Calcolo differenziale
(funzioni di più variabili reali)

Gabriele H. Greco
Dipartimento di Matematica
Università di Trento
38050 POVO (Trento) Italia
www.science.unitn.it/~greco

a.a. 2005-06: Appunti del corso di Analisi Matematica (3UD)

Cap. 1 — Linguaggio vettoriale e geometria elementare

A 23 anni Cartesio (1596-1650) concepisce distintamente con chiarezza ed evidenza la *geometria analitica* che pubblicherà nel 1637 come appendice al *Discorso sul metodo*. Contrapponendosi all'abitudine, ereditata dagli antichi geometri greci, di ragionare direttamente sulle figure, Cartesio propone nella sua *Géométrie* l'uso combinato di numeri e figure; così facendo, aggiunge alla chiarezza rappresentativa della geometria la brevità incisiva del simbolismo algebrico. Con Cartesio, la geometria viene algebrizzata e l'algebra viene geometrizzata.

Leibniz (1646-1716), più esigente di Cartesio, in una lettera del 1679 a Huygens (1629-1695) si augura che vi sia un'*analisi geometrica* che permetta di rappresentare ed operare direttamente sulle figure geometriche (punti, segmenti, triangoli, tetraedri,...), come l'algebra lo fa con le grandezze numeriche.

Con Bellavitis (1803-1880), R. W. Hamilton (1805-1865) e, soprattutto, con Grasmann (1809-1877) il sogno di Leibniz si concretizza: nasce il calcolo vettoriale. Divulgatori del nuovo e rivoluzionario linguaggio vettoriale sono Peano (1858-1932) e Gibbs (1839-1903). In particolare, Peano introduce la nozione moderna di spazio vettoriale nel 1888 e fonda assiomaticamente la geometria greca sui concetti di vettore e prodotto scalare.

In questo capitolo richiameremo quanto ci servirà degli spazi vettoriali. Principalmente, vedremo come concetti della geometria che si è appresa a scuola, possano essere *tradotti*, tramite il sistema di riferimento cartesiano, in concetti vettoriali. Ciò ci servirà a dare una *lettura* o visualizzazione geometrica di concetti, proprietà e teoremi riguardanti gli spazi numerici $\mathbb{R}^n$ delle n-uple di numeri reali.

1 $\mathbb{R}^n$: spazio vettoriale

$\mathbb{R}^n$ è un insieme. Con $\mathbb{R}^n$ si denota l'insieme delle n-uple

$$(x_1, x_2 \ldots, x_n)$$

di numeri reali $x_1, x_2 \ldots, x_n$, detti, rispettivamente, *prima, seconda,..., n-ima componente* (o *coordinata*). Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ sono detti **punti**.

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale. E' ben noto che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione n, rispetto alle seguenti operazioni di *addizione* e di *prodotto per scalari*:

$$(x_1, x_2 \ldots, x_n) + (y_1, y_2 \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \ldots, x_n + y_n)$$

$$t(x_1, x_2 \ldots, x_n) := (tx_1, tx_2 \ldots, tx_n).$$

L'elemento di $\mathbb{R}^n$ che ha tutte le sue componenti uguali a zero è "lo zero" per l'operazione di addizione; esso è denotato con $\mathbf{0}_n$ o, semplicemente, con $\mathbf{0}$, se non c'é ambiguità. Con $\mathbf{e}_1^n$, $\mathbf{e}_2^n, \ldots, \mathbf{e}_n^n$ o, se non c'é ambiguità, con

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$$

si denota la **base canonica** di $\mathbb{R}^n$. Per definizione, $\mathbf{e}_i$ è l'elemento di $\mathbb{R}^n$ che ha la componente i-ma uguale ad 1 e tutte le altre uguali a zero. Quindi

$$(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i. \tag{1}$$

Essendo $\mathbb{R}^n$ uno spazio vettoriale, i suoi elementi sono detti, anche, **vettori**; in particolare, $\mathbf{0}$ è detto **vettore nullo**.

Due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ si $\mathbb{R}^n$ sono detti **paralleli** (si scriverà $\mathbf{x}/\!\!/\mathbf{y}$), se sono linearmente dipendenti; in altre parole,

$$\mathbf{x}/\!\!/\mathbf{y} \iff \mathbf{y} = \mathbf{0} \text{ oppure } \exists t \text{ numero reale t.c. } \mathbf{x} = t\mathbf{y}. \tag{2}$$

Un sottoinsieme non vuoto V di $\mathbb{R}^n$ è detto (sotto)**spazio vettoriale**, se contiene tutte le combinazioni lineari di suoi elementi o, equivalentemente, se

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in V \text{ per ogni } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \text{ e per ogni } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

La **dimensione** di uno spazio vettoriale V sarà denotata con $\dim V$. Invece con $\mathrm{Lin}\, A$ denoteremo lo **spazio vettoriale generato** da A.

