Esercizio 1326
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare il parametro reale a affinché i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (2, a, 1-a), \mathbf{v}_2 = (1, 2, -1), \ \mathbf{v}_3 = (3, 1, 5),$$

risultino complanari.

***

Soluzione
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ risultano complanari se sono linearmente dipendenti:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$, quindi il sistema lineare omogeneo

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_2 &= 0 \\ a\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ (1-a)\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

deve ammettere soluzioni non banali. Ciò implica:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a & 2 & 1 \\ 1-a & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

Sviluppiamo il determinante:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a & 2 & 1 \\ 1-a & -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1-a & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1-a & -1 \end{vmatrix} \\ &= 17 - 3a \end{aligned}$$

Quindi i vettori assegnati sono complanari se e solo se $a = \frac{17}{3}$

Esercizio 1327

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Assegnati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, -3), \mathbf{v}_2 = (1, \lambda, \mu),$$

determinare i valori dei parametri reali λ, μ affinchè essi risultino paralleli.

***

Soluzione
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ risultano paralleli se e solo se sono proporzionali. Ciò implica che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

deve avere rango 2. Quindi devono annullarsi i minori del second'ordine:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ \mu & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Cioè:

$$\begin{cases} \mu + 3\lambda = 0 \\ 3 + 2\mu = 0 \\ 2\lambda - 1 = 0 \end{cases},$$

la cui soluzione è:

$$\lambda = -\frac{1}{2},\ \mu = -\frac{3}{2}$$

Esercizio 1328

Assegnati i vettori dello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v}_1 = (2,3)\,, \mathbf{v}_2 = (1,5)\,, \mathbf{v}_3 = (-3,1)$$

mostrare che $\mathbf{v}_3$ dipende linearmente da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

***

Soluzione
Deve essere:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{v}_3 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2,$$

cioè:

$$\lambda_1 (2,3) + \lambda_2 (1,5) = (-3,1)$$
$$\iff \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = -3 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 1 \end{cases},$$

la cui soluzione è:

$$\lambda_1 = -\frac{16}{7}, \ \lambda_2 = \frac{11}{7}$$

Si conclude che $\mathbf{v}_3$ dipende linearmente da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, risultando:

$$\mathbf{v}_3 = -\frac{16}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{11}{7}\mathbf{v}_2$$

Esercizio 1328

Assegnati i vettori dello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v}_1 = (2,3)\,, \mathbf{v}_2 = (1,5)\,, \mathbf{v}_3 = (-3,1)$$

mostrare che $\mathbf{v}_3$ dipende linearmente da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

***

Soluzione
Deve essere:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{v}_3 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2,$$

cioè:

$$\lambda_1 (2,3) + \lambda_2 (1,5) = (-3,1) \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = -3 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 1 \end{cases},$$

la cui soluzione è:

$$\lambda_1 = -\frac{16}{7}, \ \lambda_2 = \frac{11}{7}$$

Si conclude che $\mathbf{v}_3$ dipende linearmente da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, risultando:

$$\mathbf{v}_3 = -\frac{16}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{11}{7}\mathbf{v}_2$$

Esercizio 1329

Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$ consideriamo i punti:

$$A\,(2,1,1)\,,\ B\,(1,-2,1)\,,\ C\,(3,-1,-1)\,,\ D\,(2,3,-2)$$

Assegnato il vettore $\mathbf{v} = (3,2,3)$, deteminare i vettori componenti di $\mathbf{v}$ paralleli ai segmenti orientati AB, AC, AD.

