

Derivazione di funzioni composte

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Consideriamo $n \geq 2$ funzioni reali $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ definite nell'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Adottiamo le seguenti ipotesi:

1. Le funzioni $x_k(t)$ sono derivabili in $[a, b]$.
2. $\forall t \in [a, b], P[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \in A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A$ è un campo.
3. $\exists f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^1(A)$

Le ipotesi 2 e 3 implicano l'esistenza della *funzione composta*:

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \quad \forall t \in [a, b] \end{aligned} \quad (1)$$

Scriviamo:

$$F(t) = f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \quad (2)$$

Teorema 1. Nelle ipotesi 1,2,3, la funzione composta $F(t)$ è derivabile, e la sua derivata prima è

$$\begin{aligned} F'(t) = f_{x_1}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]x_1'(t) + f_{x_2}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]x_2'(t) + \\ + \dots + f_{x_n}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]x_n'(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Equivalente a:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \quad (4)$$

Proof. Per $t \in [a, b]$, consideriamo l'incremento Δt e i corrispondenti incrementi delle n funzioni $x_k(t)$:

$$\Delta x_k = x_k(t + \Delta t) - x_k(t), \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, n$$

Da ciò segue l'incremento di $F(t)$:

$$\Delta F = f[x_1(t + \Delta t), x_2(t + \Delta t), \dots, x_n(t + \Delta t)] - f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \quad (5)$$

Per il teorema del differenziale totale:

$$\Delta F = dF + o(\rho), \quad (6)$$

essendo $o(\rho)$ un infinitesimo di ordine superiore a ρ per $\rho \rightarrow 0$, che può essere scritto come $\omega\rho$, essendo ω un infinitesimo di ordine superiore a ρ . La (6) può essere scritta come:

$$\Delta F = dF + \omega\rho$$

Dividendo per Δt :

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \sum_{k=1}^n \left\{ f_{x_k} [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \frac{\Delta x_k}{\Delta t} \right\} + \omega \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t} \right)^2} \quad (7)$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} x_k(t) \text{ è continua} &\implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x_k = 0 \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho = 0 \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega = 0 \\ x_k(t) \text{ è derivabile} &\implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k}{\Delta t} = x'_k(t), \end{aligned}$$

per cui eseguendo nella (7) l'operazione di passaggio al limite per $\Delta t \rightarrow 0$, si ottiene la (3). □