{\omega}$$

è in $L^2(\mathbb{R})$, come si verifica immediatamente, e come deve essere perché $\chi_{[-1,1]}$ è a quadrato integrabile. Dunque,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[2 \frac{\sin \omega}{\omega} \right]^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [\chi_{[-1,1]}(x)]^2 dx = 4\pi.$$

Si trova quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin \omega}{\omega} \right]^2 d\omega = \pi. \quad \blacksquare$$

2.5 Lo spazio \mathcal{S} e il suo duale

L'idea per la scelta dello spazio \mathcal{S} su cui definire la trasformata di Fourier è fornita dal teorema di Riemann-Lebesgue, e dalle sue conseguenze: la regolarità di f si trasferisce nel comportamento asintotico di \hat{f} ; il comportamento asintotico di f si trasferisce nella regolarità di \hat{f} , e viceversa. Ciò suggerisce di introdurre lo spazio \mathcal{S} i cui elementi sono le funzioni $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tali che:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^k \phi^{(n)}(x) = 0 \quad \forall k, n. \quad (2.15)$$

E' chiaro che \mathcal{S} è un sottoinsieme sia di $L^1(\mathbb{R})$ che di $L^2(\mathbb{R})$ e che per gli elementi di \mathcal{S} valgono sia la formula della trasformata che dell'antitrasformata di Fourier:

$$\hat{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \phi(t) dt, \quad \phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{\phi}(\omega) d\omega.$$

Vogliamo mimare su \mathcal{S} la costruzione della trasformata ottenuta per dualità su $L^2(\mathbb{R})$. Per questo è necessario munire \mathcal{S} di una topologia la quale tenga conto della proprietà (2.15). E' un fatto che ciò non può farsi introducendo una norma in \mathcal{S} . D'altra parte, la definizione della topologia porterebbe via troppo tempo. Dunque limitiamoci a introdurre un concetto di convergenza di successioni in \mathcal{S} .

Per definizione,

$$\lim \phi_n(x) = 0$$

quando per ogni k intero non negativo e per ogni r intero non negativo si ha

$$\lim_n x^k \phi_n^{(r)}(x) = 0$$

uniformemente su \mathbb{R} .

Esplicitamente questo vuol dire che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\epsilon, k, r)$ tale che se $n > N(\epsilon, k, r)$ allora

$$|x^k \phi_n^{(r)}(x)| < \epsilon.$$

Si è scritta esplicitamente questa condizione per sottolineare che la convergenza NON è uniforme in k ed r .

Definiamo inoltre:

$$\lim \phi_n = \phi_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim[\phi_n - \phi_0] = 0.$$

Lo spazio lineare \mathcal{S} , dotato della definizione di convergenza appena introdotta, si chiama lo spazio delle *funzioni rapidamente decrescenti* su \mathbb{R} .

Sia ora A un funzionale su \mathcal{S} oppure una trasformazione da \mathcal{S} in sé. Diremo che A è continuo quando

$$\lim \phi_n = \phi_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim A\phi_n = A\phi_0.$$

Si prova immediatamente:

Teorema 107 *L'operazione di derivazione:*

$$\phi \rightarrow D\phi$$

è continua da \mathcal{S} in sé.

Con \mathcal{S}' indichiamo lo spazio lineare dei funzionali lineari e continui su \mathcal{S} , dotato della relazione di convergenza seguente

$$\lim l_n = l_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim l_n(\phi) = l_0(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Si confronti questa definizione di convergenza con la convergenza debole stella.

Gli elementi di \mathcal{S}' si chiamano *distribuzioni temperate*.

Come al solito, per indicare l'azione di $l \in \mathcal{S}'$ su $\phi \in \mathcal{S}$, invece di scrivere $l(\phi)$ scriveremo

$$\langle\langle l, \phi \rangle\rangle.$$

Mostriamo alcuni esempi di trasformazioni continue da \mathcal{S} in sé.

Esempio 108 le trasformazioni

$$\phi \rightarrow \phi + \psi, \quad \phi \rightarrow \alpha\phi$$

(con ψ fissata) sono continue e la seconda è anche lineare.

Più ancora, sia p un polinomio. La trasformazione lineare

$$\phi(x) \rightarrow p(x)\phi(x)$$

è continua.