***

Soluzione
I segmenti orientati AB, AC, AD individuano tre vettori liberi ordinari:

$$\mathbf{a}_1 = (-1, -3, 0), \, \mathbf{a}_2 = (1, -2, -2), \, \mathbf{a}_3 = (0, 2, -3)$$

Dobbiamo quindi esprimere $\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{a}_k$ $(k = 1, 2, 3)$. Affinché ciò sia possibile il sistema di vettori $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ deve essere linearmente indipendente. Cioè, l'equazione vettoriale nelle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 = 0, \tag{2}$$

deve ammettere la sola soluzione banale $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$.
La (2) scritta componente per componente conduce al sistema lineare ed omogeneo:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + 0 = 0 \\ -3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 0 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -19 \end{aligned}$$

cioè $r(A) = 3 \Longrightarrow$ il sistema 3 ammette solo la soluzione banale. Pertanto il sistema il sistema di vettori $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ è linearmente indipendente, per cui possiamo scrivere:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$$

equivalente al sistema di Cramer:

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + 0 = 3 \\ -3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 2 \\ 0 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 3 \end{cases},$$

che risolto con l'omonima regola, fornisce:

$$\lambda_1 = -\frac{42}{19}, \lambda_2 = \frac{15}{19}, \lambda_3 = -\frac{29}{19}$$

Quindi:

$$\mathbf{v} = \underbrace{-\frac{42}{19}\mathbf{a}_1}_{=\mathbf{v}_1}+\underbrace{\frac{15}{19}\mathbf{a}_2}_{=\mathbf{v}_2}-\underbrace{\frac{29}{19}\mathbf{a}_3}_{=\mathbf{v}_3},$$

essendo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ i vettori componenti di $\mathbf{v}$ paralleli ai segmenti orientati AB, AC, AD. Quindi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= -\frac{42}{19}\mathbf{a}_1 = -\frac{42}{19}(-1,-3,0) = \left(\frac{42}{19}, \frac{126}{19}, 0\right) \\
\mathbf{v}_1 &= \frac{15}{19}\mathbf{a}_2 = \frac{15}{19}(1,-2,-2) = \left(\frac{15}{19}, -\frac{30}{19}, -\frac{30}{19}\right) \\
\mathbf{v}_3 &= -\frac{29}{19}\mathbf{a}_3 = -\frac{29}{19}(0,2,-3) = \left(0, -\frac{58}{19}, \frac{87}{19}\right)
\end{aligned}$$

Esercizio 1330

Assegnata la curva regolare:

$$C) \quad x(t) = te^t, \quad y(t) = e^t, \quad z(t) = t,$$

scrivere l'equazione della retta tangente e del piano normale nel punto $P_0(0,1,0)$.

***

Soluzione

Osserviamo innanzitutto che il punto $P_0(0,1,0)$ proviene dal valore $t_0 = 0$ del parametro. L'equazione della retta tangente è:

$$\tau_0) \quad \frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)}$$

Determiniamo le derivate:

$$x'(t) = e^t(1+t), \quad y'(t) = e^t, \quad z'(t) = 1$$

Quindi:

$$x'(t_0) = 1, \; y'(0) = 1, \; z'(0) = 1$$

Da ciò segue l'equazione della tangente:

$$\tau_0) \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

L'equazione del piano normale a C nel punto P_0 è:

$$\alpha_0) \quad x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + y'(t_0)(y-y_0) = 0,$$

cioè:

$$2ex + ey + z - 3e^2 - 1 = 0$$

Esercizio 1331

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Dopo aver verificato che il sistema di vettori:

$$\{\mathbf{v}_1 = (2, -5, 1), \ \mathbf{v}_2 = (-1, 2, 3), \mathbf{v}_3 = (0, 4, -2)\}, \tag{4}$$

è linearmente indipendente, esprimere il vettore $\mathbf{v} = (2, 3, -4)$ come combinazione lineare dei vettori 4.

***

Soluzione
Il sistema 4 è lineramente indipendente se la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

ha rango 3. Calcoliamo quindi:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -26,$$

quindi $r(A) = 3$.
Ora scriviamo:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

equivalente al sistema lineare:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 0 = 2 \\ -5\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = -4 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di tale sistema è la matrice 5. Quindi il sistema è di Cramer, e la sua soluzione è:

$$\lambda_1 = \frac{11}{13}, \lambda_2 = -\frac{4}{13}, \lambda_3 = \frac{51}{26}$$

Quindi:

$$\mathbf{v} = \frac{11}{13}\mathbf{v}_1 - \frac{4}{13}\mathbf{v}_2 + \frac{51}{26}\mathbf{v}_3$$