Per $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ definiamo

$$A+B := \{\mathbf{a}+\mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}, \ \mathbf{x}+A := A+\mathbf{x} := \{\mathbf{a}+\mathbf{x} : \mathbf{a} \in A\}, \ tA := \{t\mathbf{a} : \mathbf{a} \in A\}.$$

Esercizio 1 *Quanti numeri reali servono per individuare la posizione di un segmento di lunghezza fissa, di un triangolo, di un tetraedro o di un cubo?* □

Esercizio 2 *Fissati una retta e un piano dello spazio ordinario, quanti numeri reali servono per individuare la posizione di un segmento AB di lunghezza variabile, avente l'estremo A sulla retta e l'estremo B sul piano ?* □

Esercizio 3 *Sia* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. *Si dimostri che il grafico* $\mathrm{graf}(L) := \{(\mathbf{x}, L(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ *è uno sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^{n+k}$ *ssse* L *è lineare. Nel caso che* $\mathrm{graf}(L)$ *sia uno sottospazio vettoriale si dimostri che ha dimensione* n. □

Esercizio 4 *Fissati i numeri naturali* n *e* k*, quali sono i sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^{n+k}$ *che sono grafico di una funzione* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$*?* □ [Sugg. iniziare col rispondere nel caso che $n = k = 1, \ldots$]

2 $\mathbb{R}^n$: spazio euclideo

Prodotto scalare. Siano $\mathbf{x} := (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} := (y_1, y_2 \ldots, y_n)$ vettori di $\mathbb{R}^n$. Il *prodotto scalare*, denotato con $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, é definito da

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare è detto **spazio euclideo** di dimensione n. Per $n = 1$, il prodotto scalare è l'usuale prodotto di numeri reali.

Il prodotto scalare è una funzione da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ che è *bilineare*, *simmetrica* e *definita positiva*, cioè per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ vale quanto segue:

(definita positiva) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ per $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

(simmetrica) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

(lineare in x) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle$ *e* $\langle t\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

(lineare in y) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{y}' \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle$ *e* $\langle \mathbf{x}, t\mathbf{y} \rangle = t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

Se $\mathbf{x}$ è un elemento di $\mathbb{R}^n$, allora

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle = \text{`}i\text{-ima componente di } \mathbf{x}\text{' ;} \quad \text{perciò} \quad \mathbf{x} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i.$$

Ortogonalità. Due elementi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ di $\mathbb{R}^n$ sono detti **ortogonali** (si scriverà $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$), se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Si osservi che i vettori della base canonica sono a due a due ortogonali:

(1) $$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0 \text{ per } i \neq j$$

Sia V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$; il **complemento ortogonale** di V, denotato con $V^\perp$, è il sottospazio vettoriale definito da

(2) $$V^\perp := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \textit{ per ogni } \mathbf{x} \in V\};$$

in particolare, $(\mathbb{R}^n)^\perp = \{\mathbf{0}\}$, $\{\mathbf{0}\}^\perp = \mathbb{R}^n$. E' importante ricordare che

(3) $$\dim(V^\perp) = n - \dim(V) \text{ e } V^{\perp\perp} = V.$$

Esercizio 5 *Sia $W \subset \mathbb{R}^n$ sottoinsieme qualsiasi (non necessariamente, spazio vettoriale). Si definisca l'ortogonale $W^\perp$ come in* (2). *Si dimostri che* $\mathrm{Lin}W = W^{\perp\perp}$.□

Esercizio 6 *Sia M una matrice $m \times n$. Chi è il complemento ortogonale dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione '$M\mathbf{x}=\mathbf{0}$' in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$?* □

Esercizio 7 *Come determinare le equazioni parametriche e cartesiane di un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^n$, a partire da una base di V o di $V^\perp$?* □ [1]

Esercizio 8 *Determinare equazioni cartesiane e parametriche di un insieme che è grafico di una funzione.* □

---

[1]• Si dicono *equazioni cartesiane* di un insieme X, le equazioni di un sistema il cui insieme delle soluzioni è X. Es. '$x^2 + y^2 = 1$' è l'equazione cartesiana di una circonferenza.

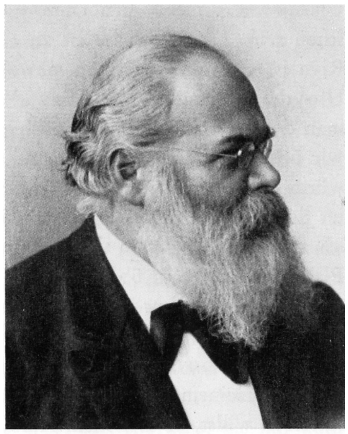
• Con l'espressione "*parametrizzare un insieme*" X, si intenderà "*determinarne le equazioni parametriche*". Si dicono *equazioni parametriche* di X, le equazioni di un sistema in cui gli elementi di X sono esplicitati in funzione di quantità variabili, dette *parametri*. Per es. i punti (x, y) di una circonferenza di raggio unitario sono descritti dalle equazioni parametriche (nel parametro $t \in [0, 2\pi]$):

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad \text{per } t \in [0, 2\pi]$$

• *Parametrizzare un insieme* X equivarrà a determinare una funzione φ – detta *parametrizzazione* di X – che ha per immagine X (in tal caso, il dominio φ costituisce l'insieme dei parametri). Il passaggio dalle equazioni parametriche alle cartesiane è detto "*eliminazione dei parametri*".