Sono anche continue le trasformazioni seguenti:

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi(rx), & r \in \mathbb{R} \\ \phi(x) &\rightarrow \phi^{(k)}(x).\end{aligned}$$

Per ogni ω fissato, la trasformazione

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\omega x} \phi(x)$$

è continua. In generale, se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e se f e tutte le sue derivate sono limitate, la trasformazione lineare

$$\phi(x) \rightarrow f(x)\phi(x)$$

è continua. Per esempio, sono anche continue le trasformazioni

$$\phi \rightarrow e^{-x^2} \phi(x), \quad \phi \rightarrow \phi(x) \sin x. \quad \blacksquare$$

Mostriamo ora alcuni esempi di distribuzioni temperate.

Esempio 109 Sia l tale che

$$\langle\langle l, \phi \rangle\rangle = \phi(0).$$

E' immediato verificare che l è lineare e continuo, ossia che $l \in \mathcal{S}'$.

Questa distribuzione è particolarmente importante per le applicazioni ed ha un simbolo standard: si indica col simbolo δ ,

$$\langle\langle \delta, \phi \rangle\rangle = \phi(0)$$

e si chiama *delta di Dirac*.

E ancora immediato verificare la continuità di

$$\phi \rightarrow \sum_{k=0}^{\nu} a_k \phi^{(k)}(x_k). \quad \blacksquare$$

In seguito chiariremo le relazioni tra le due distribuzioni temperate introdotte nell'esempio precedente.

Consideriamo ora:

Esempio 110 Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$. E' una distribuzione temperata quella definita da

$$\phi \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\phi(s) ds.$$

Questo si verifica immediatamente usando il *teorema della convergenza* dominata, se $p = 1$. Se $p > 1$ si usa la disuguaglianza di Hölder per notare che

$$\frac{1}{x^2 + 1} f(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Si scrive quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\phi(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} [(1+x^2)\phi(x)] dx.$$

Sappiamo già che la trasformazione che a ϕ associa $(1+x^2)\phi(x)$ è continua. E quindi la trasformazione che stiamo studiando è continua, essendo composizione delle due trasformazioni lineari e continue

$$\phi \rightarrow (1+x^2)\phi(x), \quad \psi \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} \psi(x) dx. \quad \blacksquare$$

Le particolari distribuzioni introdotte nell'esempio 110 si chiamano *distribuzioni regolari*. Esse si indicano con un simbolo del tipo l_f o più spesso semplicemente f o $\int f\phi$. In analogia con questo simbolo, specialmente nei testi più applicativi, una distribuzione si indica col simbolo

$$\int l\phi$$

attribuendo al simbolo “ f ” il significato del simbolo “ $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ ”.

In pratica, non si distingue tra le funzioni e le distribuzioni regolari ad esse associate.

Esempio 111 Sia (h_n) un'identità approssimata. Per ogni $\phi \in \mathcal{S}$ si ha

$$\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t-s)\phi(s) ds = \phi(t),$$

si veda il paragrafo ???. Ciò vale in particolare per $t = 0$ e quindi

$$\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(-s)\phi(s) ds = \phi(0), \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Dunque, la successione di distribuzioni regolari definite da

$$\phi \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(-s)\phi(s) ds$$

converge in \mathcal{S}' alla δ di Dirac. Si dice più brevemente che “le identità approssimate approssimano la δ di Dirac”. \blacksquare

2.6 La trasformata di Fourier su \mathcal{S}'

Si è già detto che su \mathcal{S} la trasformata di Fourier è definita dall'integrale (2.1) e che su \mathcal{S} vale la formula dell'antitrasformata. Proviamo ora:

Teorema 112 *La trasformazione di Fourier \mathcal{F} trasforma \mathcal{S} in sé, è continua e biunivoca.*

Dim. Si è già notato che \mathcal{F} trasforma \mathcal{S} in sé.

La linearità è ovvia. Proviamo la continuità. Sia (ψ_n) una qualsiasi successione tendente a zero. Basta provare che la successione $(\mathcal{F}\psi_n)$ tende a zero. Fissiamo per questo k ed r e consideriamo

$$\begin{aligned} \omega^k \frac{d^r}{d\omega^r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \psi_n(x) dx &= \omega^k \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^r e^{-i\omega x} [x^r \psi_n(x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^r (i)^k \left[\frac{d^k}{dx^k} e^{-i\omega x} \right] [x^r \psi_n(x)] dx. \end{aligned}$$

Integriamo per parti tenendo conto che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [x^r \psi_n(x)] = 0.$$