Osserviamo che $\frac{11}{13}\mathbf{v}_1$, $-\frac{4}{13}\mathbf{v}_2$, $\frac{51}{26}\mathbf{v}_3$ sono i vettori componenti di $\mathbf{v}$ secondo le direzioni dei tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Esercizio 1332

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare il versore del vettore $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

***

Soluzione
Il versore (o vettore unitario) di un vettore $\mathbf{v}$ è:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|},$$

essendo $|\mathbf{v}| = v$ il modulo (o *lunghezza*) del vettore $\mathbf{v}$.
Abbiamo:

$$\mathbf{u} = \frac{4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{16 + 64 + 1}} = \frac{1}{9}(4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

Esercizio 1333

Determinare l'angolo tra i due vettori: $\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_2 = -11\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

***

Soluzione
Si ricava facilmente dal prodotto scalare:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 v_2 \cos\alpha,$$

essendo $v_1 = |\mathbf{v}_1|, v_2 = |\mathbf{v}_2|$ e α l'ngolo tra i due vettori. Quindi:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{v_1 v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

da cui

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 1334

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare il valore del parametro reale k tale che il punto di coordinate cartesiane $(2, k)$ sia allineato ai punti $(3, -1)$, $(0, 2)$.

***

Soluzione
Scriviamo innanzitutto l'equazione della retta passante per $(3,-1)$, $(0,2)$, dopodichè imponiamo l'appartenza di $(2,k)$ a tale retta.
Abbiamo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante secondo gli elementi della prima colonna:

$$x \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} y & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Cioè:

$$x + y - 2 = 0$$

Deve essere:

$$(2,k) \in r \Longleftrightarrow 2 + k - 2 = 0 \Longleftrightarrow k = 0$$

Esercizio 1335

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $(1,-2)$ e che stacca sull'asse y un segmento di lunghezza 3.

***

Soluzione
Basta scrivere l'equazione nella forma segmentaria:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{9} = 1$$

Ora imponiamo la condizione di appartenenza

$$(1,-2) \in r \Longrightarrow \frac{1}{p} - \frac{2}{3} = 1,$$

da cui $\frac{1}{p} = \frac{5}{3}$, e quindi l'equazione:

$$\frac{5}{3}x + \frac{y}{3} = 1,$$

che può essere messa nella forma implicita:

$$5x + y - 3 = 0$$

Esercizio 1336

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Scrivere le equazioni parametriche della retta di equazione cartesiana $2x + y - 1 = 0$.

***

Soluzione
Ricordiamo che le equazioni parametriche di una retta nel piano sono:

$$\begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) \end{cases}, \ t \in (-\infty, +\infty)$$

Qui (x_1, y_1), (x_2, y_2) sono punti assegnati della retta. Determinando le coordinate di tali punti si perviene alle equazioni parametriche della retta. Tuttavia, esiste un metodo più veloce che consiste nell'assumere come parametro della rappresentazione parametrica una delle due coordinate cartesiane. Nel caso in esame conviene porre $x = t$, per cui le equazioni parametriche richieste sono:

$$x = t, \, y = 1 - 2t, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

Esercizio 1337

Scrivere l'equazione della retta passante per $(3, 1)$ e avente numeri direttori $l_1 = 0$, $l_2 = 2$.

***

Soluzione
Come è noto, l'equazione di una retta per un punto (x_0, y_0) e di numeri direttori (l_1, l_2) è:

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2}$$

Nel caso in esame risulta:

$$\frac{x - 3}{0} = \frac{y - 1}{2} \tag{6}$$

Si noti che il primo membro della 6 ha senso se e solo se $x - 3 = 0$, giacché $x - 3 \neq 0$ implica una divisione per zero. Da ciò segue che l'equazione cercata è:

$$x - 3 = 0,$$

cioè la retta è parallela all'asse y. Ciò può essere visto anche in termini di numeri direttori della retta. Infatti, ricordiamo che i numeri direttori sono le componenti di un qualunque vettore parallelo alla retta. Nel nostro caso abbiamo $l_1 = 0$, cioè la componente del vettore nella direzione dell'asse x positivo è pari a zero, e ciò implica che tale vettore è ortogonale all'asse x, o ciò che è lo stesso, parallelo all'asse y, da cui il parallelismo della retta a tale asse.