3 $\mathbb{R}^n$: spazio normato e metrico

A.L. Cauchy



Hermann Amandus Schwarz

<u>**Norma euclidea**</u>. Ad ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è associato un numero reale ≥ 0, detto **norma** (*euclidea*) di $\mathbf{x}$, denotato con $||\mathbf{x}||$ e definito da

$$||\mathbf{x}|| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle^2}.$$

Se $n = 1$, la norma coincide con l'usuale valore assoluto di numeri reali. I vettori la cui norma è uguale ad 1, sono detti **vettori unitari** o **versori**; ad esempio, i vettori della base canonica sono dei versori. Ad ogni vettore non nullo si associa un versore:

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}.$$

Importante è la **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \, ||\mathbf{y}|| \qquad \text{per ogni } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Pure importanti sono le seguenti tre proprietà, valide $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, t \in \mathbb{R}$:

(positività) $||\mathbf{x}|| \geq 0$ e "$||\mathbf{x}|| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$",

(omogeneità) $||t\mathbf{x}|| = |t| \, ||\mathbf{x}||$,

(disuguaglianza triangolare) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$,

(identità del parallelogramma) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = 2||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{y}||^2$.

<u>**Metrica euclidea**</u>. Ad ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ di $\mathbb{R}^n$ è associato un numero reale ≥ 0, detto **distanza** dei due punti, denotato con $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e definito da

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||.$$

Proprietà salienti della metrica euclidea sono la positività, la simmetria e la proprietà triangolare, cioè per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ valgono

(positività) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ e "$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$"

(simmetria) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

(disuguaglianza triangolare) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Esercizio 9 *Si dimostrino la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, le disuguaglianze triangolari e queste due equivalenze:* ($\bullet$) *"* $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ *ssse* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = ||\mathbf{x}|| \, ||\mathbf{y}||$*",* ($\bullet\bullet$) *"* $\mathbf{x} /\!/ \mathbf{y}$ *ssse* $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = ||\mathbf{x}|| \, ||\mathbf{y}||$*".* $\square$

Esercizio 10 (confronto tra norme) *Una funzione* $\mathbf{p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è detta* norma *se, come la norma euclidea, soddisfa le proprietà di positività, omogeneità e la disuguaglianza triangolare. Si dimostri che le funzioni* $\| \cdot \|_1$ *e* $\| \cdot \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definite da*

$$(1) \qquad ||\mathbf{x}||_1 := \sum_{i=1}^{n} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle| \quad e \quad ||\mathbf{x}||_\infty := \max\{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle| : 1 \leq i \leq n\}$$

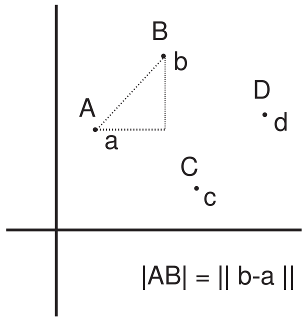
sono norme. Inoltre, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*, si verifichino le disuguaglianze:*

(2) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty$ *e* $\frac{1}{n}\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_1$.

(3) *Per* $n = 2$ *e* $n = 3$ *si descrivano geometricamente le loro "sfere unitarie"*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1\} \quad e \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}.$$

4 $\mathbb{R}^n$, modello per la Geometria Elementare

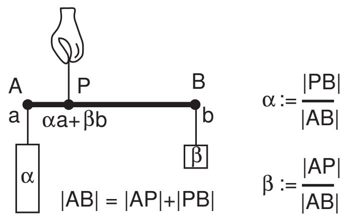


Parlando di Geometria Elementare, intendiamo riferirci alla Geometria appresa a scuola, durante gli anni delle medie o del liceo.

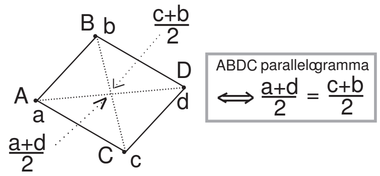
Poniamo n uguale ad 1, 2 o 3, a seconda del contesto geometrico (indicato con $\mathbf{P}_n$) in cui vogliamo agire; sia esso: la retta, il piano o lo spazio ordinario.