Si trova:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{r+k} (i)^k e^{-i\omega x} \left[\frac{d^k}{dx^k} x^r \psi_n(x) \right] dx \\ &= (-1)^{r+k} (i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{1+x^2} \left[(1+x^2) \frac{d^k}{dx^k} x^r \psi_n(x) \right] dx \end{aligned}$$

Sia ora $\epsilon > 0$. Esiste $N(\epsilon, k, r)$ tale che

$$n > N(\epsilon, k, r) \implies \left| (1+x^2) \frac{d^k}{dx^k} x^r \psi_n(x) \right| < \epsilon$$

così che, per tali indici n si ha anche

$$\left| \omega^k \frac{d^r}{d\omega^r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \psi_n(x) dx \right| \leq \pi \epsilon.$$

Questo prova la continuità di \mathcal{F} .

La trasformazione \mathcal{F} è suriettiva perché ammette l'inversa. ■

Possiamo ora estendere la trasformata di Fourier ad \mathcal{S}' .

Si ricordi che se $f \in L^2(\mathbb{R})$ la sua trasformata di Fourier può definirsi usando la formula (2.13) e che questa può interpretarsi dicendo che \hat{f} è quel funzionale lineare e continuo che a ϕ associa $\langle\langle f, \hat{\phi} \rangle\rangle$.

Traendo ispirazione da questa definizione, definiamo la *trasformata di Fourier di distribuzioni temperate* come segue: Sia $l \in \mathcal{S}'$. La sua trasformata di Fourier \hat{l} è il funzionale lineare

$$\phi \rightarrow \langle\langle l, \hat{\phi} \rangle\rangle.$$

E' immediato verificare¹ che $\hat{l} \in \mathcal{S}'$, e quindi che l'uguaglianza

$$\langle\langle \hat{l}, \phi \rangle\rangle = \langle\langle l, \hat{\phi} \rangle\rangle$$

¹si veda la dimostrazione del Teorema 113.

è ora la definizione stessa della trasformata di Fourier.

Così come si estende ad \mathcal{S}' la trasformazione \mathcal{F} , si estende anche l'antitrasformata \mathcal{G} :

$$\mathcal{G} : \quad \langle\langle \mathcal{G}l, \phi \rangle\rangle = \langle\langle l, \mathcal{G}\phi \rangle\rangle$$

e la relazione

$$\langle \mathcal{F}[\mathcal{G}l], \phi \rangle = \langle\langle l, \mathcal{G}[\mathcal{F}\phi] \rangle\rangle = \langle\langle l, \phi \rangle\rangle$$

mostra che l'estensione di \mathcal{G} è inversa destra di \mathcal{F} . Procedendo in modo analogo si vede che è anche inversa sinistra, e quindi che è l'antitrasformata di Fourier.

La trasformata di Fourier di l si indica \hat{l} .

Ricapitolando:

Teorema 113 *La trasformazione di Fourier è continua e biunivoca da \mathcal{S}' in sé.*

Dim. La continuità è ovvia: sia

$$\lim l_n = l_0$$

ossia

$$\lim \langle\langle l_n, \phi \rangle\rangle = \langle\langle l_0, \phi \rangle\rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Ogni $\hat{\phi}$ è in \mathcal{S} e quindi la precedente si scrive, scegliendo per ϕ la $\hat{\phi}$:

$$\lim \langle\langle l_n, \hat{\phi} \rangle\rangle = \langle\langle l_0, \hat{\phi} \rangle\rangle \quad \text{ossia} \quad \lim \langle\langle \hat{l}_n, \phi \rangle\rangle = \langle\langle \hat{l}_0, \phi \rangle\rangle.$$

Ciò vuol dire

$$\lim \hat{l}_n = \hat{l}_0.$$

La biunivocità della trasformata si ottiene perché, come si è già notato, anche l'antitrasformata si estende per dualità ad \mathcal{S}' . ■

Convieni ora vedere il calcolo di alcune trasformate.

Esempio 114 Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed l_f la distribuzione regolare

$$\langle\langle l_f, \phi \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x) dx.$$

La trasformata di Fourier di l_f è la distribuzione

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \langle\langle l_f, \hat{\phi} \rangle\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \phi(x) dx d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(\omega) d\omega \right] \phi(x) dx = \langle\langle l_{\hat{f}}, \phi \rangle\rangle : \end{aligned}$$

la trasformata di Fourier della distribuzione regolare identificata dalla funzione f è la distribuzione regolare identificata dalla funzione \hat{f} . ■

In particolare,

Esempio 115 Sia

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < T \\ 0 & \text{se } |t| > T. \end{cases}$$

Allora, come si è visto all'esempio 97,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sin \omega T}{\omega}.$$

La funzione \hat{f} non appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$; è però limitata e quindi identifica una distribuzione regolare $l_{\hat{f}}$.

