Funzioni reali di $n$variabili reali

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Sia $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$

Definizione. Una funzione reale f delle n variabili reali x_k $(k = 1, 2, ..., n)$ è una legge:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{1}$$

che ad ogni $P(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ associa univocamente il numero reale $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. L'insieme X è l'**insieme di definizione** della funzione.

Osservazione. Una funzione viene indicata con una lettera del tipo f, g, mentre il valore assunto in un punto $P(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$, con $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ o con $f(P)$.

Definizione. Dicesi ***diagramma cartesiano*** o ***grafico*** di una funzione f, l'insieme di punti:

$$\Gamma = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)\right\}$$

Ad esempio, per $n = 2$, il grafico di f è:

$$\Gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\right\},$$

cioè la superficie di equazione $z = f(x, y)$. Qui è possibile definire le **curve di livello** della funzione f, cioè le curve di equazione $f(x, y)$ =costante.

Esempi

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Qui è $X = \mathbb{R}^2$, mentre il grafico è un paraboloide di rivoluzione[1].

***

$$f(x, y) = \ln(x + y)$$

L'insieme di definizione è il semipiano

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty,\ y > -x\right\},$$

che è un campo illimitato e connesso.

***

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Qui è $X = \mathbb{R}^2$, mentre il grafico è un paraboloide iperbolico.

[1] È una superficie di rotazione, in questo caso dovuta alla rotazione di una parabola attorno all'asse z.

