# Esercizi su gradienti e potenziali

**Esercizio 1.** Si consideri il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x-z)\overrightarrow{i}_1 + (1-xy)\overrightarrow{i}_2 \\ + z\,\overrightarrow{i}_3 \quad \forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

Dire se $\overrightarrow{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^3$.

---

**Svolgimento.** Osserviamo che $\overrightarrow{F}\in C^1(\mathbb{R}^3)$. Essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso, $\overrightarrow{F}$ è conservativo se e solo se verifica l'uguaglianza delle derivate in croce, che calcoliamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) = -y \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) = -1 \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Siccome non vale l'uguaglianza delle derivate in croce, concludiamo che $\overrightarrow{F}$ NON È CONSERVATIVO!

In effetti, provando a calcolare un potenziale $\varphi$ per $\overrightarrow{F}$ con il metodo degli integrali indefiniti si trova

$$\int F_1(x,y,z)\,dx + \psi_1(y,z) = \int (x-z)\ dx + \psi_1(y,z) = \frac{1}{2}x^2 - xz + \psi_1(y,z)$$
$$\int F_2(x,y,z)\,dy + \psi_2(x,z) = \int (1-xy)\ dy + \psi_2(x,z) = y - \frac{1}{2}xy^2 + \psi_2(x,z)$$
$$\int F_3(x,y,z)\,dz + \psi_3(x,y) = \int z\,dz + \psi_3(x,y) = \frac{z^2}{2} + \psi_3(x,z)$$

Le tre espressioni sono INCOMPATIBILI: non c'è modo di scegliere $\psi_1$, $\psi_2$ e $\psi_3$ in modo che

$$\int F_1(x,y,z)\,dx + \psi_1(y,z) = \int F_2(x,y,z)\,dy + \psi_2(x,z) = \int F_3(x,y,z)\,dz + \psi_3(x,y)$$

---

**Esecizio 2.** Determinare per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{\left[(2x\cos(x^2))(x^2+y^4) - 2x\sin(x^2)\right]}{(x^2+y^4)^2}\overrightarrow{i}_1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha y^3\sin(x^2)}{(x^2+y^4)^2}\overrightarrow{i}_2$$

è conservativo nel suo dominio.

---

**Svolgimento.** Osserviamo che $\overrightarrow{F}\in C^1(\mathrm{dom}(\overrightarrow{F}))$, con

$$\mathrm{dom}(\overrightarrow{F}) = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \quad \text{che NON È semplicemente connesso!}$$

Quindi l'uguaglianza delle derivate in croce NON È SUFFICIENTE a concludere che $\overrightarrow{F}$ è conservativo.

Quindi calcoliamo <u>direttamente</u> un gradiente $\varphi$ per $\overrightarrow{F}$ e vediamo per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ ciò è possibile. Usando il metodo degli integrali indefiniti, abbiamo due possibilità:

$$\varphi(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx + \psi_1(y) = \int \frac{\left[(2x\cos(x^2))(x^2+y^4) - 2x\sin(x^2)\right]}{(x^2+y^4)^2}\,dx + \psi_1(y)$$

oppure

$$\varphi(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx + \psi_2(x) = \int \frac{1}{2}\frac{\alpha y^3\sin(x^2)}{(x^2+y^4)^2}\,dx + \psi_2(x)$$

Il calcolo di quest'ultimo integrale indefinito sembra presentare minori difficoltà, quindi procediamo nel secondo modo. Si ha

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\alpha}{2} y^3 (x^2+y^4)^{-2}\sin(x^2)\,dx \\
&= \frac{\alpha\sin(x^2)}{2}\int \frac{d}{dy}\left(-\frac{1}{4}(x^2+y^4)^{-1}\right)\,dy \\
&= -\frac{\alpha}{8}\sin(x^2)(x^2+y^4)^{-1}.
\end{aligned}$$

Ora impongo che

$$\varphi(x,y) = -\frac{\alpha}{8}\sin(x^2)(x^2+y^4)^{-1} + \psi_2(x)$$

sia <u>effettivamente</u> un potenziale per Per costruzione, $\frac{\partial}{\partial y}\varphi = F_2$. Si deve anche avere

$$\begin{aligned}
F_1(x,y) = \frac{\left[(2x\cos(x^2))(x^2+y^4) - 2x\sin(x^2)\right]}{(x^2+y^4)^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\alpha}{8}\frac{\sin(x^2)}{x^2+y^4} + \psi_2(x)\right) \\
&= -\frac{\alpha}{8}\frac{2x\cos(x^2)(x^2+y^4) - 2x\sin(x^2)}{(x^2+y^4)^2} + \psi_2'(x).
\end{aligned}$$