Ad \hat{f} come funzione la formula dell'antitrasformata che abbiamo provato al paragrafo 2.3 non può applicarsi. Invece, ad essa può applicarsi la formula dell'antitrasformata nel senso che abbiamo introdotto in \mathcal{S}' . ■

Esempio 116 Consideriamo ora la funzione $f(t) = e^{i\alpha t}$, che non è né integrabile né a quadrato integrabile, e quindi non ha trasformata di Fourier nel senso che abbiamo introdotto per le funzioni. Nel senso delle distribuzioni, la sua trasformata di Fourier è

$$\phi \rightarrow \langle l_f, \hat{\phi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} \hat{\phi}(x) dx = 2\pi\phi(\alpha).$$

Indicando con δ_α la distribuzione

$$\langle \delta_\alpha, \phi \rangle = \phi(\alpha),$$

si vede che

$$\mathcal{F}(e^{i\alpha x}) = 2\pi\delta_\alpha.$$

Usando le formule di Eulero,

$$\mathcal{F}(\sin \alpha x) = -i\pi\{\delta_\alpha - \delta_{-\alpha}\}, \quad \mathcal{F}(\cos \alpha x) = \pi\{\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}\}. \quad \blacksquare$$

Quest'esempio mostra che la trasformata di una distribuzione regolare può non essere una distribuzione regolare.

Veniamo ora al calcolo della trasformata di Fourier di distribuzioni che non sono regolari.

Esempio 117 La trasformata $\hat{\delta}$ della delta di Dirac è la distribuzione

$$\phi \rightarrow \langle \delta, \hat{\phi} \rangle = \hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(s) ds.$$

E' quindi la distribuzione regolare identificata dalla funzione identicamente 1. Diremo, più semplicemente, che è la funzione 1:

$$\hat{\delta} = 1;$$

Viceversa, sia $f(x) \equiv 1$. Dalla formula dell'antitrasformata si vede immediatamente che la sua trasformata è la distribuzione $2\pi\delta$.

Indichiamo provvisoriamente con λ la distribuzione

$$\phi \rightarrow \langle\langle \lambda, \phi \rangle\rangle = \phi'(0)$$

(vedremo più avanti un simbolo “migliore” per identificare questa distribuzione). La sua trasformata di Fourier è

$$\phi \rightarrow \langle\langle \lambda, \hat{\phi} \rangle\rangle = \hat{\phi}'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} ix\phi(x) dx :$$

la sua trasformata è ix . Si noti:

$$\mathcal{F}(\lambda) = ix\mathcal{F}(\delta) . \blacksquare$$

Quest'esempio mostra che la trasformata di una distribuzione che non è regolare può essere una distribuzione regolare.

2.6.1 Le operazioni sulle distribuzioni

Si sa già che \mathcal{S}' è uno spazio lineare, ossia che in \mathcal{S}' è definito il prodotto per scalari e la somma; e in \mathcal{S}' si è definita la trasformata di Fourier, con un metodo di dualità. Ancora con un metodo di dualità si definiscono altre operazioni, a partire dalle corrispondenti operazioni su \mathcal{S} . Sia $h \in \mathbb{R}$ e T_h la traslazione in \mathcal{S} ,

$$(T_h\phi)(x) = \phi(x - h)$$

(se $h > 0$ questa si interpreta come traslazione verso destra). Ovviamente, T_h è continua su \mathcal{S} e quindi per ogni $l \in \mathcal{S}'$ si definisce

$$T_h^*l : \phi \rightarrow \langle\langle l, T_h\phi \rangle\rangle .$$

Se $h > 0$ questa si interpreta come traslazione (applicata ad l) verso sinistra.

Si esprima in modo esplicito l'effetto di T_h^* sulle distribuzioni regolari e si giustifichi la notazione più comunemente usata “ T_{-h} ” invece di “ T_h^* ”.