Vogliamo stabilire una corrispondenza tra i concetti di Geometria elementare e quelli di $\mathbb{R}^n$. Mezzo di traduzione o lettura sarà il *sistema di riferimento cartesiano.*

	a concetti di Geom. Elem.		**concetti di $\mathbb{R}^n$**
GE1	punti $A, B, C, D, ...$	$\to$ *coord.*$\to$	elementi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, ...$
GE2	distanza di A da B	$=$	$\\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\\|$
GE3	punti del segmento AB	$\to$ *coord.*$\to$	elementi di $\mathbf{a}\mapsto\mathbf{b}$
GE4	punto medio tra A e B	$\to$ *coord.*$\to$	$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$
GE5	$ABDC$ è un parallelogramma	$\iff$	$\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{d}-\mathbf{c}$
§5	segmenti orientati $AB, AC, ...$	$\to$ *coord.*$\to$	$\mathbf{v}:=\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{w}:=\mathbf{c}-\mathbf{a}, ...$
§5	misura in rad. dell' angolo $\widehat{BAC}$	$=$	$\widehat{\mathbf{vw}}$
$**$	parallelismo : $AB/\!\!/CD$	$\iff$	$(\mathbf{b}-\mathbf{a})/\!\!/(\mathbf{d}-\mathbf{c})$
$**$	perpendicolarità: $AB\perp CD$	$\iff$	$(\mathbf{b}-\mathbf{a})\perp(\mathbf{d}-\mathbf{c})$



Quanto ci insegna la Geometria Elementare, è sufficiente per convincerci della giustezza della precedente tabella di corrispondenze. Infatti, fissato un sistema di riferimento cartesiano in $\mathbf{P}_n$ (con assi ortogonali e stessa unità di misura sugli assi),

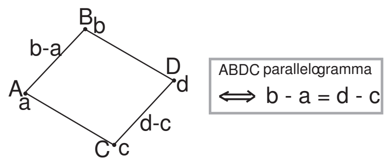


(GE1) a *punti* $A, B, C, D, \ldots$ di $\mathbf{P}_n$ corrispondono, in maniera univoca, le n-ple $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots$ delle loro coordinate,

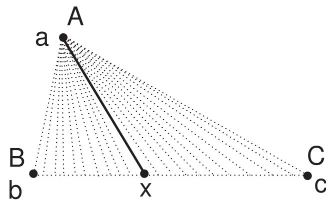
(GE2) ed $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$ è la *distanza* di A da B (calcolata con il teorema di Pitagora);

(GE3) un punto P giace sul *segmento* AB ssse la somma delle sue distanze da A e B è pari alla lunghezza di AB. Quindi, da (2) e (3) dell'es. 11 segue che l'insieme di tutti gli elementi di $\mathbb{R}^n$ che sono coordinate di punti P del segmento AB, é $\mathbf{a}\mapsto\mathbf{b} := \{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \alpha+\beta=1\}$, poichè

$$\mathbf{a}\mapsto\mathbf{b} = \{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^n : \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}-\mathbf{p}\| + \|\mathbf{p}-\mathbf{a}\|\};$$



(GE4) il *punto medio* tra A e B è l'unico punto le cui distanze da A e B sono metà di quella di A da B; quindi le sue coordinate sono $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$;



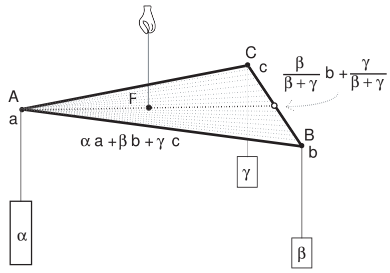
(GE5) un quadrilatero $ABDC$ è un *parallelogramma* ssse le sue diagonali si dimezzano; cioè ssse $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}}{2} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$;quindi ssse $\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{d}-\mathbf{c}$.

Esercizio 11 *Siano* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *con* $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ *e* $\alpha+\beta=1$. *Si dimostri:*

(1) $\|\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}\|^2 + \alpha\beta\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = \alpha\|\mathbf{a}\|^2 + \beta\|\mathbf{b}\|^2$;

(2) $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ *ssse* $\|\mathbf{a}-\mathbf{p}\| = \beta\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$ *e* $\|\mathbf{b}-\mathbf{p}\| = \alpha\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$. ⟦Sugg. In (1) si rimpiazzino $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ con $\mathbf{a}-\mathbf{p}$ e $\mathbf{b}-\mathbf{p}$⟧.

(3) $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ *ssse* $\|\mathbf{a}-\mathbf{p}\| + \|\mathbf{p}-\mathbf{b}\| = \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$ *e* $\beta\|\mathbf{b}-\mathbf{p}\| = \alpha\|\mathbf{a}-\mathbf{p}\|$. □



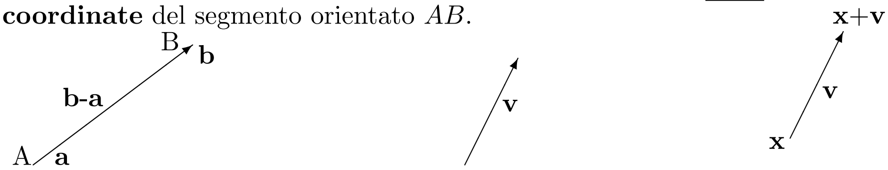
Esercizio 12 *Siano* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. *Definiamo l'insieme* $\mathrm{triang}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \cup\{\mathbf{a}\mapsto\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{b}\mapsto\mathbf{c}\}$, *detto* **triangolo** *di vertici* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. *Si dimostri che*

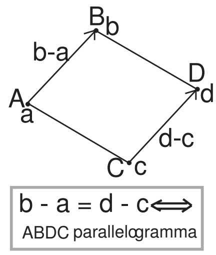
(4) $$\mathrm{triang}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+, \alpha+\beta+\gamma=1\},$$

tenendo conto che $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + (\beta+\alpha)(\frac{\beta}{\beta+\gamma}\mathbf{b} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\mathbf{c})$ *per* $\beta+\gamma \neq 0$. □

5 Coordinate di un segmento orientato

Siano A e B due punti di $\mathbf{P}_n$ con coordinate $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. La differenza $\boxed{\mathbf{b\text{-}a}}$ è detta n-pla delle **coordinate** del segmento orientato AB.





