Derivate parziali del secondo ordine

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Ipotizziamo che la funzione reale $f(x, y)$ sia dotata di entrambe le derivate parziali $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ nel campo $A \subseteq \mathbb{R}$. Supponendo ulteriormente che tali funzioni siano parzialmente derivabili, si ha:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x} \\ f_{xy}(x, y) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(x, y + \Delta y) - f_x(x, y)}{\Delta y} \end{aligned}$$

La notazione simbolica è:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per la funzione $f_y(x, y)$:

$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Riepilogando, abbiamo le **derivate parziali prime** o **derivate parziali del primo ordine**:

$$f_x, f_y,$$

e le **derivate parziali seconde** o **derivate parziali del second'ordine**:

$$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$$

Le f_{xy}, f_{yx} sono le **derivate miste del second'ordine**.
Ci si può chiedere se sotto determinate ipotesi è $f_{yx} = f_{yy}$. La risposta è affermativa ed è contenuta nel seguente:

Teorema di Scwharz 1.

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ è continua nel campo } A \\ \text{assieme alle sue derivate parziali seconde} \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\forall (x, y) \in A,\ f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)\right)$$

Proof. Omessa. □