Esercizio 1338

Scrivere l'equazione cartesiana della retta di equazioni parametriche:

$$x = 2 + t,\ y = 1 - 3t, \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{7}$$

***

Soluzione
Per ricavare l'equazione cartesiana a partire dalle 7 occorre e basta eliminare tra tali equazioni il parametro t. A tale scopo ricaviamo t dalla prima:

$$t = x - 2,$$

per poi sostituirlo nella seconda:

$$y = 1 - 3(1 - x) = -1 + 3x$$

Quindi l'equazione cartesiana richiesta è:

$$3x + y + 1 = 0$$

Esercizio 1340

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare le coordinate cartesiane del punto di intersezione delle rette:

$$r_1)\ \ y = 2x - 1,\ \ r_2)\ \ x + y - 5 = 0 \tag{8}$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} & P_0(x_0, y_0) \in r_1 \cap r_2 \\ & \qquad \Longleftrightarrow (x_0, y_0) \text{ è soluzione del sistema} \\ & \qquad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

che è un banale sistema di Cramer, che si risolve immediatamente ottenendo:

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 3$$

Esercizio 1343

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P_0\,(x_0 = 3, y_0 = -2)$ e parallela alla retta $r)\ 2x - 3y + 2 = 0$.

***

Soluzione
Indichiamo con s la retta per P_0 e parallela ad r. La sua equazione è:

$$2x - 3y + k = 0,$$

essendo

$$k \in \mathbb{R} \mid P_0 \in s \Longleftrightarrow 2x_0 - 3y_0 + k = 0$$

da cui $k = -12$. Si conclude che la retta cercata ha equazione:

$$2x - 3y - 12 = 0$$

Esercizio 1344

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P_0\,(2, -3)$ e parallela alla retta passante per $A\,(3, -1)$ e $B\,(4, 5)$.

***

Soluzione
Anziché scrivere l'equazione della retta passante per $A\,(3, -1)$ e $B\,(4, 5)$, determiniamo una coppia di numeri direttori di tale retta, facendo la differenza tra le coordinate di A e B, ottenendo

$$l_1 = 1,\ l_2 = 6$$

A questo punto, è immediato scrivere l'equazione richiesta nella forma di rapporti uguali, ottenendo:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{6},$$

da cui l'equazione in forma implicita si scrive:

$$6x - y - 15 = 0$$

Esercizio 1345

Scrivere l'equazione della mediana della striscia compresa tra le rette parallele $3x-y+3=0$, $6x-2y+1=0$.

***

Soluzione
La mediana della striscia compresa tre le rette assegnate, che indichiamo rispettivamente con r e s, è la retta t passante per il punto medio del segmento $\overline{AB}$, dove $A \in r \cap x$, $B \in r \cap y$. Determiniamo quindi le coordinate di tali punti, ottenendo:

$$A\left(x_1=-1,0\right),\ B\left(x_2=-\frac{1}{6},0\right)$$

Il punto medio è $M\left(\bar{x},0\right)$ tale che:

$$\bar{x}=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)=-\frac{7}{12}$$

Quindi la retta t ha equazione:

$$3x-y+k=0,$$

essendo:

$$k \in \mathbb{R} \mid M \in t \Longrightarrow 3\bar{x}+k=0 \Longrightarrow k=\frac{7}{4}$$

Sostituendo nell'equazione precedente otteniamo l'equazione cercata:

$$12x-4y+7=0$$

Esercizio 1347

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f\left(x,y\right)=x^2+xy+y^2-2x-y \tag{9}$$

***

Soluzione
Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$f_x\left(x,y\right)=2x+y-2,\ \ f_y\left(x,y\right)=x+2y-1$$