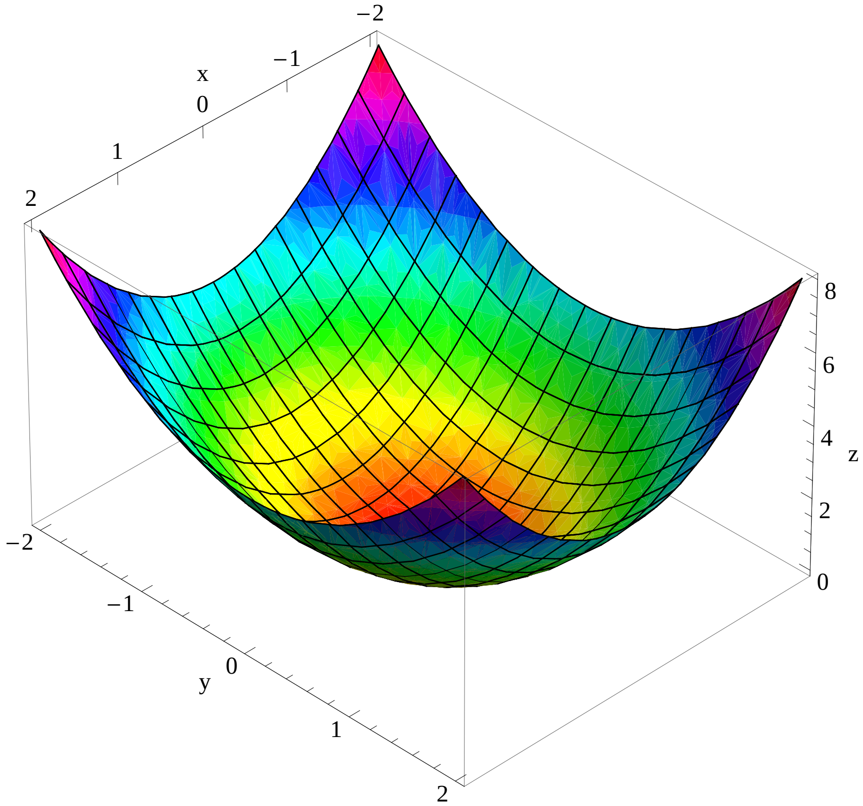

Figure 1: Grafico di $f(x, y) = x^2 + y^2$

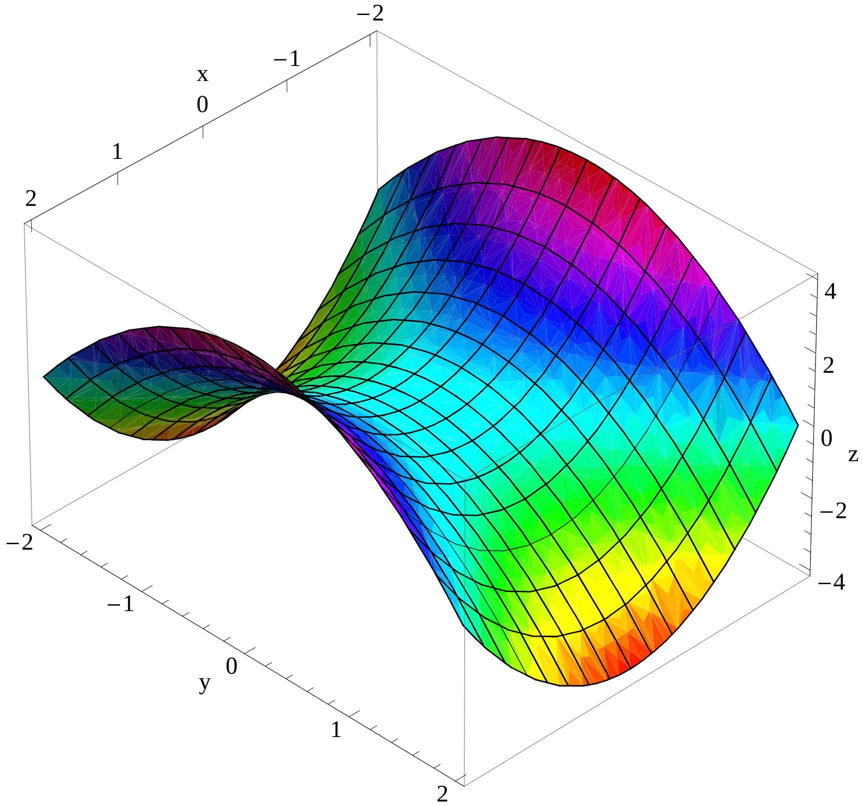

Figure 2: Grafico di $f(x, y) = x^2 - y^2$

1 Limite di una funzione di più variabili.

Definizione. $I(\infty) \subset \mathbb{R}^n$ è un **intorno del punto all'infinito)** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall \delta > 0,\, I(\infty) \cap C(I_\delta(O)) \neq \emptyset$,
essendo

$$I_\delta(O) = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \delta^2 \right\},$$

cioè il campo circolare di centro l'origine delle coordinate e raggio δ.

Definizione. Il punto all'infinito è di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}^n$, se in ogni suo intorno cade almeno un punto di X.

Sia f definita in $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Se il punto all'infinito è di accumulazione per X, sussiste la definizione seguente:

Definizione. La funzione f è **convergente** per $P \to \infty$, se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall J_\varepsilon(l),\, \exists I(\infty) \mid P \in X \cap I(\infty) \Longrightarrow f(P) \in J_\varepsilon(l),$$

essendo $J_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ un intorno di l. Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = l$$

La defnzione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = l \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid P \in X \quad \rho > \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(P) - l| < \varepsilon$$

essendo $\rho = \overline{OP} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

Definizione. La funzione f è **divergente positivamente** per $P \to \infty$, se

$$\forall J_\varepsilon(+\infty),\exists I(\infty) \mid P \in X \cap I(\infty) \Longrightarrow f(P) \in J_\varepsilon(+\infty),$$

essendo $J_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon, +\infty)$.
Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = +\infty$$

La definizione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = +\infty \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid P \in X \quad \rho > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(P) > \varepsilon$$

Definizione. La funzione f è **divergente negativamente** per $P \to \infty$, se

$$\forall J_{\varepsilon}(-\infty), \exists I(\infty) \mid P \in X \cap I(\infty) \Longrightarrow f(P) \in J_{\varepsilon}(-\infty),$$

essendo $J_{\varepsilon}(-\infty) = (-\infty, -\varepsilon)$.
Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = -\infty$$

La definzione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \to \infty} f(P) = -\infty \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0 \mid P \in X, \quad \rho > \delta_{\varepsilon} \Longrightarrow f(P) < -\varepsilon$$

Sia $P_0 \in \mathcal{D}(X)$

Definizione. La funzione f è **convergente** in P_0, se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall J_{\varepsilon}(l), \exists I_{\delta_{\epsilon}}(P_0) \mid P \in X \cap I_{\delta_{\epsilon}}(P_0) - \{P_0\} \Longrightarrow f(P) \in J_{\varepsilon}(l)$$

Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l$$

La definizione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0 \mid P \in X \;, \quad 0 < \rho < \delta_{\varepsilon} \Longrightarrow |f(P) - l| < \varepsilon$$

Qui è $\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2}$, essendo $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ le coordinate di P_0.