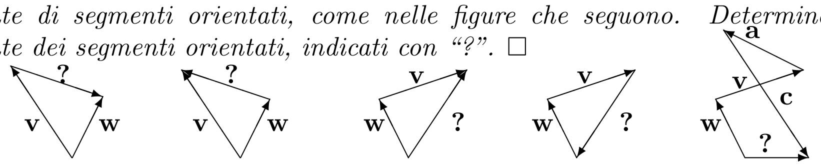
• *Le coordinate* $\mathbf{v}$ *di un segmento orientato* AB *specificano di quanto bisogna incrementare le coordinate del primo estremo* A *per ottenere quelle del secondo.*

Le n-uple delle coordinate di punti distinti di $\mathbf{P}_n$ sono distinte. Invece, le n-uple delle coordinate di segmenti orientati distinti possono coincidere. Più precisamente,

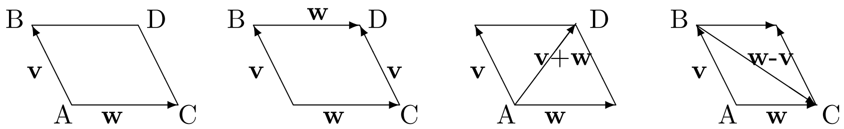
• *le coordinate di due segmenti orientati* AB *e* CD *sono uguali ssse il quadrilatero* $ABDC$ *è un parallelogramma* (vedi GE5).

Per il calcolo delle coordinate di segmenti orientati, ecco alcune regole.

Esercizio 13 (somma e differenza di segmenti orientati) *Siano* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ *le coordinate di segmenti orientati, come nelle figure che seguono. Determinare le coordinate dei segmenti orientati, indicati con "?".* □



Esercizio 14 (regola del parallelogramma) *Dato un parallelogramma* $ABDC$*. Se le coordinate dei segmenti orientati* AB *e* AC *sono* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$*, quali sono le coordinate degli altri due lati* BD *e* CD *? Quali sono le coordinate delle diagonali* AD *e* BC *?* □



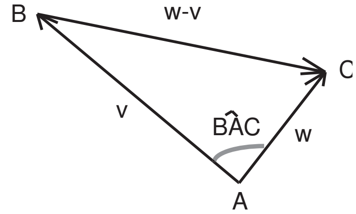
Esercizio 15 (uguaglianza del parallelogramma) *Si dimostri "vettorialmente" che "la somma dei quadrati costruiti sui lati di un parallelogramma è uguale alla somma dei quadrati sulle diagonali.* □

Angolo tra vettori e **tra segmenti orientati**. Dati due vettori non nulli $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{w}$ di $\mathbb{R}^n$, grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, esiste un unico numero reale $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||} \tag{1}$$

è detto **angolo** tra i due vettori; se necessario, sarà denotato con $\widehat{\mathbf{vw}}$. Solitamente, la (1) si presenta come

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos(\widehat{\mathbf{vw}}). \tag{2}$$

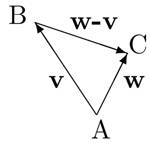


Ora, nell'ambito della Geometria Elementare si tracci un triangolo di vertici A, B, C tali che le coordinate dei segmenti orientati AB e AC siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e si indichi con $\widehat{BAC}$ la *misura in radianti* dell'angolo in A.

L'angolo $\widehat{\mathbf{vw}}$ *tra vettori coincide con la misura in radianti* $\widehat{BAC}$*?* Sì!

Infatti, denotate con $|AB|, |AC|, |BC|$ le misure dei lati del triangolo, osserviamo:

$$|AB| = \|\mathbf{v}\|,\ |AC| = \|\mathbf{w}\|,\ |BC| = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|. \tag{5}$$



Applicando il teorema di Carnot al triangolo ABC si ottiene

(6) $$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos(\widehat{BAC});$$

d'altra parte, svolgendo il quadrato $\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2$ abbiamo

(7) $$\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{w}-\mathbf{v}, \mathbf{w}-\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle.$$

Quindi, usando (2) e (5), dal confronto di (6) con (7) si ottiene che $\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\widehat{\mathbf{wv}})$; quindi $\widehat{BAC} = \widehat{\mathbf{wv}}$, come si voleva mostrare.