L'uguaglianza vale se e solo se

$$\begin{cases} -\frac{\alpha}{8} = 1 \\ \psi_2'(x) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -8 \\ \psi_2(x) = k \end{cases}$$

Quindi gli infiniti potenziali di $\overrightarrow{F}$ sono dati da

$$\varphi(x,y) = \frac{\sin(x^2)}{x^2+y^4} + k$$

---

**Esercizio 3.** Si consideri il campo vettoriale piano

$$\overrightarrow{F}(x,y) = x\,\overrightarrow{i}_1 + y\,\overrightarrow{i}_2 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e sia $\Gamma$ l'ellisse ottenuta ruotando di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario l'ellisse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Quanto vale $\int_\Gamma \overrightarrow{F}$?

---

**Svolgimento.** Osserviamo che $\overrightarrow{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Inoltre

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Essendo $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso, concludiamo che $\overrightarrow{F}$ è conservativo. In effetti, un potenziale per $\overrightarrow{F}$ è

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Essendo $\Gamma$ una <u>curva chiusa</u>, concludiamo che

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} = 0.$$

Si noti che con questo procedimento è stato evitato il calcolo dell'equazione (e quindi della rappresentazione parametrica) dell'ellisse $\Gamma$.

---

**Esercizio 4.** Verificare che il campo vettoriale piano

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(-\frac{16x^3}{(x^4+y^2)^2} - ye^{xy}\right)\overrightarrow{i}_1 + \left(-\frac{8y}{(x^4+y^2)^2} - xe^{xy}\right)\overrightarrow{i}_2 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

è un gradiente sul suo dominio. Sia $\overline{\varphi}$ il potenziale di $\overrightarrow{F}$ tale che $\overline{\varphi}(1,-1) = 1 - e^{-1}$. Quanto vale $\overline{\varphi}(0,1)$?

---

**Svolgimento.** Osserviamo che $\overrightarrow{F} \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ e vale l'uguaglianza delle derivate in croce. Ma, siccome $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON È semplicemente connesso, l'uguaglianza delle derivate in croce non è sufficiente a concludere la conservatività di $\overrightarrow{F}$.

Per verificare che $\overrightarrow{F}$ è un gradiente, costruiamo direttamente un potenziale procedendo con il metodo degli integrali indefiniti. Per esempio, integrando $F_1$ si ottiene

$$\int F_1(x,y)\,dx + \psi_1(y) = \int \left(-\frac{16x^3}{(x^4+y^2)^2} - ye^{xy}\right)dx + \psi_1(y) = \frac{4}{x^4+y^2} - e^{xy} + \psi_1(y)$$

Imponendo che

$$F_2(x,y) = -\frac{8y}{(x^4+y^2)^2} - xe^{xy} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4}{x^4+y^2} - e^{xy} + \psi_1(y)\right)$$

deduco che $\psi_1(y) = k$. Allora gli infiniti potenziali sono

$$\varphi(x,y) = \frac{4}{x^4+y^2} - e^{xy} + k$$

Per determinare il potenziale $\overline{\varphi}$ tale che $\overline{\varphi}(1,-1) = 1 - e^{-1}$, devo individuare il corrispondente valore di $k$. Impongo che

$$1 - \frac{1}{e} = \varphi(1,-1) = \frac{4}{2} - e^{-1} + k = 2 - \frac{1}{e} + k$$

da cui $k = -1$. Allora

$$\overline{\varphi}(x,y) = \frac{4}{x^4+y^2} - e^{xy} - 1$$

da cui $\overline{\varphi}(0,1) = 2$.

---

**Esercizio 5.** Si consideri il campo vettoriale piano

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{y}{1+xy}\right)\overrightarrow{i}_1 + \left(\frac{x}{1+xy} + y - 7\right)\overrightarrow{i}_2 \quad \forall\,(x,y) \in A = \left\{(x,y)\,\mathbb{R}^2 \;\; xy \neq -1\right\}.$$

Sia $\alpha \geq 0$ e si denoti con $I_\alpha$ l'integrale curvilineo di $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento $\Gamma_\alpha$ di estremi $A = (2,0)$ e $B = (0,\alpha)$, percorso da $A$ verso $B$. Determinare $\alpha$ in modo che $I_\alpha$ sia minimo.