I punti estremali sono le soluzioni del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} f_x\left(x,y\right)=0 \\ f_y\left(x,y\right)=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y=2 \\ x+2y=1 \end{array}\right.,$$

che è un sistema di Cramer con soluzione $(x = 1, y = 0)$, per cui abbiamo un solo punto estremale $P_0\,(1, 0)$.
Calcoliamo l'hessiano:

$$H\,(x, y) = f_{xx}\,(x, y)\, f_{yy}\,(x, y) - [f_{xy}\,(x, y)]^2$$

Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx}\,(x, y) = 2, \;\; f_{yy}\,(x, y) = 2, \;\; f_{xy}\,(x, y) = 1$$

Perciò:

$$H\,(x, y) = 3$$

Pertanto:

$$\begin{cases} H\,(P_0) > 0 \\ f_{xx}\,(P_0) > 0 \end{cases} \Longrightarrow P_0 \text{ è punto di minimo relativo proprio}$$

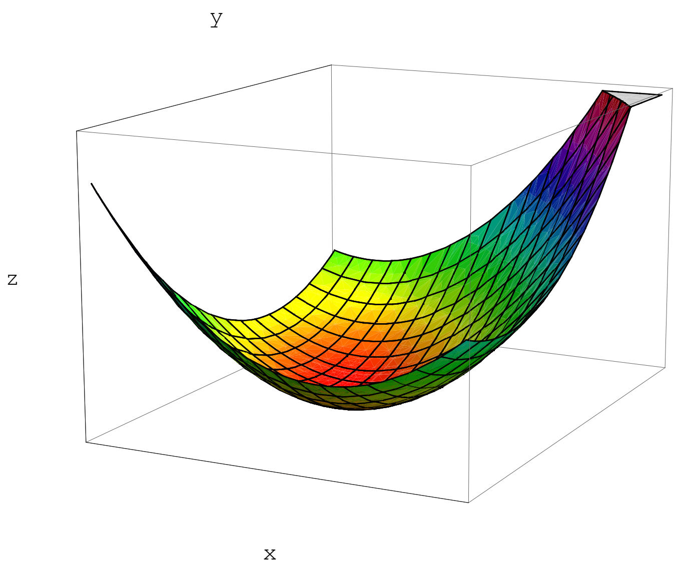

Figure 1:

Esercizio 1348

Assegnate le rette parallele:

$$r) \;\; x - 2y + 3 = 0, \;\; s) \; 3x - 6y - 5 = 0,$$

determinare l'equazione della retta t simmetrica di r rispetto ad s.

***

Soluzione
Se A e B sono i punti di intersezione di s e r con l'asse x, segue che la retta t è simmetrica di r rispetto ad s, se e solo se t è parallela ad r,s e passa per il punto medio del segmento AB.
Quindi dobbiamo determinare le coordinate del punto medio C del segmento AB. Le coordinate di A e B sono:

$$A\left(-3,0\right),\ B\left(\frac{5}{3},0\right),$$

perciò l'ascissa di C è:

$$\bar{x}=\frac{19}{3}$$

Per quanto detto deve essere $t \parallel r$, per cui:

$$3x-6y+k=0$$

essendo $k\in\mathbb{R} \mid C\in t$, quindi: $k=-19$.
L'equazione richiesta è:

$$3x-6y-19=0$$

Esercizio 1350

Assegnate le rette di equazione

$$r)\quad kx+by+c=0,\quad s)\ ax+b'y+c'=0,$$

determinare il valore del parametro k affinche r sia parallela a s. Considerare il caso $kx+3y-1=0$, $x-7y+1=0$.

***

Soluzione
Deve essere:

$$\frac{k}{a'}=\frac{b}{b'},$$

cioè:

$$k=\frac{b}{b'}a'$$

Quindi l'equazione richiesta è:

$$\frac{b}{b'}a'x+by+b'c=0$$

Nel caso numerico proposto abbiamo:

$$3x - 21y - 7 = 0$$

Esercizio 1353

Scrivere l'equazione della retta appartenente al fascio individuato dalle rette:

$$r)\ \ 2x + y - 1 = 0,\ \ s)\ 3x - 2y - 1 = 0, \tag{10}$$

e di coefficiente angolare $m = -1$.