Definizione. La funzione f è **divergente positivamente** in P_0, se

$$\forall J_{\varepsilon}(+\infty), \exists I_{\delta_{\epsilon}}(P_0) \mid P \in X \cap I_{\delta_{\epsilon}}(P_0) - \{P_0\} \Longrightarrow f(P) \in J_{\varepsilon}(+\infty)$$

Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = +\infty$$

La definizione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = +\infty \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0 \mid P \in X \;, \quad 0 < \rho < \delta_{\varepsilon} \Longrightarrow f(P) > \varepsilon$$

Definizione. La funzione f è **divergente negativamente** in P_0, se

$$\forall J_{\varepsilon}(-\infty), \exists I_{\delta_\epsilon}(P_0) \mid P \in X \cap I_{\delta_\epsilon}(P_0) - \{P_0\} \Longrightarrow f(P) \in J_{\varepsilon}(-\infty)$$

Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = -\infty$$

La definizione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = -\infty \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid P \in X, \quad 0 < \rho < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(P) < -\varepsilon$$

Nel caso di una funzione di due variabili, si usa scrivere:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l,$$
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = l$$

anzichè:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = l$$

Esempio 1

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Risulta:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{x^2+y^2} > \delta_\varepsilon \Longrightarrow x^2 + y^2 > \varepsilon$$

Quindi:

$$\lim_{(x,y) \to \infty} \left(x^2 + y^2\right) = +\infty$$

Esempio 2

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \tag{2}$$

Questa funzione è definita in $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, con $O(0,0)$ punto di accumulazione, per cui studiamo il comportamento nel limite per $(x,y) \to (0,0)$. A tale scopo osserviamo che:

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{0\}\,,\; f(0,y) = 0$$
$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}\,,\; f(x,0) = 1$$

Quindi

$$\forall I_\delta(O)\,,\; \exists \infty P \in X \mid f(P) = 0,\, 1$$

Si conclude:

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Ciò può essere visto passando a coordinate polari nel piano xy:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Segue $f(r,\varphi) = \cos^2\varphi$.
Il limite è:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0}\cos^2\varphi = \cos^2\varphi$$

Cioè il valore dipende dalla direzione (φ) secondo cui $P(x,y)$ si avvicina all'origine. Da ciò segue che il limite non esiste. Si noti che i valori 0 e 1 vengono riprodotti ponendo $\varphi = \pi/2$ ($P(x,y)$ si avvicina all'origine lungo l'asse y) e $\varphi = 0$ ($P(x,y)$ si avvicina all'origine lungo l'asse x).
Il grafico è riportato in fig 3.

Osservazione. I teoremi sui limiti delle funzioni di una variabile si estendono al caso di $n > 1$ variabili.

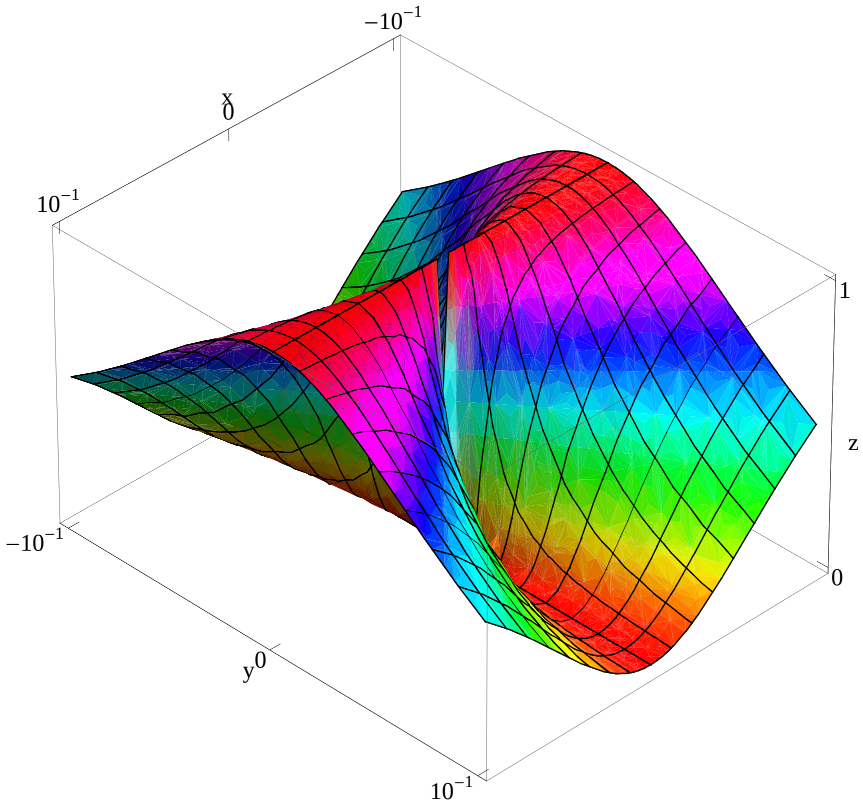

Figure 3: Grafico di $f\left(x,y\right)=\frac{x^{2}}{x^{2}+y^{2}}$