Esempio 118 Sia δ la delta di Dirac. Si ha:

$$\langle\langle T_h\delta, \phi \rangle\rangle = \langle\langle \delta, T_{-h}\phi \rangle\rangle = \phi(h) . \blacksquare$$

Sia ora $a \neq 0$ e sia

$$R_a : (R_a\phi)(x) = \phi(ax) .$$

Anche R_a è continua da \mathcal{S} in sé e quindi si può definire R_a^* ponendo

$$\langle\langle R_a^*l, \phi \rangle\rangle = \langle\langle l, R_a\phi \rangle\rangle .$$

Si verifica facilmente che se l_f è una distribuzione regolare allora

$$R_a(l_f) = l_{[\frac{1}{a}R_{1/a}f]}$$

e quindi, per una generica $l \in \mathcal{S}'$, si definisce

$$R_a l = \left[\frac{1}{a} R_{1/a} \right]^* l.$$

Si è notato che se $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ è limitata con tutte le sue derivate, o anche se g è un polinomio, allora $M_g: M_g \phi = g\phi$ è continua da \mathcal{S} in sé. Ciò permette di definire

$$\langle\langle M_g^* l, \phi \rangle\rangle = \langle\langle l, M_g \phi \rangle\rangle.$$

Si esamini l'azione di M_g^* sulle distribuzioni regolari e si spieghi perchè si scrive

$$M_g l$$

invece di $M_g^* l$.

Osservazione 119 La M_g è la “moltiplicazione” della distribuzione l per la funzione g . più comunemente, invece di scrivere $M_g l$ si scrive gl . ■

Introduciamo ora la derivata delle distribuzioni. Essendo continua la trasformazione D

$$\phi \rightarrow D\phi = \phi'$$

da \mathcal{S} in sé, definiremo

$$\langle\langle D^* l, \phi \rangle\rangle = \langle\langle l, D\phi \rangle\rangle.$$

Si esamini l'effetto di D^* sulle distribuzioni regolari e si chiarisca perché invece di “ D^* ” si usa il simbolo “ $-D$ ”:

$$\langle\langle Dl, \phi \rangle\rangle = -\langle\langle l, D\phi \rangle\rangle.$$

La derivata di distribuzioni si indica anche con l'apice:

$$Dl = l'.$$

Presentiamo alcuni calcoli di derivate.

Esempio 120 Si chiama *funzione di* Heaviside la funzione

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Questa funzione non è derivabile nel senso ordinario. E' però derivabile nel senso delle distribuzioni, ossia è derivabile la distribuzione regolare ad essa associata, e vale

$$\langle\langle Dl_u, \phi \rangle\rangle = -\langle\langle u, \phi' \rangle\rangle = -\int_0^{+\infty} \phi'(s) ds = \phi(0).$$

Dunque la sua derivata è la delta di Dirac e scriveremo brevemente

$$Du = \delta.$$

Calcoliamo ora la derivata della delta di Dirac:

$$\langle\langle D\delta, \phi \rangle\rangle = -\langle\langle \delta, D\phi \rangle\rangle = -\phi'(0).$$

Dunque, $D\delta$ è la trasformazione (che all'esempio 117 abbiamo chiamato λ)

$$\phi \rightarrow -\phi'(0). \blacksquare$$

2.6.2 Operazioni e trasformata di Fourier

Studiamo ora le relazioni tra le operazioni introdotte in \mathcal{S}' e la trasformata di Fourier.

Calcoliamo prima di tutto

$$\mathcal{F}(T_h l).$$

Per definizione,

$$\langle\langle \mathcal{F}(T_h l), \phi \rangle\rangle = \langle\langle T_h l, \hat{\phi} \rangle\rangle = \langle\langle l, T_{-h} \hat{\phi} \rangle\rangle.$$

Ora,

$$T_{-h} \hat{\phi} = \hat{\phi}(\omega + h) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega+h)x} \phi(x) dx = \mathcal{F}(M_f \phi)$$

con

$$f(x) = e^{-ihx}.$$

Dunque,

$$\mathcal{F}(T_h l) = M_f l,$$

la moltiplicazione della distribuzione l per $e^{-ih\omega}$.

Analogamente, la derivata di $R_a l$ si calcola da

$$\langle\langle \mathcal{F}(R_a l), \phi \rangle\rangle = \langle\langle l, R_{1/a} \hat{\phi} \rangle\rangle = \langle\langle l, \frac{1}{a} \mathcal{F}(R_a \phi) \rangle\rangle = \langle\langle a R_a \hat{l}, \phi \rangle\rangle :$$

$$\mathcal{F}(R_a l) = \frac{1}{a} R_a \hat{l}.$$

Veniamo infine alla trasformata della derivata di una distribuzione:

$$\langle\langle \mathcal{F}(Dl), \phi \rangle\rangle = \langle\langle Dl, \hat{\phi} \rangle\rangle = -\langle\langle l, D\hat{\phi} \rangle\rangle = -\langle\langle l, \mathcal{F}(M_{-it} \phi) \rangle\rangle = -\langle\langle M_{-it} \hat{l}, \phi \rangle\rangle$$

e quindi

$$\mathcal{F}(Dl) = i\omega \hat{l}.$$

Osservazione 121 Si consideri la funzione di Heaviside $u(t)$. La sua derivata è δ e quindi

$$1 = \hat{\delta} = i\omega\hat{u}$$

da cui sembra di poter dedurre $\hat{u} = \frac{1}{i\omega}$. Si noti che questa è una scrittura solamente formale, a cui non abbiamo attribuito alcun significato, perché $1/(i\omega)$ non è integrabile.

Un calcolo diretto mostra che \hat{u} è quella distribuzione che a $\phi \in \mathcal{S}$ associa

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \hat{\phi}(\omega) d\omega &= \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \phi(x) dx \right] d\omega \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \phi(x) dx \right] d\omega = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^R e^{-i\omega x} d\omega \right] \phi(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-iRx}}{ix} \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Ciò mostra che l'azione di certe distribuzioni viene descritta mediante integrali dipendenti da parametri, e loro limiti. Noi non presentiamo questo aspetto del problema. Diciamo solamente che in questo modo si riesce a dare senso all'espressione $\hat{u} = 1/(i\omega)$. ■

2.6.3 Convoluzione di distribuzioni

Il problema di estendere il concetto di convoluzione al caso delle distribuzioni è piuttosto delicato, e ci limitiamo ad enunciare alcuni risultati. Consideriamo due funzioni integrabili f e g . La loro convoluzione $h = f * g$ identifica una distribuzione regolare l_h , la cui azione su $\phi \in \mathcal{S}$ è:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(s-y)g(y) dy \right] \phi(s) ds &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(s-y)\phi(s) ds \right] g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x+y) dx \right] g(y) dy. \end{aligned}$$

Per interpretare la formula precedente quando f e g sono sostituite da distribuzioni, è necessario considerare funzioni ϕ dipendenti da due variabili x ed y e, per ogni valore di una di esse, per esempio y , applicare una distribuzione l alla funzione $x \rightarrow \phi(x, y)$. Per intendere che l agisce sulla ϕ vista come funzione di x , scriveremo l_x invece di l .

Siano ora l ed m due distribuzioni. Per definire il significato di $l * m$, convoluzione di l e di m , dobbiamo spiegare come essa agisce su ciascuna funzione $\phi \in \mathcal{S}$. Per questo, scelta $\phi \in \mathcal{S}$, consideriamo la funzione $x \rightarrow \phi(x + y)$, per ogni scelta di $y \in \mathbb{R}$, e consideriamo il numero

$$\langle\langle m_x, \phi(x + y) \rangle\rangle.$$

Si trova in questo modo una funzione

$$\psi(y) = \langle\langle m_x, \phi(x+y) \rangle\rangle.$$

Se accade che $\psi \in \mathcal{S}$, allora può definirsi

$$\langle\langle l, \psi \rangle\rangle$$

e per definizione porremo

$$\langle\langle l * m, \phi \rangle\rangle = \langle\langle l, \psi \rangle\rangle = \langle\langle l_y, \langle\langle m_x, \phi(x+y) \rangle\rangle \rangle\rangle. \quad (2.16)$$

Si noti che per poter utilizzare la definizione precedente abbiamo bisogno di più che non semplicemente $\psi \in \mathcal{S}$: abbiamo bisogno che la funzione

$$\phi(x) \rightarrow \psi(y) = \langle\langle m_x, \phi(x+y) \rangle\rangle$$

sia continua da \mathcal{S} in sé, in modo da avere

$$\phi \rightarrow \langle\langle l * m, \phi \rangle\rangle$$

continua su \mathcal{S} .

Di conseguenza, la possibilità di definire la distribuzione $l * m$ dipende dalle proprietà di m .

Le proprietà da imporre ad m sono suggerite da questo teorema, che non proviamo.

Teorema 122 *Sia l una distribuzione temperata. Esiste una funzione continua $g(x)$ ed esistono numeri interi non negativi μ e ν tali che*

$$l = D^\nu g, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{-\mu} g(x) = 0.$$

Le derivate che figurano nel teorema precedente sono nel senso delle distribuzioni; e quindi, per esempio, Dg indica la derivata della distribuzione regolare l_g .