---

**Svolgimento.** Possiamo procedere in due modi distinti.
**Possibilità 1:** calcolare direttamente l'integrale curvilineo di seconda specie $\int_{\Gamma_\alpha} \overrightarrow{F}$, per esempio usando questa parametrizzazione per il segmento $\Gamma_\alpha$

$$\overrightarrow{r_\alpha}(t) = (2-t)\overrightarrow{i}_1 + \left(-\frac{\alpha}{2}(2-t) + \alpha\right)\overrightarrow{i}_2 \quad t \in [0,2].$$

Si può quindi procedere (**esercizio!**) a calcolare

$$\int_0^2 \overrightarrow{F}\,(\overrightarrow{r_\alpha}(t)) \cdot \overrightarrow{r_\alpha}'(t)\,dt \;\ldots\ldots$$

**Possibilità 2:** Verificare se $\overrightarrow{F}$ è conservativo e, in caso affermativo, determinare un potenziale e semplificare il calcolo di $I_\alpha$. Ora osserviamo che, in effetti, vale l'uguaglianza delle derivate in croce di $\overrightarrow{F}$ (**esercizio: verificarlo!**) sul suo dominio

$$A = \left\{(x,y)\,\mathbb{R}^2 \;\; xy \neq -1\right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{graf}\left(-\frac{1}{x}\right),$$

che non è semplicemente connesso. <u>Tuttavia</u>, ai fini del calcolo di $I_\alpha$ interessa la restrizione di $\overrightarrow{F}$ al primo quadrante $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$, che è semplicemente connesso. Quindi dall'uguaglianza delle derivate in croce si deduce che la restrizione di $\overrightarrow{F}$ a $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ è conservativa, cioè

$$\overrightarrow{F} \text{ ammette un potenziale } \varphi \text{ su } [0,+\infty) \times [0,+\infty).$$

Calcolo $\varphi$ con il metodo degli integrali indefiniti. Devo quindi confrontare

$$\int F_1(x,y)dx + \psi_1(y) = \int \frac{y}{1+xy}dx + \psi_1(y) = \log(1+xy) + \psi_1(y)$$

con

$$\int F_2(x,y)dy + \psi_2(x) = \int \left(\frac{x}{1+xy} + y - 7\right)dy + \psi_2(x) = \log(1+xy) + \frac{1}{2}y^2 - 7y + \psi_2(x),$$

da cui deduco che si deve scegliere

$$\begin{cases} \psi_1(y) = \frac{1}{2}y^2 - 7y \\ \psi_2(x) = k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Quindi gli infiniti potenziali di $\overrightarrow{F}$ sono dati da

$$\varphi(x,y) = \log(1+xy) + \frac{1}{2}y^2 - 7y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Posso ora procedere con il calcolo di $I_\alpha$: si ha

$$I_\alpha = \varphi((0,\alpha)) - \varphi((2,0)) = \log(1) + \frac{\alpha^2}{2} - 7\alpha - \log(1) = \frac{\alpha^2}{2} - 7\alpha$$

quindi $I_\alpha$ è minimo per $\alpha = 7$. Il corrispondente valore è

$$I_7 = -\frac{49}{2}.$$

---

**Esercizio 6.** Si consideri il campo vettoriale piano

$$\overrightarrow{G}(x,y) = 2x\,\overrightarrow{i}_1 + 4y\,\overrightarrow{i}_2 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e sia $(\alpha,\beta)$ un punto appartenente alla curva $x^2+y^2=1$. Sia $\gamma$ il segmento congiungente $(0,0)$ con $(\alpha,\beta)$. Determinare, al variare del punto $(\alpha,\beta)$, i valori

$$\max \int_\gamma \overrightarrow{G}, \quad \min \int_\gamma \overrightarrow{G}.$$

---

**Svolgimento.** Osserviamo che $\overrightarrow{G}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Infatti, $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e vale (**esercizio: verificarlo!**) l'uguaglianza delle derivate in croce. Si verifica (**esercizio!**) che gli infiniti potenziali di $\overrightarrow{G}$ sono dati da

$$\varphi(x,y) = x^2 + 2y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\int_\gamma \overrightarrow{G} = \varphi(\alpha,\beta) - \varphi(0,0) = \alpha^2 + 2\beta^2.$$

Allora calcolare

$$\max \int_\gamma \overrightarrow{G}, \quad \min \int_\gamma \overrightarrow{G}$$

al variare del punto $(\alpha,\beta)$ si riduce a risolvere un problema di massimizzazione e, rispettivamente, minimizzazione vincolata della funzione

$$\ell(\alpha,\beta) = \alpha^2 + 2\beta^2 \quad \text{sulla circonferenza} \;\; \alpha^2+\beta^2 = 1.$$

Parametrizziamo, per esempio, tale vincolo rispetto alla variabile $\alpha$, cosicché

$$\gamma = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \beta = 1-\alpha^2,\; \alpha \in [-1,1]\}.$$