Esercizio 16 *Siano* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *non nulli. Si dimostrino le seguenti equivalenze:*

(8) $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \widehat{\mathbf{vw}} = \frac{\pi}{2}$ *(due vettori sono ortogonali ssse formano angolo retto)*

(9) $\mathbf{v} /\!/ \mathbf{w} \iff \widehat{\mathbf{vw}} \in \{0, \pi\}$

(10) $||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| = ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}|| \iff \widehat{\mathbf{vw}} = 0$

(11) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \le 0 \iff \frac{\pi}{2} \le \widehat{\mathbf{vw}} \le \pi \iff$ *l'angolo* $\widehat{\mathbf{vw}}$ *è retto o ottuso.*

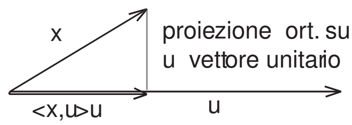
(12) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \ge 0 \iff 0 \le \widehat{\mathbf{vw}} \le \frac{\pi}{2} \iff$ *l'angolo* $\widehat{\mathbf{vw}}$ *è retto o acuto.* □

Esercizio 17 (parallelismo) *Sia AB un segmento ordinato di coordinate $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Se CD è un segmento ordinato, parallelo a AB, allora le coordinate di CD sono un multiplo di $\mathbf{v}$. E viceversa,...*□

Esercizio 18 (rette e semirette) *Siano A e B due punti distinti della Geometria Elementare con coordinate $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Usando la nozione di "segmento" o quella di "angolo", si dimostri che le coordinate dei punti della retta passante per A e B, formano l'insieme* $\boxed{\{\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}) : t \in \mathbb{R}\}}$. *Analogamente, si dimostri che le coordinate dei punti della semiretta uscente da A e passante per B, formano l'insieme* $\boxed{\{\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}) : t \in \mathbb{R}_+\}}$. □

Esercizio 19 *Siano A e B due punti distinti della Geometria Elementare con coordinate $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. E sia C un terzo punto di coordinate $\mathbf{c}$. Quali insiemi della Geom. Elem. sono descritti dagli insiemi $\{\mathbf{c}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}) : t \in \mathbb{R}\}$ e $\{\mathbf{c}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}) : t \in \mathbb{R}_+\}$?* □

Esercizio 20 (proiezione ortogonale) *Fissato un vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ non nullo, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ il vettore $\mathbf{v} := \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle}{||\mathbf{u}||^2}\mathbf{u}$ è detto* **proiezione ortogonale** *del vettore $\mathbf{x}$ sul vettore $\mathbf{u}$. Si dimostri che $\mathbf{x} = (\mathbf{x}-\mathbf{v})+\mathbf{v}$, $(\mathbf{x}-\mathbf{v})\perp\mathbf{u}$, $\mathbf{v}/\!/\mathbf{u}$ e $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle| = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\|$.* □



Esercizio 21 *Si dimostrino "vettorialmente" queste ben note proprietà di Geometria Elementare.*

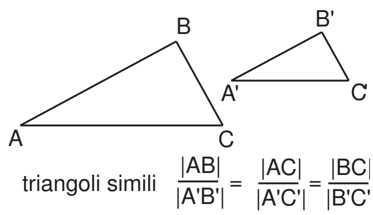
(13) – **teorema di Pitagora** – *"il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti".*

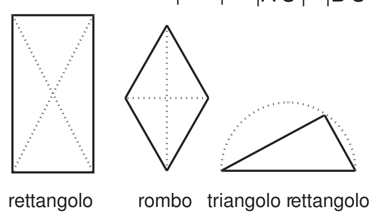
(14) – **teorema di Talete** – *"Lati corrispondenti di triangoli simili sono nelle stesse proporzion"*

(15) – **sui rombi** – *"un rombo è un parallelogramma con diagonali perpendicolari".*

(16) – **sui rettangoli** – *"un rettangolo è un parallelogramma con diagonali uguali".*

(17) – **sui triangoli rettangoli** – *"Un triangolo ABC è rettangolo in B ssse il punto B è sulla circonferenza di diametro AB".* □





6 Segmenti, insiemi convessi e funzioni convesse

Segmenti. Dati due punti $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ di $\mathbb{R}^n$, il **segmento** che li congiunge, già denotato con $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}_1$, sarà anche denotato con $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$. È stato definito da

(1) $$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] := \{\alpha \mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{x}_1 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \ \alpha + \beta = 1\}.$$

I punti $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ sono detti *estremi* del segmento. Facilmente si verifica che

(2) $$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] = \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Insiemi convessi. Un sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] \subset C$ per ogni $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$. In altre parole, C è convesso se contiene tutti i segmenti che hanno estremi in C.

Gli intervalli sono i soli sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}$. Esempi banali di convessi di $\mathbb{R}^n$ sono: $\mathbb{R}^n$, l'insieme vuoto, i singoletti, i segmenti, i triangoli, i sottospazi vettoriali.

L'intersezione di una famiglia finita o infinita di convessi di $\mathbb{R}^n$ è un convesso.

Le combinazioni lineari (finite) del tipo

(3) $$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i \text{ con coefficienti } \alpha_i \geq 0 \text{ a somma } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

sono dette **combinazioni convesse** degli elementi $\mathbf{x}_i$.

