Differenziali totali successivi. L'operatore differenziale

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Sia $f \in C^2(A)$ essendo A un qualunque campo di $\mathbb{R}^n$. Il differenziale totale di f è:

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \tag{1}$$

df è noto anche come **differenziale totale primo** o **del primo ordine**.

Definizione. Dicesi **differenziale totale del secondo ordine della funzione** f:

$$d^2 f = d(df)$$

tale che

$$df\left(x_1, x_2, ..., x_n, \underbrace{dx_1, dx_2, ..., dx_n}_{\text{costanti}}\right)$$

In altri termini, il differenziale primo (1) risulta essere una funzione delle $2n$ variabili:

$$(x_1, x_2, ..., x_n, dx_1, dx_2, ..., dx_n)$$

Il differenziale totale secondo viene determinato applicando l'operatore d e ritenendo costanti i differenziali dx_k.

Dalla (1):

$$\begin{aligned} d^2 f &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (df)}{\partial x_k} dx_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_h \right) dx_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} dx_h dx_k \end{aligned}$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie:

$$d^2 f = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} dx_h dx_k \tag{2}$$

Il procedimento può essere iterato; se $f \in C^m(A)$ è possibile determinare il **differenziale totale di ordine** m:

$$d^m f = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} ... \sum_{k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} ... \partial x_{k_m}} dx_{k_1} dx_{k_2} ... dx_{k_m} \tag{3}$$

Le equazioni (2)-(3) sono facilmente riprodotte utilizzando l'algebra operatoriale. Più precisamente definiamo un **operatore differenziale**:

$$d \doteq \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k \tag{4}$$

dove $\doteq$ sta per "rappresentato da". L'operatore d operando su una funzione f:

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k,$$

che è il differenziale totale primo di f. Diremo che df è il risultato dell'applicazione dell'operatore d sulla funzione f. Si osservi che d è **lineare**

$$\forall f, g \in C^1(A),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$$

L'operatore di differenziazione totale del secondo ordine si ottiene prendendo il quadrato della (4):

$$d^2 \doteq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k \right)^2$$

Quindi:

$$d^2 f = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k \right)^2 f$$

Ad esempio, nel caso di una funzione di due variabili $f(x, y)$:

$$d \doteq \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy,$$

donde:

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \end{aligned}$$

Passando al second'ordine:

$$
\begin{aligned}
d^2 &\doteq \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 \\
d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2
\end{aligned}
$$

Nel caso generale, assegnata $f \in C^m(A)$:

$$
\begin{aligned}
d^m &\doteq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}dx_k\right)^m \\
d^m f &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}dx_k\right)^m f
\end{aligned}
$$