Ossia

$$\langle\langle D^\nu g, \phi \rangle\rangle = (-1)^\nu \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) D^\nu \phi(x) dx.$$

Le funzioni g che crescono al più polinomialmente per $|x|$ tendente ad ∞ si dicono *funzioni a crescita lenta*.

Esempio 123 Consideriamo la distribuzione δ . Si è già visto che questa è la derivata della funzione di Heaviside $u(x) = 0$ per $x < 0$, $u(x) = 1$ per $x \geq 0$.

Questa funzione non è continua. Si vede però che $u(x)$ è la derivata della funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

E quindi δ è derivata seconda di una funzione continua.

In modo analogo si vede che la derivata k -ma della δ è derivata $(k+1)$ -ma di g . ■

Questo teorema suggerisce di considerare le distribuzioni l tali che per ogni polinomio $p(x)$ si possa scrivere

$$p(x)l = \sum_{k=0}^m D^k f_k \quad (2.17)$$

f_k funzioni continue e limitate.

Il numero k e le funzioni f_k dipendono dal polinomio p .

Le distribuzioni temperate con queste proprietà si chiamano convolutori.

Esempio 124 Sia $u(x)$ la funzione di Heaviside. L'equazione

$$u(x) = f'(x)$$

non ammette soluzione $f(x)$ limitata e si potrebbe anche mostrare che nessuna equazione del tipo (2.17), con $l = u$, ammette soluzioni f_k continue e limitate. Dunque, la funzione di Heaviside $u(x)$ non è un convolutore.

Sia $l = D^\nu g$ con g costante per $|x|$ grande, diciamo $g(x) \equiv g_0$ per $|x| > R$. Sostituendo g con $g - g_0$ non si altera la distribuzione l , e si ha $g(x) = 0$ per $|x| > R$.

Consideriamo l'equazione

$$Df = xl = xDg.$$

Si vede immediatamente che una soluzione limitata di quest'equazione è

$$f(x) = xg(x) - \int_0^x g(s) ds$$

(questa funzione è limitata perchè $g(x)$ è nulla per $|x| > R$).

Si può anche vedere che ogni equazione (2.17) ammette soluzioni f_k continue e limitate; e dunque $l = D^\nu g$, con g costante per $|x|$ grande, è un convolutore. ■

Le distribuzioni $l = D^\nu g$, con g costante per $|x|$ grande si chiamano *distribuzioni a supporto* compatto:

Teorema 125 *Ogni distribuzione a supporto compatto è un convolutore.*

Dunque la δ di Dirac e le sue derivate, che sono distribuzioni a supporto compatto, sono convolutori. Si vede facilmente però che esistono convolutori che non sono distribuzioni a supporto compatto: tutti gli elementi di \mathcal{S} sono infatti convolutori.

Sia ora m un convolutore e consideriamo

$$\psi(y) = \langle\langle m_x, \phi(x+y) \rangle\rangle. \quad (2.18)$$

Si può provare:

Teorema 126 *Se m è un convolutore allora la funzione $\psi(y)$ definita in (2.18) è in \mathcal{S} e la trasformazione che a ϕ associa ψ , da \mathcal{S} in sé, è continua; e quindi la convoluzione di $l * m$ è definita (da (2.16)) per ogni $l \in \mathcal{S}'$.*

L'ipotesi che una delle due distribuzioni di cui si vuol calcolare la convoluzione sia un convolutore è troppo restrittiva per molte applicazioni. Però la convoluzione può definirsi anche in casi più generali. Per esempio:

Teorema 127 *La formula (2.16) definisce la convoluzione delle due distribuzioni temperate l ed m anche nel caso in cui ambedue hanno supporto in $[0, +\infty)$.*

Inoltre:

Teorema 128 *Nelle ipotesi sia del teorema 126 che del teorema 127, l'operazione di convoluzione gode delle seguenti proprietà:*

- *distributività:*

$$\begin{aligned} l * (h + k) &= l * h + l * k, \\ (l + m) * h &= l * h + m * h; \end{aligned}$$

- *associatività:*

$$l * (h * k) = (l * h) * k;$$

- *commutatività:*

$$h * k = k * h;$$

- *regola di derivazione:*

$$D(l * k) = (Dl) * k = l * (Dk);$$

- *regola per la trasformata di Fourier:*

$$\mathcal{F}(l * h) = \hat{l}(\omega)\hat{h}(\omega);$$

- *esistenza dell'identità rispetto alla convoluzione:*

$$\delta * h = h.$$

L'ultima proprietà, ossia $\delta * h = h$, si interpreta dicendo che la delta di Dirac è l'identità rispetto alla convoluzione. L'Esempio 111 mostra che le identità approssimate approssimano la δ di Dirac, ossia approssimano l'identità rispetto alla convoluzione. Si giustifica così il termine "identità approssimata".