Proposizione 1 *Un insieme convesso contiene tutte le combinazioni convesse di suoi elementi.* [Sugg. Dimostrarla per induzione, tenendo conto che $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \mathbf{x}_i = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \omega \sum_{i=2}^{k+1} \frac{\alpha_i}{\omega} \mathbf{x}_i$, qualora $\omega := \sum_{i=2}^{k+1} \alpha_i \neq 0$.]

Funzioni convesse Sia $\mathbf{f} : C \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un convesso $C \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che $\mathbf{f}$ è **convessa**, se $\forall\, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in C$, $\forall\, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$, si ha:

(4) $$\mathbf{f}\big(\alpha \mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{x}_1\big) \leq \alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \beta \mathbf{f}(\mathbf{x}_1).$$

Una funzione $\mathbf{f}$ è detta **concava**, se $-\mathbf{f}$ è convessa. Come nel caso delle funzioni di una variabile, si ha che $\mathbf{f}$ è convessa se e solo se l'epigrafico

(5) $$\boxed{\operatorname{epi}(\mathbf{f}) := \{(\mathbf{x}, r) \in C \times \mathbb{R} : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq r\}}$$

è un convesso di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Esercizio 22

(6) *Qualunque sia la famiglia finita $\{x_i\}_{i=1}^k$ di elementi di $\mathbb{R}^n$, l'insieme $\{\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i : \{\alpha_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$ è convesso.*

(7) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme qualsiasi. Allora l'insieme* $\operatorname{conv}(A) := \{\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i : k \in \mathbb{N}_1, \{x_i\}_{i=1}^k \subset A, \{\alpha_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$ *è convesso e, di più, è il più piccolo convesso contenente A.*

(8) *Se $\mathbf{f} : C \to \mathbb{R}$ è convessa, allora $\mathbf{f}\big(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i\big) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ per ogni combinazione convessa $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$ di elementi di $\mathbf{x}_i$ di C.*

(9) *Se $\mathbf{f}$ è convessa, allora sono convessi i sottolivelli* $\boxed{\{\mathbf{f} \leq a\} := \{\mathbf{x} \in C : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq a\}}$ *e* $\boxed{\{\mathbf{f} < a\} := \{\mathbf{x} \in C : \mathbf{f}(\mathbf{x}) < a\}}$.

(10) *Per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^n$, si definisca* $\boxed{[\mathbf{a}, B] := \bigcup_{\mathbf{x} \in B} [\mathbf{a}, \mathbf{x}]}$. *Si dimostri che $[\mathbf{a}, B]$ è convesso, se B è convesso.* $\square$

7 Rette, sottospazi affini e funzioni affini

Rette e sottospazi affini. Per ogni paio di punti $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_1$ di $\mathbb{R}^n$, si definisca l'insieme

$$\text{ret}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) := \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) : t \in \mathbb{R}\}; \tag{1}$$

quando i due punti sono distinti, è detto **retta**. Facilmente, si verifica che

$$\text{ret}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = \{\alpha\mathbf{x}_0 + \beta\mathbf{x}_1 : \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha + \beta = 1\} \tag{2}$$

Un insieme non vuoto $H \subset \mathbb{R}^n$ si dice (sotto)**spazio affine** di $\mathbb{R}^n$, se $\text{ret}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \subset H$ per ogni $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in H$. In altre parole, H è un sottospazio affine, se contiene le rette passanti per punti distinti di H. Esempi di sottospazi affini sono: i punti, le rette, i sottospazi vettoriali.

L'intersezione di due o più sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio affine, se non è vuota.

Le combinazioni lineari (finite) del tipo

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i \text{ con coefficienti } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ a somma } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \tag{3}$$

sono dette **combinazioni affini** degli elementi $\mathbf{x}_i$.

Proposizione 2 *Un sottospazio affine contiene tutte le combinazioni affini di suoi elementi.* [Sugg. Dimostrarla per induzione, tenendo conto che $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \mathbf{x}_i = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \omega \sum_{i=2}^{k+1} \frac{\alpha_i}{\omega} \mathbf{x}_i$, qualora $\omega := \sum_{i=2}^{k+1} \alpha_i \neq 0$.]

Se H è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbf{x}_0 \in H$, allora

$$\vec{H} := H - \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

è uno sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$; $\vec{H}$, detto *spazio vettoriale associato* ad H, non dipende dalla scelta di $\mathbf{x}_0$ in H. La *dimensione* di H è, per definizione, quella di $\vec{H}$; H è detto **iperpiano** se ha dimensione $n - 1$.

Funzioni affini Una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è detta **affine**, se

$$\mathbf{f}\big(\alpha\mathbf{x}_0 + \beta\mathbf{x}_1\big) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \beta\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \tag{5}$$

per ogni $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha + \beta = 1$.

Proposizione 3 *Se* $\mathbf{f}$ *è affine, allora valgono le seguenti proprietà:*

(6) $\mathbf{f}\big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i\big) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$, *qualunque sia la combinazione affine* $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i$.