Quindi, indicando con $\ell|_\gamma$ la restrizione di $\ell$ a $\gamma$, troviamo che

$$\int_\gamma \overrightarrow{G} = \ell|_\gamma(\alpha,\beta) = \alpha^2 + 2(1-\alpha^2) = 2-\alpha^2 \quad \text{con } \alpha \in [-1,1].$$

Calcolando i valori di massimo e di minimo della suddetta funzione, si trova immediatamente che

$$\begin{cases} \max \int_\gamma \overrightarrow{G} \;\text{ si ha per } \alpha = 0, \text{ quindi } \;\max \int_\gamma \overrightarrow{G} = 2, \\ \min \int_\gamma \overrightarrow{G} \;\text{ si ha per } \alpha = \pm 1, \text{ quindi } \;\min \int_\gamma \overrightarrow{G} = 1. \end{cases}$$

---

**Esercizio 7.** Sia $\alpha \neq 0$ e si consideri il campo vettoriale piano

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{y^2}{2\alpha x^2}\,\overrightarrow{i}_1 + \left(\sin(2y)\exp(\sin^2(y)) - \frac{2y}{x}\right)\overrightarrow{i}_2 \quad \forall\,(x,y) \in A = (0,+\infty)\times\mathbb{R}.$$

Determinare per quali valori di $\alpha$ il campo $\overrightarrow{F}$ è conservativo. Per tali valori, calcolare

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\Gamma, \quad \text{con } \Gamma \text{ il segmento congiungente } A=(2,\pi) \text{ a } B=(1,0).$$

Osserviamo che $A=(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ è semplicemente connesso, quindi $\overrightarrow{F}$ è conservativo su $A$ se e solo se vale l'uguaglianza delle derivate in croce. Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\alpha x^2}, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2y}{x^2}. \end{cases}$$

Quindi $\overrightarrow{F}$ è conservativo se e solo se $\alpha = \frac{1}{2}$.

Calcoliamo $\overrightarrow{F}$ con il metodo degli integrali indefiniti. Chiaramente, conviene calcolare

$$\int F_1(x,y)dx = \int \frac{y^2}{x^2}dx = -\frac{y^2}{x}$$

e quindi ricerchiamo un potenziale della forma

$$\varphi(x,y) = -\frac{y^2}{x} + \psi_1(y).$$

Imponiamo che questa funzione sia effettivamente un potenziale. Per costruzione, si ha chiaramente che $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = F_1$. Si deve anche avere

$$\begin{aligned} F_2(x,y) = \left(\sin(2y)\exp(\sin^2(y)) - \frac{2y}{x}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y^2}{x} + \psi_1(y)\right) = -\frac{2y}{x} + \psi_1'(y) \end{aligned}$$

Quindi l'uguaglianza vale se e solo se

$$\psi_1'(y) = \sin(2y)\exp(\sin^2(y)),$$

da cui

$$\psi_1(y) = \int \sin(2y)\exp(\sin^2(y))dy = \int (2\sin(y)\cos(y)\exp(\sin^2(y)))dy = \exp(\sin^2(y)) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi gli infiniti potenziali di $\overrightarrow{F}$ sono dati da

$$\varphi(x,y) = -\frac{y^2}{x} + \exp(\sin^2(y)) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} = \varphi(1,0) - \varphi((2,\pi)) = 1 - \left(-\frac{\pi^2}{2} + e^0\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

---

**Esercizio 8.** Determinare almeno un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\int_\Gamma \overrightarrow{F} = 0$, dove $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ è

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{\alpha x}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\overrightarrow{j} \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

e $\Gamma$ è il bordo del quadrato di vertici $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ e $(1,1)$ percorso in senso antiorario.

---

**Svolgimento.** Osserviamo che, se $\alpha$ è tale che $\overrightarrow{F}$ è conservativo, allora $\int_\Gamma \overrightarrow{F} = 0$ in quanto $\Gamma$ è una curva chiusa.

Ci poniamo quindi il problema della conservatività di $\overrightarrow{F}$ sul suo dominio. Dato che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso, il criterio delle derivate in croce è solanto NECESSARIO per la conservatività in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Osserviamo però che il sostegno di $\Gamma$ è contenuto nel semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, che è semplicemente connesso. Determiniamo allora per quali valori di $\alpha$ il campo $\overrightarrow{F}$ è conservativo nel semipiano, usando il criterio delle derivate in croce, che nel semipiano è anche sufficiente.

Calcoliamo le derivate in croce:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-\alpha x}{(x^2+y^2)^2}2y \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}2x \end{cases}$$

da cui si trova che:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) \;\Leftrightarrow\; \alpha = 2$$

Allora per $\alpha = 2$ il campo $\overrightarrow{F}$ è conservativo nel semipiano $\{x > 0\}$ e, quindi,

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} = 0.$$

---