***

Soluzione
Il fascio individuato dalle due rette assegnato ha equazione:

$$\lambda\,(\ 2x + y - 1) + \lambda'\,(3x - 2y - 1) = 0,$$

al variare dei parametri λ e λ' nel campo reale. Ciò equivale a dire che l'equazione della generica retta del fascio è:

$$(2\lambda + 3\lambda')\,x + (\lambda - 2\lambda')\,y - (\lambda + \lambda') = 0$$

Quindi dobbiamo determinare λ, λ' in modo da avere una retta con coefficiente angolare $m = -1$. Evidentemente:

$$m = \frac{2\lambda + 3\lambda'}{2\lambda' - \lambda}$$

Deve essere:

$$\frac{2\lambda + 3\lambda'}{2\lambda' - \lambda} = -1$$

Cioè:

$$\lambda + 5\lambda' = 0,$$

da cui:

$$\lambda = -5\lambda'$$

Se poniamo $\lambda' = -1$, si ha $\lambda = 5$, perciò l'equazione richiesta è:

$$7x + 7y - 4 = 0$$

Esercizio 1354

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare il valore del parametro k tale che la retta $t)$ $x+2y-k=0$ appartenga al fascio (proprio) individuato dalla seguente coppia di rette:

$$r) \ \ 2x+y-1=0, \ s) \ 3x+2y=0 \tag{11}$$

***

Soluzione
Come è noto, la condizione di appartenenza di tre rette (non parallele) allo stesso fascio proprio si esprime annullando il determinante del terzo ordine i cui elementi sono i coefficienti delle equazioni della singola retta. Quindi $t \in \mathcal{F}$ individuato da r, s se e solo se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 2 & -k \\ -3 & 0 & 2-k \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè:

$$4+k=0,$$

da cui:

$$k=-4$$

Esercizio 1355

Scrivere l'equazione della retta comune ai due fasci $\mathcal{F}_1 \{r_2, s_2\}$ e $\mathcal{F}_2 \{r_2, s_2\}$, essendo

$$\begin{gathered} r_1) \ x+y-2=0, \ s_1) \ x+2y-3=0 \\ r_2) \ x-y+1=0, \ s_2) \ 2x+y-7=0 \end{gathered}$$

***

Soluzione
L'equazione del fascio $\mathcal{F}_1$ è:

$$\lambda \left(\ x+y-2\right) + \lambda' \left(x+2y-3\right) = 0$$

Cioè:

$$(\lambda+\lambda')\,x+(\lambda+2\lambda')\,y-2\lambda-3\lambda'=0 \tag{12}$$

La retta t che stiamo cercando ha equazione (12) con assegnati valori dei parametri λ, λ'. Imponiamo ora $t \in \mathcal{F}_2$:

$$t \in \mathcal{F}_2 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda+\lambda' & \lambda+2\lambda' & -2\lambda-3\lambda' \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

giacchè al fascio $\mathcal{F}_2$ appartengono la retta t e le rette r_2, s_2 (ricordiamo che l'annullarsi del determinante esprime la condizione di appartenenza di tre rette ad uno stesso fascio). Sviluppando il determinante, si trova:

$$\lambda' = -\frac{3}{5}\lambda,$$

Ponendo ad esempio $\lambda = 5$, si ha $\lambda' = -3$, e quindi dalla (12) l'equazione di t:

$$2x - y - 1 = 0$$

Esercizio 1356

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare il valore del parametro k affinché la retta $r)$ $x+(k-1)\,y+2=0$ sia parallela alla retta $s)$ $3x-y-1=0$.

***

Soluzione

Ricordiamo che la retta $ax+by+c=0$ è parallela alla retta $a'x+by'+c'=0$ se e solo se i cofficienti della variabili x, y sono proporzionali. Quindi deve essere:

$$\frac{1}{3} = -(k-1)\,,$$

da cui:

$$k = \frac{2}{3}$$

Alternativamente, si può imporre l'uguaglianza dei coefficienti angolari. Il coefficiente angolare della retta r è

$$m = -\frac{1}{k-1}$$

Il coefficiente angolare della retta s è

$$m' = 3$$

Quindi:

$$r \parallel s \Longleftrightarrow m = m' \Longleftrightarrow k = \frac{2}{3}$$