

Curve regolari

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Consideriamo una funzione reale di una variabile reale x definita in un intervallo X .

$$f : X \mapsto \mathbb{R}$$

Come è noto, il diagramma cartesiano di $f(x)$ è la curva \mathcal{C} $y = f(x)$. Utilizzando un linguaggio suggestivo ma efficace, diremo che \mathcal{C} è una *curva liscia*, se $f \in C^1(X)$, cioè se f è continua e dotata di derivata continua. La continuità di f implica che \mathcal{C} è priva di interruzioni. L'esistenza della derivata garantisce l'esistenza della retta tangente in ogni punto, ed infine la continuità della derivata implica l'assenza di punti angolosi.

Diamo ora una definizione più rigorosa. Iniziamo con una rappresentazione parametrica di \mathcal{C} nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 . A tale scopo consideriamo le funzioni reali $x(t), y(t), z(t)$ della variabile reale t , definite nell'intervallo A . Resta così definito il luogo geometrico dei punti:

$$\mathcal{C}) \quad x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t \in A \quad (1)$$

Definizione. Il luogo geometrico \mathcal{C} di rappresentazione parametrica (1) è una **curva regolare** se:

1. $x(t), y(t), z(t) \in C^1(A)$
2. $\forall t \in A, [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 > 0$
3. $t', t'' \in A, t' \neq t'' \implies x(t') \neq x(t''), y(t') \neq y(t''), z(t') \neq z(t'')$

La condizione 2 ci dice che le derivate delle funzioni $x(t), y(t), z(t)$ non si annullano mai contemporaneamente. La condizione 3 garantisce l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra i punti di \mathcal{C} e i punti di A ; geometricamente ciò significa che la curva non si "intreccia".

L'intervallo A si chiama **intervallo base** della rappresentazione parametrica (1). Determiniamo ora l'equazione della retta tangente in un generico punto di \mathcal{C} . Sia $P_0 [x(t_0), y(t_0), z(t_0)] \in \mathcal{C}$. Se Δt è un incremento di t_0 tale $(t_0 + \Delta t) \in A$, resta definito il punto $P [x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t)] \in \mathcal{C}$. Dalla condizione 3 segue immediatamente:

$$\Delta t \neq 0 \implies P_0 \neq P$$

Consideriamo quindi la retta s_0 passante per P_0, P . Chiamiamo s **retta secante** a \mathcal{C} per i punti P_0, P . Dalla Geometria analitica sappiamo che l'equazione di s_0 è:

$$s_0) \frac{x - x(t_0)}{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)} \quad (2)$$

Dividendo per $\Delta t \neq 0$:

$$s_0) \frac{x - x(t_0)}{\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}} = \frac{y - y(t_0)}{\frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}} = \frac{z - z(t_0)}{\frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}} \quad (3)$$

Se $\Delta t \rightarrow 0$, il punto P tende a P_0 e la retta s_0 ruota attorno a P_0 per tendere ad una posizione limite che indichiamo con τ_0 . L'equazione di τ_0 si ottiene dalla (3) tenendo conto

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0) \text{ e simili}$$

Quindi:

$$\tau_0) \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)} \quad (4)$$

τ_0 è la **retta tangente** a \mathcal{C} nel punto P_0 . Si osservi che l'esistenza di tale retta è garantita oltre che dalla derivabilità delle funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, dalla condizione 2 poichè le tre derivate non si annullano mai contemporaneamente. Dalla geometria analitica segue che i numeri direttori¹ di τ_0 sono:

$$l_0 = x'(t_0), m_0 = y'(t_0), n_0 = z'(t_0) \quad (5)$$

Definizione. Dicesi **piano normale** a \mathcal{C} nel punto P_0 , il piano π per P_0 e perpendicolare a τ_0 .

L'equazione di π è:

$$[x - x(t_0)] l_0 + [y - y(t_0)] m_0 + [z - z(t_0)] n_0 = 0 \quad (6)$$

I coseni direttori della retta tangente τ_0 sono:

$$\lambda_0 = \frac{x'(t_0)}{\pm F(t_0)}, \mu_0 = \frac{y'(t_0)}{\pm F(t_0)}, \nu_0 = \frac{z'(t_0)}{\pm F(t_0)}, \quad (7)$$

essendo:

$$F(t) \stackrel{def}{=} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \quad (8)$$

¹Ricordiamo che i numeri direttori di una retta r sono le componenti di un qualunque vettore parallelo a r . I coseni direttori sono le componenti di uno dei due versori di r (se r non è orientata) e si identificano con i coseni degli angoli che r forma con gli assi coordinati.

Il doppio segno nella (7) si giustifica osservando che esistono due terne di coseni direttori corrispondenti alle due possibili orientazioni di τ_0 . Per definizione assumiamo:

$$\lambda_0 = \frac{x'(t_0)}{F(t_0)}, \mu_0 = \frac{y'(t_0)}{F(t_0)}, \nu_0 = \frac{z'(t_0)}{F(t_0)}, \quad (9)$$

Per ogni valore di t :

$$\lambda = \frac{x'(t)}{F(t)}, \mu = \frac{y'(t)}{F(t)}, \nu = \frac{z'(t)}{F(t)}, \quad (10)$$

che corrispondono al verso delle t crescenti.

Ad esempio, assegnata la curva piana:

$$\mathcal{C}) \quad x(t) = 2 + t, \quad y(t) = 1 + t^2, \quad t \in A = (-\infty, +\infty)$$

determiniamo l'equazione della retta tangente nel punto corrispondente a $t_0 = 1$. Deve essere:

$$\tau_0) \quad \frac{x - x(t_0)}{l_0} = \frac{y - y_0}{m_0}$$

Qui è:

$$l_0 = x'(t_0) = 1, \quad m_0 = y'(t_0) = 2,$$

per cui:

$$\tau_0) \quad y = 2x - 4$$

I coseni direttori della retta $\vec{\tau}_0$ orientata nel verso delle t crescenti, sono:

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \mu_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$