(7) *la funzione* $\vec{\mathbf{f}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, *definita da* $\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{v}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, *è lineare e, inoltre, non dipende dalla scelta di* $\mathbf{x}_0$ *in* $\mathbb{R}^n$. □

Esercizio 23 *Si dimostrino le seguenti proprietà.*

(8) *Sia* $A \subset \mathbb{R}^n$ *non vuoto e* $\mathbf{x}_0$ *un suo elemento. Il più piccolo sottospazio affine contenente* A, *è l'insieme* $\text{Aff}(A) := \mathbf{x}_0 + \text{Lin}(A - \mathbf{x}_0)$.

(9) *La somma* $H_1 + H_2$ *di due sottospazi affini* H_1, H_2 *di* $\mathbb{R}^n$ *è un sottospazio affine. In particolare* $V + \mathbf{x}_0$ *è uno spazio affine, se* $V \subset \mathbb{R}^n$ *spazio vettoriale e* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

(10) **(equazioni cartesiane di un sottospazio affine)** *Sia* H *un sottospazio affine di* $\mathbb{R}^n$ *di dimensione* $m < n$; *sia* $\mathbf{x}_0 \in H$. *Si ponga* $k := n - m$. *Allora esistono* k *vettori* $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathbb{R}^n$ *(linearmente indipendenti) tali che* $H = \{\mathbf{x} : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ *per* $i \in 1..k\}$. □

8 Funzioni polinomiali

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di n variabili reali, denotate ordinatamente dalle lettere $x_1, x_2, \dots, x_n$. La **funzione** f è detta **polinomiale**, se è ottenibile mediante un numero finito di operazioni di addizione e moltiplicazione a partire da funzioni lineari o costanti.

In altre parole, **funzioni polinomiali** sono le funzioni costanti, quelle definite da:

$$f(x_1, \dots, x_n) := x_1, \quad f(x_1, \dots, x_n) := x_2, \dots, \quad f(x_1, \dots, x_n) := x_n \tag{1}$$

e quelle ottenute da queste via combinazioni lineari di loro prodotti. Per esempio:

$f(x_1, \dots, x_n) := x_1x_2$, $f(x_1, \dots, x_n) := x_3^2x_2+\sqrt{3}$, $f(x_1, \dots, x_n) := 5x_1^4+x_2x_3^7x_1+x_n$.

<u>**Forme lineari**</u>. Le forme lineari sono funzioni polinomiali omogenee di 1^o grado; ad ogni $\mathbf{v} := (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ corrisponde la forma lineare definita da

$$f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n v_ix_i \quad \text{oppure da} \quad f(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle. \tag{2}$$

<u>**Forme bilineari**</u>. Ad ogni forma bilineare $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è associata una matrice quadrata $A := (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ con termine generale $a_{ij} := g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Possiamo scrivere [2]

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{1\le ij\le n} a_{i,j}x_iy_j. \tag{3}$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Quindi ogni forma bilineare (e, più in generale, ogni forma multilineare) è una funzione polinomiale.

<u>**Forme quadratiche**</u>. Una funzione $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta *forma quadratica*, se

(4) $Q(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

(5) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{Q(\mathbf{x}+\mathbf{y})-Q(\mathbf{x})-Q(\mathbf{y})}{2}$ è bilineare (necessariamente, simmetrica).

Diremo che g è la *forma bilineare simmetrica associata* alla forma quadratica Q; essa è l'unica forma bilineare simmetrica tale che $Q(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Denotata, come sopra, con A la matrice simmetrica corrispondente a g, abbiamo

$$Q(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}x_ix_j \tag{6}$$

Perciò una forma quadratica è semplicemente una funzione polinomiale omogenea di 2^o grado. Un esempio: $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita da $Q(x, y, z) := x^2 + zx + 4xy - z^2$.

Esercizio 24 *Siano M e N matrici $n\times n$. Si dimostri che le applicazioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ definite da $\mathbf{x} \mapsto \langle M\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ e da $\mathbf{x} \mapsto \langle M\mathbf{x}, N\mathbf{x}\rangle$ sono forme quadratiche. Si determinino le loro matrici simmetriche.* □

Esercizio 25 *Trovare una funzione $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che verifica* (5)*, ma non* (4)*.* □

<u>**Forme multilineari**</u>. La forma multilineare più usata è il **determinate**.

Per ogni n-upla $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ di elementi arbitrari di $\mathbb{R}^n$, con $\big((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)\big)$ denoteremo la matrice quadrata $n \times n$ le cui colonne sono, ordinatamente, i vettori dell'n-upla. Il determinante sarà denotato, come al solito, con $\boxed{\det\big((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)\big)}$.

[2] **Convenzione generale su un abuso di linguaggio**: Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ saranno identificati con le matrici ad una colonna, qualora l'espressione in cui appaiono lo richieda. Come esercizio, dare senso alle seguenti espressioni: '$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$', '$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = {}^t\mathbf{x}\,\mathbf{y}$', '$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, {}^tA\mathbf{y}\rangle$', '$\langle M\mathbf{x}, N\mathbf{y}\rangle = \langle {}^tNM\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$', dove $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e A, M, N sono matrici $n \times n$.