Notiamo esplicitamente:

Esempio 129 Non tutte le funzioni di classe C^∞ e integrabili su \mathbb{R} sono dei convolutori. Per esempio, la funzione

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

non è un convolutore perchè l'equazione

$$p(x)g(x) = f'(x)$$

non ammette soluzione limitata se $p(x) = 1+x^2$.

Sono invece convolutori le funzioni $g(x) = e^{-|x|}$ e $g(x) = e^{-x^2}$. ■

La formula (2.16) può permettere di definire la convoluzione di due distribuzioni anche in casi più generali di quelli descritti dai teoremi 126 e 127. In tal caso però si possono incontrare fenomeni indesiderati, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 130 Consideriamo le tre distribuzioni seguenti: l è la distribuzione regolare 1; la seconda distribuzione è δ' mentre la terza è la funzione di Heaviside u . Si è già visto che u non è un convolutore ed è facile vedere che nemmeno l lo è. Ciò nonostante, per $\phi \in \mathcal{S}$

$$\psi(y) = \langle\langle u_x, \phi(x+y) \rangle\rangle = \int_0^{+\infty} \phi(x+y) dy$$

è in \mathcal{S} e la trasformazione da ϕ in ψ è continua. Dunque si può calcolare

$$\eta(\xi) = \langle\delta'_y, \psi(y+\xi)\rangle = \psi'(\xi) = \phi(x).$$

E quindi si può anche definire

$$\langle\langle l, \eta \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = \langle\langle l, \phi \rangle\rangle.$$

Dunque,

$$l * (\delta' * u) = l.$$

Anche $(l * \delta')$ può calcolarsi, dato che δ' ha supporto compatto e si vede facilmente che

$$l * \delta' = \delta.$$

Dunque,

$$(l * \delta') * u = \delta * u.$$

Calcoliamo esplicitamente $\delta * u$.

Ricordiamo che

$$\psi(y) = \langle\langle u_x, \phi(x+y) \rangle\rangle = \int_0^{+\infty} \phi(x+y) dx$$

così che

$$\langle\langle \delta, \psi \rangle\rangle = \psi(0) = \int_0^{+\infty} \phi(x) dx = \langle\langle u, \phi \rangle\rangle.$$

Si è quindi trovato $\delta * u = u$, ossia

$$(l * \delta') * u = u \neq l = l * (\delta' * u).$$

Dunque, in questo caso la proprietà associativa non vale. ■

2.7 Il caso delle funzioni di più variabili

Abbiamo trattato la trasformata di Fourier per il caso delle funzioni che dipendono da una sola variabile. In pratica è necessario lavorare anche con la trasformata di Fourier di funzioni che dipendono da n variabili x_1, \dots, x_n , $n > 1$. In questo caso la trasformata di Fourier è la funzione ancora di n variabili ξ_1, \dots, ξ_n . La trasformata di Fourier di $f(x_1, \dots, x_n)$ è

$$\hat{f}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i[x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n]} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Praticamente nessun cambiamento va fatto a ciò che abbiamo visto per le funzioni di una variabile, salvo che la formula per l'antitrasformata è ora

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i[x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n]} \hat{f}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Naturalmente questa formula vale sotto ipotesi alquanto restrittive ma, esattamente come nel caso delle funzioni di una sola variabile, essa si estende al caso delle distribuzioni.

Infine raccogliamo gli esempi di trasformate di Fourier che abbiamo visto:

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$e^{- t }$	$\frac{2}{1+\omega^2}$
$\chi_{[-T,T]}(t)$	$2\frac{\sin \omega T}{\omega}$
$e^{-x^2/2}$	$\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}$
$e^{i\alpha t}$	$2\pi\delta_\alpha$
$\sin \alpha x$	$-i\pi\{\delta_\alpha - \delta_{-\alpha}\}$
$\cos \alpha x$	$\pi\{\delta_\alpha + \delta_{-\alpha}\}$
δ	1
1	$2\pi\delta$
u	$\phi \rightarrow \int_0^{+\infty} \hat{\phi}(\omega) d\omega$